Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 2. С. 13—17

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.983.51

Задача Коши для дифференциально-разностного уравнения с вырождением

Е. Ю. Гражданцева
Иркутский государственный университет

Аннотация. Рассмотрена задача Коши для дифференциально-разностного оператора в банаховых пространствах с вырожденным оператором при старшей производной.

Ключевые слова: дифференциально-разностное уравнение, фундаментальная оператор-функция, обобщенное решение, вырожденный оператор.

1. Введение

В классической математической физике и в приложениях возникают начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с необратимым оператором при старшей производной. Такими задачами могут быть задачи теплопроводности, диффузии, упругости, электродинамики, теории потенциала, теории устойчивости движения, проблем газовой динамики и другие. Многие подобные начально-краевые задачи, возникающие в приложениях, допускают редукцию к дифференциальным уравнениям в банаховых пространствах с необратимым оператором при старшей производной. Такие уравнения принято называть сингулярными дифференциальными уравнениями (или, в иной терминологии, вырожденными дифференциальными уравнениями, уравнениями соболевского типа). Известно, что задачи для дифференциальных уравнений с вырожденным оператором при старшей производной разрешимы в классе непрерывных функций не при всех начальных данных и правых частях. Аппарат теории обобщенных функций служит удобным средством для исследования задач подобного рода. Особенность заключается в том, что в обобщенной постановке начальные условия включаются в мгновенно действующие источники. Следовательно, естественным образом, возникает проблема построения обобщенных решений. Эту проблему в полном объеме удаетися разрешить при помощи, введенной М. В. Фалалеевым, конструкции фундаментальной оператор-функции, соответствующей дифференциальному оператору исследуемой задачи. Это дает возможность отойти от прямого построения обобщенного решения и позволяет выписать обобшенное решение в замкнутой форме. Кроме того, наличие фундаментальной оператор-функции, дает возможность определять условия существования непрерывного решения исследуемой задачи, избегая его непосредственного построения.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциально-разностного уравнения вида

$$B\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A(u(t, x-\mu) - u(t,x)) + f(t,x),$$
$$u|_{t=0} = u_0(x),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x),$$

где A, B — замкнутые линейщные операторы из E_1 в E_2, $D(B) \subset D(A)$, $\overline{D(A)} = \overline{D(B)} = E_1$, E_1 и E_2, — банаховы пространства, B — вырожденный оператор (фредгольмов или нетеров), $\overline{R(B)} = R(B)$.

Решение такой задачи ищется в классе $C^2(t \geq 0) \bigcap BUC(R; E_2)$, где $BUC(R; E_2)$ — пространство ограниченных равномерно непрерывных функций на R со значениями в E_2, [5]; $f(t,x)$ — достаточно гладкая по t функция и для любого фиксированного $t \geq 0$ $f(t,x) \in BUC(R; E_2)$; $u_1(x),\ \ u_2(x) \in BUC(R; E_2)$.

Предполагая, что рассматриваемая задача Коши имеет непрерывное решение $u(t,x)$ продолжим это решение и функцию $f(t,x)$ нулями при отрицательных t, то есть введем в рассмотрение функции $\widetilde{u}(t,x) = u(t,x)\theta(t)$, $\widetilde{f}(t,x) = f(t,x)\theta(t)$, где $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

Тогда от данной задачи перейдем к соответствующей ей обобщенной задаче Коши

$$B\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t^2} = A(\widetilde{u}(t, x-\mu) - \widetilde{u}(t,x)) + \widetilde{f}(t,x) + Bu_1(x)\delta(t) + Bu_0(x)\delta^{'}(t),$$

где $\delta(t)$ — дельта функция Дирака. Полученному уравнению соответствует обобщенный дифференциально-разностный оператор вида

$$B\delta^{''}(t)\delta(x) - A\delta(t)(\delta(x-\mu) - \delta(x)).$$

С помощью фундаментальной оператор-функции для данного дифференциально-разностного оператора решение обобщенной задачи Коши примет вид свертки фундаментальной оператор-функции этого оператора с правой частью уравнения , описывающего обобщенную задачу

Коши (здесь правой частью уравнения является выражение $\widetilde{f}(t,x) + u_1(x)\delta(t) + Bu_0(x)\delta^{'}(t)$). Таким образом, проблема построения решения обобщенной задачи Коши свелась к проблеме построения фундаментальной оператор-функции для данного дифференциально-разностного оператора.

2. Фундаментальная оператор-функция дифференциально-разностного оператора $I\delta^{''}(t)\delta(x) - A\delta(t)(\delta(x-\mu) - \delta(x))$.

Лемма 1. *Справедлива формула*

$$\sum_{m=0}^{k}(-1)^m C_k^m(\delta(x-(k+1-m)\mu) - \delta(x-(k-m)\mu)) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k+1}(-1)^m C_{k+1}^m(\delta(x-(k+1-m)\mu)).$$

Доказательство. В справедливости этого равенства можно убедиться простой перестановкой слагаемых. □

Теорема 1. *Если оператор A ограничен, то дифференциально-разностный оператор $I\delta^{''}(t)\delta(x) - A\delta(t)(\delta(x-\mu) - \delta(x))$ имеет на классе $D_+(t \geq 0)$ обобщенных функций $u(t,x)$ с носителем в полупространстве $t \geq 0$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$E(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}\theta(t)\sum_{m=0}^{k}(-1)^m C_k^m \delta(x-(k-m)\mu).$$

3. Фундаментальная оператор-функция дифференциально-разностного оператора $B\delta^{''}(t)\delta(x) - A\delta(t)(\delta(x-\mu) - \delta(x))$.

Лемма 2. *Справедливы следующие равенства*

$$1)\sum_{m=0}^{k}(-1)^m C_k^m \delta(x-(k-m)\mu) * \sum_{l=0}^{\infty}\delta(x-l\mu) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k}(-1)^{m+1} C_{k-1}^m \delta(x-(k-1-m)\mu),$$

$$2)\sum_{l=0}^{\infty}\delta(x-l\mu) * \cdots * \sum_{l=0}^{\infty}\delta(x-l\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} C_{l+r-1}^{r-1}\delta(x-l\mu).$$

Теорема 2. *Если A, B — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $D(B) \subset D(A)$, $\overline{D(A)} = \overline{D(B)} = E_1$, E_1 и E_2 — банаховы пространства, B фредгольмов, $R(B) = \overline{R(B)}$, B имеет полный A — жорданов набор $\left\{\varphi_j^{(i)}, j = \overline{1,n}, i = \overline{1,p_j}\right\}$ [2, с. 424-426], то на классе $D_+(t \geq 0)$ дифференциально-разностный оператор $B\delta''(t)\delta(x) - A\delta(t)(\delta(x-\mu) - \delta(x))$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида*

$$U(t,x) = \Gamma \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A\Gamma)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \theta(t) \sum_{m=0}^{k} C_k^m \delta(x-(k-m)\mu) * \Big(I\delta(t)\delta(x) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{p_j-1} \left\langle \bullet, \psi_j^{(i+1)} \right\rangle z_j (-1)^{p_j-i-1} \delta^{(2(p_j-1))}(t) \sum_{l=0}^{\infty} C_{l+p_j-i-1}^{p_j-i-1} \delta(x-l\mu) \Big),$$

где $\left\{\psi_j^{(i)},\ j = \overline{1,n},\ i = \overline{1,p_j}\right\}$ — A^*-жорданов набор оператора B^*, Γ — оператор Треногина-Шмидта [2,с.340].

Теорема 2 допускает обобщение на случай операторов дифференцирования более высокого порядка, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если A, B — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $D(B) \subset D(A)$, $\overline{D(A)} = \overline{D(B)} = E_1$, E_1 и E_2 — банаховы пространства, B фредгольмов, $R(B) = \overline{R(B)}$, B имеет полный A — жорданов набор $\left\{\varphi_j^{(i)},\ j = \overline{1,n},\ i = \overline{1,p_j}\right\}$ [2, с. 424-426], то на классе $D_+(t \geq 0)$ дифференциально-разностный оператор $B\delta^r(t)\delta(x) - A\delta(t)(\delta(x-\mu) - \delta(x))$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида*

$$U(t,x) = \Gamma \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A\Gamma)^k t^{r(k+1)-1}}{(r(k+1)-1)!} \theta(t) \sum_{m=0}^{k} C_k^m \delta(x-(k-m)\mu) * \Big(I\delta(t)\delta(x) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{p_j-1} \left\langle \bullet, \psi_j^{(i+1)} \right\rangle z_j (-1)^{p_j-i-1} \delta^{(2(p_j-1))}(t) \sum_{l=0}^{\infty} C_{l+p_j-i-1}^{p_j-i-1} \delta(x-l\mu) \Big),$$

где $\left\{\psi_j^{(i)},\ j = \overline{1,n},\ i = \overline{1,p_j}\right\}$ — A^*-жорданов набор оператора B^*, Γ — оператор Треногина-Шмидта [2,с.340].

Замечание 1. Фундаментальная оператор-функция дифференциального оператора $B\delta^r(t)\delta(x) - A\delta(t)(\delta(x-\mu) - \delta(x))$ представима в виде

$$U(t,x) = \Gamma \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A\Gamma)^k t^{r(k+1)-1}}{(r(k+1)-1)!} \left(I - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{p_j-1} \left\langle \bullet, \psi_j^{(i+1)} \right\rangle A\varphi_j^{p_j-1} \right) \times$$

$$\times\theta(t)\sum_{m=0}^{k}(-1)^m C_k^m \delta(x-(k-m)\mu)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_j-1}\left\{\sum_{i=0}^{p_j-1-k}(-1)^k\left\langle \bullet, \psi_j^{(i+1)}\right\rangle \varphi_j^{p_j-k-i}\right\}\delta^{rk}(t)\sum_{l=0}^{\infty}C_{l+k}^{k}\delta(x-l\mu).$$

Представленные теоремы допускают обобщение на случай нетеровости оператора B.

Список литературы

1. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
2. Вайнберг, М. М. , Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин.– М.: Наука, 1969.
3. Sidorov, N. Lypunov-Shmidt Method in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. Kluwer Academic Publishers, 2002. – 566 p.
4. Голдстейн, Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн. – Киев: Выща шк., 1989.

E. Yu. Grazhdantseva

The Cauchy problem for difference-differential equation with degeneration

Abstract. The Cauchy problem for differitial-difference equation with the degeneration is considered into the Banach spaces

Keywords: Banach spaces, difference-differential equations

Елена Юрьевна Гражданцева, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики,экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 (grelyur@mail.ru)

Elena Grazhdantseva, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 (grelyur@mail.ru)