Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 2. С. 44—50

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.911.5

О множестве решений дифференциальных включений с односторонними условиями Липшица *

В. И. Новицкий
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. В статье рассматривается дифференциальное включение с многозначными возмущениями или управлениями. Наряду с исходным включением рассматривается однопараметрическое семейство аппроксимирующих включений, исследуется вопрос о близости множеств решений исходного и аппроксимирующего включений в метрике Хаусдорфа.

Ключевые слова: дифференциальное включение, одностороннее условие Липшица, аппроксимация Иосиды, множество достижимости.

1. Введение

Рассматривается дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t,x) + G(t,x), x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, $t \in [t_0, t_1]$, $F(t,x)$ и $G(t,x)$ — ограниченные полунепрерывные сверху многозначные отображения, значениями которых являются выпуклые компактные подмножества из пространства R^n.

Данная задача возникает, например, при рассмотрении управляемой системы, описываемой дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x} = f(t,x) + B(t,x)u(t,x), x(t_0) = x_0, \tag{1.2}$$

где $f(t,x)$ — разрывная по совокупности аргументов (t,x) функция, $B(t,x)$ — матрица размерности $n \times m$, элементами которой являют-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00132-а) и СО РАН (интеграционный проект № 85).

ся непрерывные функции, $u(t,x) = (u_1(t,x),\ldots,u_m(t,x))$ — вектор-функция управления, $u_i(t,x)$ разрывны на гладких поверхностях $S_i = \{(t,x) : \varphi_i(t,x) = 0\}$, $i = 1,\ldots,m$ (каждая функция $u_i(t,x)$ на своей поверхности S_i). Применяя к функции $f(t,x)$ простейшее выпуклое доопределение по Филиппову (см. [1]), получаем полунепрерывное сверху многозначное отображение $F(t,x)$. Также его можно получить, если рассматривать управляемую систему, в которой $f(t,x)$ представляет собой функцию возмущений точное значение которых не известно, но известно органичение вида $f(t,x) \in F(t,x)$. Далее, применяя для функции $u(t,x)$ метод эквивалентного управления, получаем полунепрерывную сверху многозначную функцию $G(t,x) = B(t,x)U(t,x)$ (см. [2]). Таким образом осущетсвляется переход от управляемой системы (1.2) к дифференциальному включению (1.1).

Актуальность задачи, которая будет рассматриваться в данной работе обуславливается тем, что применение вычислительных процедур непосредственно к дифференциальным включениям (1.1) встречают значительные трудности. Здесь мы используем для многозначных функций $F(t,x)$ некоторые однозначные непрерывные аппроксимации $F_\lambda(t,x)$ и рассматриваем дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F_\lambda(t,x) + G(t,x) \tag{1.3}$$

с параметром $\lambda > 0$. Оценки для множеств решений дифференциальных включений (1.1) и (1.3) позволяют гарантированно оценивать множество достижимости для включения (1.1) с использованием хорошо разработанных численных методов для включения (1.3).

2. Односторонние условия Липшица

В определениях полунепрерывности сверху и измеримости многозначных отображений со значениями в пространстве непустых компактных подмножеств из R^n мы следуем [3].

Определение 1. *Многозначное отображение $F(t,x)$ удовлетворяет одностороннему условию Липшица, если*

$$\begin{gathered}\forall x,y \in R^n, \forall u \in F(t,x), \forall v \in F(t,y), \forall t \in [t_0,t_1]\,,\\ \langle x-y, u-v\rangle \le l\|x-y\|^2.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Определение 2. *Многозначное отображение $G(t,x)$ удовлетворяет слабому одностороннему условию Липшица, если*

$$\begin{gathered}\forall x,y \in R^n, \forall u \in G(t,x), \forall t \in [t_0,t_1]\,, \exists v \in G(t,y),\\ \langle x-y, u-v\rangle \le l\|x-y\|^2.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение векторов, $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Пусть A, B — непустые компактные множества некоторого метрического пространства X.

Определение 3. *Метрикой Хаусдорфа называется выражение*

$$h(A,B) = max\{ex(A,B), ex(B,A)\},$$

где

$$ex(A,B) = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b),$$

$d(a,b)$ *— расстояние между точками* a *и* b.

Если отображение $F(t,x)$ однозначно и удовлетворяет условию Липшица по пременной x, то оно удовлетворяет также одностороннему условию Липшица и, очевидно, слабому одностороннему условию Липшица. Для многозначного отображения $G(t,x)$ с условием Липшица в метрике Хаусдорфа по переменной $x \in R^n$:

$$h(G(t,x), G(t,y)) \le k\|x-y\|, \tag{2.3}$$

выполняется, вообще говоря, лишь слабое одностороннее условие Липшица. Действительно, из неравенства Коши-Буняковского следует, что $\langle x-y, u-v\rangle \le \|x-y\|\cdot\|u-v\|$. В свою очередь, из (2.3) следует, что

$$\sup_{v\in G(t,y)}\inf_{u\in G(t,x)} \|u-v\| \le k\|x-y\|.$$

Тогда для любого $v \in G(t,y)$ найдется $u \in G(t,x)$, что $\|u-v\| \le k\|x-y\|$ и, следовательно, выполняется неравенство (2.2). Если же $G(t,x) \equiv U - const$, то неравенство (2.2) выполняется, а неравенство (2.1) нет.

Для любой непрерывной функции $x(t)$ и измеримой функции $g(t) \in G(t,x(t))$, $t \in [t_0,t_1]$, определим многозначное отображение $G_g(t,y)$ как множество точек $v \in G(t,y)$ таких, что

$$\langle x(t)-y, g(t)-v\rangle \le l\|x(t)-y\|^2. \tag{2.4}$$

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) Для всех (t,y) *множество* $G_g(t,y)$ *выпукло и компактно.*

2) Для любого фиксированного t *многозначное отображение* $y \mapsto G_g(t,y)$ *полунепрерывно сверху.*

3) Для любого фиксированного y *многозначное отображение* $t \mapsto G_g(t,x(t))$ *имеет измеримый селектор.*

Доказательство. 1) Так как, множество $G_g(t,y)$ замкнуто и $G_g(t,y) \subset G(t,y)$, то $G_g(t,y)$ компактно.

Пусть $v_\alpha = \alpha v_1 + (1-\alpha)v_2, v_1, v_2 \in G_g(t,y)$, где $\alpha \in [0,1]$. Тогда

$$\langle x(t)-y, g(t)-v_\alpha\rangle = \langle x(t)-y, \alpha g(t)+(1-\alpha)g(t)-\alpha v_1-(1-\alpha)v_2\rangle =$$
$$\alpha\langle x(t)-y, g(t)-v_1\rangle + (1-\alpha)\langle x(t)-y, g(t)-v_2\rangle \le$$
$$\alpha l\|x(t)-y\|^2 + (1-\alpha)l\|x(t)-y\|^2 = l\|x(t)-y\|^2.$$

Т. е. для v_α выполняется (2.4) и множество $G_g(t,y)$ — выпукло.

2) Пусть $y_k \to y, v_k \to v, v_k \in G_g(t,y_k)$. Тогда $v \in G(t,y)$ (в силу полунепрерывности сверху $G(t,y)$) и

$$\langle x(t)-y_k, g(t)-v_k\rangle \le l\|x(t)-y_k\|^2. \tag{2.5}$$

Из (2.5) при $k \to \infty$ получаем (2.4), т.е. $v \in G_g(t,y)$ и G_g — полунепрерывное сверху многозначное отображение (имеет замкнутый график и в силу ограниченности — полунепрерывно сверху).

3) Обозначим $G_{g_m}(t,y) \subset G_g(t,y)$ множество всех $v \in G(t,y)$ на которых левая часть (2.4) достигает своего минимума, или, в эквивалентной формулировке, функция $\Phi(t,y) = -\langle x(t)-y, g(t)-v\rangle$ достигает своего максимума по $v \in G(t,y)$ (y — фиксировано).

Так как оборажение $t \mapsto G(t,y)$ полунепрерывно сверху, то оно измеримо. Функция $g(t)$ также измерима. Тогда, используя свойство Лузина для измеримых функций (как однозначных, так и многозначных) для любого $\varepsilon > 0$ выберем множество $T_\varepsilon \subset [t_0,t_1]$ такое, что $\mu([t_0,t_1] \setminus T_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$ и сужение отображений $G(\cdot,y)$ и $g(\cdot)$ непрерывны на T_ε. По теореме максимума [3, с. 53] сужение отображения $G_{g_m}(\cdot,y)$ на можество T_ε полунепрерывно сверху и следовательно измеримо на T_ε. Тогда существует множество $T'_\varepsilon \subset T_\varepsilon$, $\mu(T_\varepsilon \setminus T'_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$ такое, что $G_{g_m}(\cdot,y)$ непрерывно на T'_ε и $\mu([t_0,t_1] \setminus T'_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Таким образом для $G_{g_m}(\cdot,y)$ выполняется свойство Лузина и отображение $G_{g_m}(\cdot,y)$ измеримо на множестве $[t_0,t_1]$. Поэтому оно имеет измеримый селектор $z(t) \in G_{g_m}(t,y) \subset G_g(t,y)$.

□

3. Аппроксимации Иосиды и множества достижимости

Наряду с (1.1) будем рассматривать дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F_\lambda(t,x) + G(t,x), \tag{3.1}$$

где $F_\lambda(t,x)$ — аппроксимация Иосиды [4] отображения $F(t,x)$. В соответствии с леммой 1 [1] существует число $\lambda' > 0$ такое, что для любых $t \in [t_0,t_1]$, $x, y \in R^n$ и $v \in F(t,y)$ справедливо неравенство

$$\langle x-y, F_\lambda(t,x)-v\rangle \le l\|x-y\|^2 + \lambda L, \tag{3.2}$$

для всех $\lambda \in (0, \lambda']$, где l, L — некоторые константы,

Ниже будет использоваться следующий факт [2, Лемма 1]: для любого решения $x(t)$ включения (1.1), определенного на отрезке $[t_0, t_1]$ существуют измеримые селекторы $f(t) \in F(t, x(t))$ и $g(t) \in G(t, x(t))$ такие что

$$\dot{x} = f(t) + g(t).$$

Пусть $x(t)$ — решение включения (1.1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, определенное на отрезке $[t_0, t_1]$, и $x^\lambda(t)$ — решение включения

$$\dot{x}^\lambda(t) \in F_\lambda(t, x^\lambda(t)) + G_g(t, x^\lambda(t)),$$

также определенное на отрезке $[t_0, t_1]$ и $x^\lambda(t_0) = x_0$. Согласно [3] такие решения существуют. Обозначим

$$w(t) = \frac{1}{2}\|x^\lambda(t) - x(t)\|^2.$$

Тогда

$$\dot{w}(t) = \langle x^\lambda(t) - x(t), \dot{x}^\lambda(t) - \dot{x}(t)\rangle =$$
$$\langle x^\lambda(t) - x(t), (F_\lambda(t, x^\lambda(t)) - f(t)) + (g_\lambda(t, x^\lambda(t)) - g(t))\rangle =$$
$$\langle x^\lambda(t) - x(t), F_\lambda(t, x^\lambda(t)) - f(t)\rangle + \langle x(t) - x^\lambda(t), g(t) - g_\lambda(t)\rangle,$$

где $f(t) \in F(t, x(t))$, $g(t) \in G(t, x(t))$, $g_\lambda(t) \in G_g(t, x^\lambda(t))$. Из неравенств (2.4) и (3.2) следует, что

$$\langle x^\lambda(t) - x(t), F_\lambda(t, x^\lambda(t)) - f(t)\rangle \leq l\|x(t) - x^\lambda(t)\|^2$$

и

$$\langle x(t) - x^\lambda(t), g(t) - g_\lambda(t)\rangle \leq l\|x(t) - x^\lambda(t)\|^2.$$

Поэтому $\dot{w}(t) \leq 2l\|x(t) - x^\lambda(t)\|^2 + \lambda L = 2lw(t) + \lambda L$. Из неравенства Гронуолла-Беллмана [5, с. 11] получаем, что $w(t) \leq \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{2l(t_1-\xi)}\lambda L d\xi = O(\lambda)$. Следовательно, существует число $k > 0$, такое, что $w(t) \leq k\lambda$.

Таким образом, для всякого решения $x(t)$ включения (1.1) существует решение $x^\lambda(t)$ включения (3.1) такое, что

$$\max_{t\in[t_0,t_1]} \|x^\lambda(t) - x(t)\| \leq k\sqrt{\lambda} \tag{3.3}$$

Теперь наоборот, пусть $x^\lambda(t)$ — решение включения (3.1). Тогда, очевидно, существует измеримая функция $g^*(t) \in G(t, x^\lambda(t))$, такая что

$$\dot{x}_\lambda(t) = F_\lambda(t, x^\lambda(t)) + g^*(t)$$

для почти всех $t \in [t_0, t_1]$. Для этой функции $g^*(t)$ также, как и выше, определим многозначное отображение $G_{g^*_m}(t, y)$, удовлетворяющее неравенству

$$\langle x^\lambda(t) - y, g^*(t) - v\rangle \leq l\|x^\lambda(t) - y\|^2 \tag{3.4}$$

Рассмотрим решение $x(t)$ включения

$$\dot{x} \in F(t, x(t)) + G_{g_m^*}(t, x(t)),$$

которое, очевидно, является также решением включения (1.1). В ходе доказательства леммы 1 была установлена измеримость многозначного отображения $G_{g_m^*}(t, x(t))$. Тогда $\dot{x}(t) = f(t) + g(t)$, где $f(t) \in F(t, x(t))$ и $g(t) \in G_{g_m^*}(t, x(t))$, где $f(t)$ и $g(t)$ — измеримые функции, и

$$\dot{w}(t) = \langle x^\lambda(t) - x(t), \dot{x}^\lambda(t) - \dot{x}(t)\rangle =$$
$$\langle x^\lambda(t) - x(t), (F_\lambda(t, x^\lambda(t)) - f(t)) + (g^*(t, x^\lambda(t)) - g(t))\rangle =$$
$$\langle x^\lambda(t) - x(t), F_\lambda(t, x^\lambda(t)) - f(t)\rangle + \langle x^\lambda(t) - x(t), g^*(t) - g(t)\rangle.$$

В силу (3.4) справедливо неравенство

$$\langle x^\lambda(t) - x(t), g^*(t) - g(t)\rangle \le l\|x^\lambda(t) - x(t)\|^2.$$

Таким образом, учитывая неравенство (3.2), получаем, что

$$\dot{w}(t) \le 2l\|x^\lambda(t) - x(t)\|^2 + \lambda L = 2lw(t) + \lambda L.$$

Применяя лемму Гронуолла-Беллмана, получаем, что $w(t) \le k\lambda$ и, следовательно, для всякого решения $x^\lambda(t)$ включения (3.1) существует решение $x(t)$ включения (1.1) такое, что выполняется (3.3).

Из доказанного выше и определения метрики Хаусдорфа следует, что справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $H_\lambda(x_0)$, $H(x_0)$ — множества решений включений (3.1) и (1.1) соответственно, определенных на отрезке $[t_0, t_1]$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$, h — метрика Хаусдорфа, определенная на всех непустых компактных множествах пространства непрерывных функций $C([t_0, t_1], R^n)$. Тогда существуют k и λ' такие, что для любого $\lambda \in (0, \lambda']$ выполняется следующая оценка*

$$h(H_\lambda(x_0), H(x_0)) \le k\sqrt{\lambda}.$$

4. Заключение

Множеством достижимости в момент времени t для дифференциального включения (1.1) называется множество $H(x_0)[t] = \{\bigcup x(t) : x(\cdot) \in H(x_0)\}$. Теорема 1 позволяет с гарантированной точностью оценить множество достижимости исходной системы через множество достижимости аппроксимирующей системы,в которой функция $F_\lambda(t, x)$ является однозначно определенной. Следует отметить, что полученная оценка записывается в терминах параметра λ и в таком виде получена впервые. Это позволяет обоснованно строить численные методы для приближенной оценки множеств достижимости управляемой системы.

Автор благодарит И.А. Финогенко за предложенные задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
2. Новицкий В.И. Скользящие режимы управляемых систем с многозначными возмущениями / В. И. Новицкий, И. А. Финогенко // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2009. – Т.23, №. 3. – С.87-91.
3. Обуховский, В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / В. В. Обуховский, Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис. – М.: КомКнига, 2005. – 256 с.
4. Финогенко, И.А. О непрерывных аппроксимациях и правосторонних решениях дифференциальных уравнений с кусочно непрерывной правой частью / И.А. Финогенко // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 5. – С. 647-655.
5. Трубников, Ю.В. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями / Ю. В. Трубников, А. И. Перов. – Минск: Наука и техника, 1986. – 150 с.

V. I. Novitskiy

On a set of solutions for differential inclusions with one sided Lipschitz condition

Abstract. In this paper we consider differential inclusion with multiple-valued perturbation or control. Beside initial inclusion we consider one-parameter kind of approximate inclusions and analyze issue on closeness of solution sets of initial and approximate inclusions in Hausdorff distanse.

Keywords: differential inclusion, one sided Lipschitz condition, Iosida approximation, attainability set.

Новицкий Вадим Иванович, аспирант, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952)427100 (novvad@gmail.com)

Vadim Novitskiy, post-graduate student, Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontov St., Irkutsk, 664033 Phone: (3952)427100 (novvad@gmail.com)