Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 2. С. 88—102

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.911.5

О дифференциальных уравнениях с разрывной правой частью *

И. А. Финогенко
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. В статье приводится краткий обзор основных понятий, методов и проблем теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Анализируются различные способы доопределения правых частей в точках разрыва и неявные формы записи для таких уравнений.

Ключевые слова: разрывная система; дифференциальное включение; обобщенное решение; квазирешение; скользящий режим; правостороннее условие Липшица.

1. Понятие дифференциального уравнения с разрывной правой частью

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в векторной форме:

$$\dot{x} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

где $(t, x) \in R^{n+1}$, $f = (f_1 \ldots, f_n)$. Если функция $f(t, x)$ непрерывна по совокупности аргументов, то под решением задачи Коши на интервале (α, ω) понимается непрерывно-дифференцируемая функция $x(t)$, определенная на этом интервале, удовлетворяющая начальному условию и данному дифференциальному уравнению для всех значений $t \in (\alpha, \omega)$. Такие решения существуют по крайней мере локально для любых начальных условий (t_0, x_0) и называются классическими. Классическое решение является абсолютно непрерывной функцией на каждом отрезке $[t_0, t_1] \subset (\alpha, \omega)$. Отметим, что абсолютно непрерывные функции и только они восстанавливаются по своей производной интегрированием (вообще говоря, по Лебегу). Это общее свойство решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00132-а) и СО РАН (интеграционный проект № 85)

Можно рассматривать и более широкие классы функций $f(t,x)$. Например, предположить, что функция $f(t,x)$ непрерывна по (t,x) справа относительно переменной по t. Для таких функций $f(t,x)$ решение $x(t)$ будет иметь непрерывную справа правую производную $D^+x(t)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) в каждой точке t из интервала (α,ω). Такие решения называются правосторонними.

Наиболее общий класс функций $f(t,x)$, разрывных по переменной t и непрерывных по переменной x, описывают следующие условия:

1. Функция $f(t,x)$ при почти всех t определена и непрерывна по x.
2. Функция $f(t,x)$ при каждом фиксированном x измерима по t;
3. Функция $f(t,x)$ интегрально ограничена, т.е. существует суммируемая по Лебегу на каждом конечном отрезке функция $m(t)$ такая, что $\|f(t,x)\| < m(t)$ для почти всех t.

Условия 1-3 называются условиями Каратеодори и решение уравнения (1.1), которое они обеспечивают, называется решением Каратеодори. Производная решения Каратеодори является измеримой функцией, существующей и удовлетворяющей этому уравнению почти всюду. Таким образом, условия зависимости функции $f(t,x)$ от переменной t могут быть весьма общими.

Ситуация принципиально изменяется, если функция $f(t,x)$ разрывна по переменным x. Рассмотрим случай (см. [1]), когда функция $f(t,x)$ разрывна на гладкой поверхности $S = \{x : \varphi(x) = 0\}$. Поверхность делит пространство переменной x на части: $S^+ = \{x : \varphi(x) > 0\}$, $S^- = \{x : \varphi(x) < 0\}$. Обозначим для каждой точки $x \in S$:

$$f^+(t,x) = \lim_{\substack{x'\to x\\ x'\in S^+}} (t,x'), f^-(t,x) = \lim_{\substack{x'\to x\\ x'\in S^-}} (t,x')$$

— предельные значения функции $f(t,x)$ с обеих сторон поверхности S и

$$f_N^+(t,x) = \frac{\langle \bigtriangledown\varphi(x), f^+(t,x)\rangle}{\|\bigtriangledown\varphi(t,x)\|},\ f_N^-(t,x) = \frac{\langle \bigtriangledown\varphi(x), f^-(t,x)\rangle}{\|\bigtriangledown\varphi(t,x)\|}$$

— проекции векторов f^+ и f^- на нормаль к поверхности S. (Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает символ скалярного произведения векторов и $\|\cdot\|$ — евклидова норма).

Если $f_N^-(t,x) > 0$ и $f_N^+(t,x) < 0$, то вблизи точки (t,x) векторы $f(t,x)$ направлены в сторону поверхности. Поэтому все решения уравнения (1.1) приближаются к поверхности S при возрастании t и при попадании на нее должны оставаться на S. Но тогда встает вопрос об описании движения системы по поверхности разрыва функции f. Такие движения называются скользящими режимами.

Из этих рассмотрений видно, что для дифференциальных уравнений с разрывной по фазовым переменным x функций $f(t,x)$ обычное понятие решения не подходит и требуется его обобщение. Эта задача сводится к описанию поля возможных направлений системы (1.1) в точках разрыва функции $f(t,x)$ или, как обычно говорят, доопределению функции $f(t,x)$. Оно должно отвечать определенным условиям и не может быть произвольным. Как правило, это доопределение неоднозначно и уравнение (1.1) заменяется на дифференциальное включение.

2. История вопроса и основные определения

Отдельные дифференциальные уравнения с разрывной правой частью исследовались в классической механике, как уравнения движения механических систем с кулоновым трением в работах П.Пэнлеве [2] более ста лет назад.

Но начало систематического изучения разрывных систем следует отнести к шестидесятым годам прошлого столетия в связи с возникновением и развитием теории автоматического регулирования. Именно в системах автоматического регулирования с различными релейными характеристиками и переменной структурой нашла свое основное приложение теория дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Специалистам, занимающимся разрывными системами, хорошо известна ставшая легендарной дискуссия на 1-ом конгрессе ИФАК в 1961 году, возникшая по докладу А.Ф. Филиппова, который предложил трактовать дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, как уравнения с многозначной правой частью или дифференциальные включения [3].

В настоящее время такой подход к определению решений разрывных систем является наиболее употребительным и не удивительно, почему начало интенсивного развития теории дифференциальных включений, теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и теории автоматического регулирования совпадает по времени.

А.Ф. Филиппов в своих дальнейших работах создал достаточно общую и содержательную теорию дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, основанную на дифференциальных включениях и существенно продвинул саму теорию дифференциальных включений.

Одно из направлений изучения систем управления с разрывными позиционными управлениями обосновано в работах М.А. Айзермана, Е.С. Пятницкого [4], которое они условно назвали физическим (в отличие от от направления работ А.Ф. Филиппова, которое названо математическим).

Из работ многих других ученых, посвященных, в основном, различным методам исследования качественного поведения разрывных систем укажем на еще один содержательный и общий метод исследования разрывных систем — метод эквивалентного управления, развитый в работах В.И. Уткина [5].

2.1. Определение решение по Филиппову

Суть определения решения по Филиппову состоит в следующем. Пусть $f(t,x)$ некоторая однозначная функция, определенная и непрерывная всюду в области $\Omega \subset R^{n+1}$ за исключением некоторого множества M. Предполагается что множество M имеет нулевую меру Лебега. Как правило в прикладных задачах множество M — некоторый набор гиперповерхностей в пространстве переменных (t,x).

Определение 1. *Функция $f(t,x)$ называется кусочно-непрерывной, если выполняются следующие условия:*

1) Область Ω состоит из конечного числа областей Ω_j, $j = 1,\dots,l$, и множества M (нулевой меры) точек границ этих областей;

2) В каждой области Ω_j функция f непрерывна по совокупности переменных;

3) Для каждой точки $(t,x) \in M$ существует конечный предел функции f по любой из областей Ω_j, для которой точка (t,x) является граничной.

Отметим, что мы рассматриваем функцию $f(t,x)$ при условии, что $(t,x) \notin M$. На множестве M она быть не определена и задается некоторым специальным образом, что и приводит к различным понятиям решения дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

Для кусочно-непрерывной функции $f(t,x)$ через $F(t,x)$ обозначим выпуклую оболочку всех ее предельных значений в каждой фиксированной точке $(t,x) \in \Omega$. Если в точке (t,x) функция $f(t,x)$ непрерывна, то $F(t,x)$ — множество состоящее из одной точки $f(t,x)$. Такое многозначное доопределение функции f называется простейшим выпуклым доопределением.

Определение 2. *Под решением дифференциального уравнения (1.1) с кусочно-непрерывной функцией f в правой части понимается решение дифференциального включения*

$$\dot{x} \in F(t,x),\ x(t_0) = x_0. \tag{2.1}$$

Функция $x : (\alpha,\omega) \to R^n$ является решением дифференциального включения (2.1), если на каждом конечном отрезке $[t_0,t_1] \subset (\alpha,\omega)$ она абсолютно непрерывна и ее производная $\dot{x}(t)$ удовлетворяет включению $\dot{x}(t) \in F(t,x(t))$ для почти всех $t \in [t_0,t_1]$.

Приведенное определение решения называется решением дифференциального уравнения (1.1) по Филиппову. Оно распространяется на существенно более широкий класс измеримых по переменным (t,x) функций f.

2.2. Определение решения в смысле Айзермана-Пятницкого

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u_1(t, x), \dots, u_m(t, x)), \tag{2.2}$$

где функция $f(t, x, u_1 \dots, u_m)$ непрерывна по совокупности аргументов и переменная $u = (u_1, \dots, u_m)$ имеет смысл управления. Пусть каждая функция $u_i = u_i(t, x)$ разрывна только на одной гладкой поверхности $S_i = \{(t, x) : \varphi_i(t, x) = 0\}$ и является кусочно-непрерывной. Это означает, что каждая функция $u_i(t, x)$ непрерывна в областях S_i^+ и S_i^-, на которые поверхность S_i разбивает пространство переменных (t, x), и для каждой точки $(t, x) \in S_i$ существуют конечные предельные значения функции $u_i(t, x)$ по этим областям. Обозначим их $u_i^+(t, x)$ и $u_i^-(t, x)$. Через $U_i(t, x)$ обозначается отрезок с концами $u_i^+(t, x)$ и $u_i^-(t, x)$, если $(t, x) \in S_i$. В областях непрерывности функции $u_i(t, x)$ множество $U_i(t, x)$ состоит из одной точки $u_i(t, x)$.

Определим $F_1(t, x) = f(t, u, U_1(t, x), \dots, U_m(t, x))$, как множество значений функции $f(t, x, u_1, \dots, u_m)$, когда точка (t, x) фиксирована, а переменные $u_1, \dots, u_m$ назависимо друг от друга пробегают соответственно множества $U_1(t, x), \dots, U_m(t, x)$. Через $F_2(t, x)$ обозначается выпуклая оболочка множества $F_1(t, x)$.

Определение 3. *Под решением уравнения (2.2) понимается решение дифференциального включения*

$$\dot{x} \in F_2(t, x). \tag{2.3}$$

Отметим далее, что включение (2.3) может быть записано в виде совокупности систем дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(t) f(t, u, u_1^*, \dots, u_m^*), \tag{2.4}$$

где $u_i^* = u_i(t, x)$ в точках непрерывности функции $u_i(t, x)$ и

$$u_i^* = \lambda_i(t) u_i^+(t, x) + (1 - \lambda_i(t)) u_i^-(t, x).$$

Здесь $\lambda_i(t) \in [0; 1]$, $\alpha_k(t) \geq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k(t) = 1$ и все функции $\lambda_i(t)$ и $\alpha_k(t)$ измеримы. Совокупность систем уравнений (2.4) называется репрезентативной системой уравнений и была введена в работах М.А. Айзермана, Е.С. Пятницкого [4]. К уравнению (2.2) может быть применено и простейшее выпуклое доопределение по Филиппову. При этом множество $F_2(t, x)$ содержит множество $F(t, x)$ и, следовательно, каждое решение в смысле Филиппова является также и решением в смысле

Айзермана-Пятницкого. Обратное, вообще говоря не верно. Это и послужило предметом дискуссии на 1-ом конгрессе ИФАК.

2.3. Дискуссия на 1-ом конгрессе ИФАК

Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью могут возникать при описании физических законов или технических устройств. Примерами являются силы сухого трения или двухпозиционные реле.

Различие двух подходов обусловлено тем, что представление разрывных систем репрезентативными уравнениями учитывает неидеальность и особенности реальной физической задачи в теории управления, которую не различает простейшее выпуклое доопределение по Филиппову. Общим у них является то, что соответствующие дифференциальные включения имеют многозначные отображения с выпуклыми значениями в правых частях.

Один из основных вопросов дискуссии состоит в следующем. Рассматриваются уравнения:

$$\dot{x} = Ax + bu_1 + cu_2,\ \dot{x} = Ax + (b+c)u_2,$$

где A — матрица, b, c и x — векторы, $u_1 = \mathrm{sign} x_1$, $u_2 = \mathrm{sign} x_1$, x_1 — первая координата вектора x.

В обоих случаях существует одна гиперплоскость разрыва $x_1 = 0$ и выпуклая оболочка предельных значений суть отрезок $F(t,x)$, соединяющий векторы $F^+ = Ax + b + c$ и $F^- = Ax - b - c$. Но пусть функции u_1 и u_2 имеют смысл управлений и в физической системе реализуются с помощью различных реле, а при $x_1 = 0$ могут принимать любые значения из отрезка $[-1, 1]$. Вследствие не идеальности реле равенство $u_1 = u_2$ не выполняется строго в каждый момент времени и функции $u_1 = \mathrm{sign}_1 x_1$, $u_2 = \mathrm{sign}_2 x_1$ следует считать различными. Тогда множество $F_2(t,x)$ существенно шире множество $F(t,x)$ (если векторы a и b не одинаково направлены). Отметим, что оба этих подхода находят свою область применимости.

2.4. Еще раз о понятии решения

Основной вопрос теории разрывных систем в установлении такого понятия решения, что:

1. Решение должно учитывать физический смысл задачи;

2. Решение должно переходить в обычное классическое определение для непрерывных систем;

3. Решение должно быть содержательным (т.е. должны иметь место аналоги основных фактов общей и качественной теории дифференциальных уравнений).

4. Решение должно быть определено на пересечении поверхностей разрывов правых частей системы.

Описание правых частей уравнений по Филиппову и по Айзерману-Пятницкому в точках разрыва различны и в общем случае не совпадают. Но их общее свойство — выпуклость возникает не формально из метода построения и обусловлена не столько природой исследуемых систем, сколько требованиями математического характера, состоящих в самом существование решения и в возможности осуществлять предельные переходы на последовательностях приближенных и точных (если они определены) решений. Иными словами, предел равномерно сходящейся последовательности приближенных или точных решений должен быть решением. Это свойство используется при обосновании правомерности введенного определения решения для описания реальных процессов, при исследовании зависимости решений от начальных состояний и параметров системы и ряда других вопросов общей теории разрывных систем. В то же время для производной $\dot{x}(t)$ предела сходящейся последовательности абсолютно непрерывных решений или приближенных решений $x_n(t)$ можно утверждать лишь то, что $\dot{x}(t)$ в почти каждой точке t принадлежит выпуклой оболочке замкнутого множества G, которому почти всюду принадлежат значения $\dot{x}_n(t)$ Это свойство вытекает из теоремы о среднем для интеграла Лебега. На среднее интегральное значение производной $\dot{x}(t)$ указывается и в работах различных авторов в той или иной степени общности. Точно можно утверждать следующее: если последовательность $\dot{x}_n(t)$ интегрально ограничена, то $\dot{x}(t) \in G(t) = \{\cap G_n(t) : n = 1, 2, \ldots\}$ почти всюду, где $G_n(t)$ для каждого n — наименьшее выпуклое, замкнутое множество, содержащее множество $\{\cup \dot{x}_k(t) : k = n, n+1, \ldots\}$. Чего-либо большего из самого факта сходимости последовательности $x_n(t)$, по-видимому, не вытекает. Вне поверхностей разрыва множество $G(t)$ состоит из одной точки — правой части уравнения и решения определены в обычном смысле.

Развитие общей и качественной теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью связано с решением тех же задач, что в теории дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью. Но при этом, разумеется, у этих задач возникает своя специфика и особенности. Отметим некоторые из них.

Прежде всего укажем на то, что при возможных скачкообразных изменениях поля направлений движения разрывных систем они не имеют, вообще говоря, классических решений $x(t)$ с непрерывной производной $\dot{x}(t)$. Так возникает задача изучения тех или иных классов решений. Наиболее общими среди абсолютно непрерывных решений являются решения Каратеодори с измеримой производной, удовлетворяющей соответствующему дифференциальному включению почти всюду. Их существование вытекает из теории дифференциальных включений с полунепрерывной сверху выпуклой правой частью. В тоже время можно надеяться и на существовании более точных решений, таких как правосторонние решения. В механике правосторонние решения описывают движения механических систем с сухим трением и поэтому имеют реальный физический смысл. Этот класс решений изучался в работах В.М. Матросова, И.А. Финогенко [6].

Классификация и сравнительный анализ различных типов решений имеется в монографии В.М. Матросова [7]. Там решения дифференциальных уравнений с разрывной правой частью подразделяются также на различные типы квазирешений и обобщенных решений. Под обобщенными решениями понимаются, как правило, решения некоторых дифференциальных включений, тем или иным способом построенных по функции $f(t,x)$. В частности, решения в смысле Филиппова или Айзермана-Пятницкого являются обобщенными решениями.

Связь между разрывными системами и дифференциальными включениями (уравнениями в контингенциях) рассматривалась еще в тридцатые годы прошлого столетия в работах А. Маршо и С.К. Зарембы и нашла свое отражение в упомянутой выше дискуссии на на 1-ом когрессе ИФАК. Понятие квазирешения было введено в работах Т. Важевского, как равномерного на некотором отрезке предела $x(t)$ последовательности абсолютно непрерывных функций $x_n(t)$, таких, что $\|x_n(t) - f(t, x_n(t))\| \to 0$ почти всюду при $n \to +\infty$. При этом производная предельной функции удовлетворяет некоторому дифференциальному включению с выпуклой правой частью и поэтому квазирешения (если они существуют) являются также обобщенными решениями. Легко привести примеры задач, для которых квазирешения не существует.

Так или иначе, качественное исследование разрывных систем становится рациональным, когда их правые части заданы всюду в рассматриваемой области, в том числе и в точках разрыва, исходя из специфики изучаемой материальной системы: физических законов или инженерных соображений. В связи с этим В.М. Матросовым был сформулирован *принцип детерминизма*, требующий "применительно к моделям материальных систем в форме дифференциальных уравнений, по крайней мере, локально, существования, правосторонней единственности их решений, корректности проводимой идеализации в смысле близости решений идеализированных и исходных, более полных уравнений “[7, стр. 49].

2.5. Скользящие режимы и метод эквивалентного управления

Как отмечалось выше, для разрывных систем существует особый тип решений — скользящие режимы. Основным методом описания скользящих режимов является метод эквивалентного управления (см. [5]).

Предположим, что функция $f(t, x)$ определена и непрерывна всюду в некоторой области пространства R^{n+1} за исключением точек поверхности S, за данной уравнением $\phi(x) = 0$, где $\phi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция с отличным от нулевого вектора градиентом $\nabla\phi(x)$. Как и ранее через $f^+(t, x)$ и $f^-(t, x)$ обозначаются предельные значения функции f по областям, на которые поверхность S разбивает пространство переменных x. Предположим, что поле направлений системы (1.1) в окрестности поверхности S таково, траектории решений $x(t)$ приближаются к поверхности S с обеих сторон. Тогда при попадании на эту поверхность дальнейшее движение возможно только по S — должен возникнуть скользящий режим. В этом случае вектор производной скользящего режима определяется равенством

$$\dot{x}(t) = f^0(t, x(t)),$$

где $f^0(t, x)$ — точка пересечения касательной плоскости к поверхности S в каждой точке x и отрезка с концами $f^+(t, x)$ и $f^-(t, x)$. Из условий $f^0 = \alpha f^+ + (1-\alpha)f^-$ и $\langle f^0, \nabla\phi\rangle = 0$ находим, что

$$\alpha = \frac{f_N^-}{f_N^- - f_N^+},\ 0 \le \alpha \le 1,$$

где f_N^- и f_N^+ — проекции векторов f^+ иf^- на нормаль к поверхности S. Очевидно, скользящий режим в этом случае является решением по Филиппову и его уравнение определяется явно и однозначно. Это обусловлено тем, что для нахождения значения α имеем одно уравнение.

Теперь будем рассматривать уравнение (2.2). Пусть (t, x) принадлежит одновременно поверхностям $S_1, \ldots, S_r$, $1 \le r \le m$. Задача состоит в том, чтобы подобрать значения $u_i^{eq}(t, x) \in U_i(t, x)$ так, чтобы решение оставалось на этих поверхностях при $t' \ge t$. Для этого необходимо, чтобы вектор производной удовлетворял равенствам:

$$\langle \nabla_x \varphi_i(t, x), \dot{x}\rangle + \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = 0$$

для всех $i = 1, \ldots, r$. Учитывая, что $\dot{x} = f(t, x, u)$, получаем систему уравнений для определения u_i^{eq}

$$\langle \nabla_x \varphi_i(t, x), f(t, x, u_1^{eq}, \ldots, u_r^{eq}, u_{r+1}, \ldots, u_m)\rangle + \frac{\partial\varphi_i(t, x)}{\partial t} = 0,\ i = 1, \ldots, r.$$

Определение 4. *Функции $u_i^{eq}(t, x)$ называются эквивалентными управлениями и под решением уравнения (2.2) понимается абсолютно непрерывная функция $x(t)$, удовлетворяющая*

$$\dot{x} = f(t, x, u_1^{eq}, \ldots, u_r^{eq}, u_{r+1}, \ldots, u_m)$$

на пересечении поверхностей S_i, $i = 1, \ldots, r$ и уравнению (2.2) вне поверхностей S_i.

Необходимым условием существования такого решения является выполнение условий: $u_i^{eq}(t, x(t)) \in U_i(t, x(t))$ для всех $i = 1, \dots, r$. Если хотя бы одно из таких условий не выполняется, решения в указанном выше смысле не существует, и метод эквивалентного управления „не работает". Эквивалентные управления определяют уравнение скользящего режима и условия его существования неявно. Если скользящий режим существует, то он является решением в смысле Айзермана-Пятницкого.

Отметим, что если функция $f(t, x, u)$ линейна по u и векторы частных производных функций $\varphi_i(t, x)$ в точках пересечения поверхностей S_i линейно независимы, то три описанных выше подхода к определению решения (по Филиппову, по Айзерману-Пятницкому и методом эквивалентного управления) совпадают. Они являются наиболее употребительными в приложениях теории разрывных систем к задачам из различных областей науки и техники.

2.6. Неявная форма дифференциальных уравнений с разрывной правой частью

Будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{2.5}$$

где функция f определена и кусочно-непрерывна по совокупности переменных (t, x) всюду в некоторой области Ω из пространства R^{n+1} за исключением множеств $M_i = \{(t, x) \in \Omega : \phi_i(x) = 0\}$, $i = 1, \dots, m$, где $\phi_i(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Решение уравнения (2.5) понимается в смысле Филиппова.

Обозначим $I(x) = \{i \in (1, \dots, m) : \phi_i(x) = 0\}$ и предположим, что в каждой точке x градиенты $\nabla\phi_j(x)$ функций $\phi_j(x)$ с индексами из множества $I(x)$ линейно независимы.

Для произвольного вектора $z \in R^n$ обозначим $p_i(x, z) = \langle \nabla\phi_i(x), z \rangle$. Если $p_i(x, z) \neq 0$ для всех $i \in I(x)$, то через $\tilde{f}(t, x; z)$ обозначим предел функции $f(t, x + hz)$ при $h \to +0$. Определение $\tilde{f}(t, x; z)$ корректно для любой точки $(t, x) \in \Omega$, так как легко видеть: если для всех $i \in I(x)$ выполняется $p_i(x, z) \neq 0$, то значения $\phi_i(x + hz) \neq 0$ и имеют знаки, совпадающие со знаками $p_i(x, z)$ для всех достаточно малых $h > 0$. Для оставшихся индексов i таких, что $\phi_i(x) \neq 0$ также выполняется неравенство $\phi(x + hz) \neq 0$ при малых h. Следовательно, точки $(t, x + hz)$ принадлежат лишь одной из областей непрерывности функции f и предел $\tilde{f}(t, x; z)$ существует.

Если (t, x) — точка непрерывности функции f, то $\tilde{f}(t, x; z) = f(t, x)$ для любого вектора $z \in R^n$. В каждой фиксированной точке $(t, x) \in \Omega$ для любого вектора $z \in R^n$ определим множество $\tilde{F}(t, x; z)$, как выпуклую оболочку предельных значений отображения $z' \to \tilde{f}(t, x; z')$ при условии, что $z' \to z$ и z не принадлежит пересечению касательных подпространств к поверхностям S_i в точке x при условии $i \in I(x)$. Легко видеть, что всегда $\tilde{F}(t,x;z) \subset F(t,x)$ и $\tilde{F}(t,x;0) = F(t,x)$.

Многозначное отображение $z \to \tilde{F}(t,x;z)$ имеет замкнутый график, принимает выпуклые значения и ограничено. Поэтому из теоремы Какутани о неподвижных точках многозначных отображений вытекает, при любых $(t,x) \in \Omega$ существует решение многозначного уравнения

$$z \in \tilde{F}(t,x;z) \tag{2.6}$$

(неподвижная точка многозначного отображения $z \to \tilde{F}(t,x;z)$). Множество всех решений включения (2.6) обозначим $H(t,x)$.

Теорема 1. *Дифференциальное уравнение (2.5) и неявное дифференциальное включение*

$$\dot{x} \in H(t,x) \tag{2.7}$$

равносильны в том смысле, что множества их решений Каратеодори совпадают.

Отметим, что включение (2.7), может быть записано в виде

$$\dot{x} \in \tilde{F}(t,x;\dot{x}) \tag{2.8}$$

и оно имеет решение Каратеодори. Вопрос об однозначной определенности вектора производной $\dot{x}$ и правой единственности решений будет рассмотрен ниже.

Замечание 1. По отношению к существованию правосторонних решений неявный метод доопределения правой части уравнения (2.5) носит необходимый характер в следующем смысле: если $x(t)$ — правостороннее решение задачи (2.5), то правая производная $D^+x(t)$ в каждой точке t совпадает со значением $z(t,x(t))$ одной из функций $z(t,x) \in H(t,x)$. При этом, если решение включения (2.6) единственно, то вектор правой производной решения определяется однозначно не зависимо от того является это решение скользящим режимом или нет. Таким образом, неявный метод обобщает метод эквивалентного управления.

Однако и в случае когда неявно заданное уравнение (2.7) движения системы всюду определено однозначно, наряду с правосторонним решением для одного и того же начального состояния может существовать еще решение, не являющееся правосторонним. Иллюстрирующий пример возьмем из [1, стр. 89]:

$$\dot{x} = \operatorname{sign} x - 2\operatorname{sign} y,\ \dot{y} = 2\operatorname{sign} x + \operatorname{sign} y \tag{2.9}$$

Неявное доопределение этой системы приводит к однозначно определенным уравнениям, которые для любого начального состояния имеют правостороннее решение. Для начальных данных $x(0) = 0$, $y(0) = 0$

определено правостороннее решение, тождественно равное нулю. Но существует еще решение, траектория которого — ломаная линия в виде раскручивающейся вокруг начала координат спирали. Так как для функции $v = |x(t)| + |y(t)|$ выполняется $\dot{v} \equiv 2$ в силу системы (2.9), то для решения, вышедшего из точки $(0, 0)$ в момент $t = 0$, имем $v(t) = 2t$ при $t \geq 0$. Тогда у этого решения для последовательности $t_k \to +0$ такой, что $x(t_k) > 0$ и $y(t_k) = 0$ существует $\lim x(t_k)/t_k = 2$, а для последовательности $t'_k \to +0$ такой, что $x(t'_k) < 0$ и $y(t'_k) = 0$ существует $\lim x(t'_k)/t'_k = -2$. Следовательно, правая контингенция этого решения при $t = 0$ содержит, по крайней мере, две различные точки: $(2, 0)$ и $(-2, 0)$ и поэтому правой производной при $t = 0$ не существует.

3. Однозначное доопределение уравнений и правосторонняя единственность решений

Рассмотрим следующее неравенство

$$(\tilde{f}(t, x; z^1) - \tilde{f}(t, x; z^2))A(t, x)(z^1 - z^2)^T \leq 0 \tag{3.1}$$

для любых z^1, $z^2 \in R^n$ таких, что $\langle \nabla\phi_i(x), z^1\rangle \neq 0$, $\langle \nabla\phi_i(x), z^2\rangle \neq 0$ для всех $i \in I(x)$, где $A(t, x)$ — симметричная, положительно определенная матрица, "T— знак транспонирования.

Теорема 2. *Пусть выполняется неравенство (3.1). Тогда решение $z = m(F(t, x))$ многозначного уравнения (2.6) единственно и положительно определенная квадратичная форма $w(z) = zA(t, x)z^T$ при $z = m(F(t, x))$ достигает своего минимального значения на выпуклом, компактном множестве $F(t, x)$ из правой части (2.1). В частности, если $A(t, x)$ — единичная матрица, то $m(F(t, x))$ — ближайшая к началу координат точка множества $F(t, x)$.*

В условиях теоремы 2 решение дифференциального уравнения (1.1) определяется, как решение уравнения $\dot{x} = m(F(t, x))$ и называется медленным. Отметим, что неравенство (3.1) не обеспечивает правую единственность решений. Это видно хотя бы из того, что неравенство (3.1) тривиально выполняется для любой непрерывной функции $f(t, x)$. Как известно, непрерывности функции $f(t, x)$ не достаточно для единственности решений обыкновенного дифференциального уравнения.

3.1. Правосторонняя единственность решений

Как правило, решения дифференциальных включений не обладают свойством единственности, но могут быть единственными справа, т.е. при возрастании t сливаться. Для изучения правой единственности решений в [1, стр. 82]) используется условие правой липшицевости. Рассмотрим некоторую модификацию этого условия, а именно:

У с л о в и е A: *для каждой точки* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *существуют числа* $\delta = \delta(t_0, x_0) > 0$ *и* $l = l(t_0, x_0) > 0$ *такие, что для любых точек* (t, x), (t, y) *из областей непрерывности функции* f *(возможно разных областей для различных точек* (t, x), (t, y)*), удовлетворяющих* $x, y \in U_\delta(x_0)$, *и любого* $t \in [t_0, t_0 + \delta)$, *выполняется неравенство*

$$(f(t,x) - f(t,y))A(t,x)(x-y)^T \leq l\|x-y\|^2, \tag{3.2}$$

где $A(t,x) = [a_{ij}(t,x)]_{i,j=1}^n$ *— некоторая симметричная положительно определенная и непрерывно дифференцируемая матрица (т.е. все* $a_{ij}(t,x)$ *— непрерывно дифференцируемые функции),* $U_\delta(x_0) = \{x : \|x - x_0\| < \delta\}$ *—* δ*-окрестность точки* x_0*,* $\|\cdot\|$ *— евклидова норма.*

Теорема 3. *Пусть* f *— кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условию* $\mathcal{A}$*. Тогда для любой точки* (t_0, x_0) *найдется промежуток* $[t_0, t_0 + \delta)$*, на котором любые два решения уравнения (2.5) с начальными данными* (t_0, x_0) *совпадают.*

Условие A обеспечивает также однозначную определенность неявных форм записи уравнения (2.5) Действительно, из условия A вытекает (3.1). Чтобы убедится в этом, следует в неравенстве (3.2) x заменить на $x + hz^1$, y — на $x + hz^2$, поделить обе части неравенства на $h > 0$ и затем перейти к пределу при $h \to 0$. Более того, при выполнении условия A существуют непрерывные аппроксимации Иосиды разрывных систем и любое решение Каратеодори является правосторонним [9], [10].

4. Заключение

К настоящему времени теория дифференциальных уравнений с разрывной правой частью хорошо развита, как самостоятельное направление теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ее основные результаты и методы опираются на теорию дифференциальных включений с полунепрерывной сверху выпуклой правой частью. Очень большое число публикаций посвящено приложениям этой теории. На этом пути выделяются и исследуются достаточно широкие классы разрывных систем с определенной структурой, так как этим определяются многие специфические свойства решений, в частности, для систем со множеством неизолированных положений равновесия (см., например, [8]). Это характерно для механических систем с сухим трением. Менее изучены системы, в которых одновременно присутствуют разрывные управления (обратные связи) и неуправляемые разрывные характеристики (сухое трение, многозначные возмущения). Весьма содержательным классом являются разрывные системы с правосторонними условиями Липшица. Для них оказалось возможным однозначное доопределение правых частей в точках разрыва неявным образом, доказательство существования правосторонних решений и непрерывных аппроксимаций по типу аппроксимаций Иосиды для монотонных многозначных операторов, также получать оценки конструктивные оценки для решений исходных и аппроксимирующих систем. Не достаточно исследованы до сих пор разрывные системы с обобщенными функциями в правой части. Например, если поверхности разрыва задаются уравнениями $\phi_i(t, x) = 0$ с разрывными по t функциями ϕ_i, то скользящие режимы могут реализоваться только на разрывных траекториях, что требует импульсных воздействий на систему.

По вопросам общей и качественной теории заинтересованный читатель может обратиться к монографиям [1], [5] и статьям [4], которые использовались при написании данной работы. Разделы 2.6 и 3 основаны на оригинальных результатах автора [9], [10].

Список литературы

1. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / Филиппов А.Ф. – М.: Наука. Физматлит, 1985. – 224 с.
2. Painleve, P. Lecons sur le frottement / Painleve P. – Pariis: Hermann, 1895. – 111. Русс. яз.: Пэнлеве П. Лекции о трении. Пэнлеве П. – М.: Гостехиздат, 1954. – 316 с.
3. Дискуссия по докладу А.Ф. Филиппова / Труды I Международного конгресса ИФАК. Т.1. – М.: Изд-во АН СССР, 1961.
4. 4. Айзерман, М.А. Основы теории разрывных систем. I, II / Айзерман М.А., Пятницкий Е.С. // Автоматика и телемеханика. – 1974. № 7. – С. 33–47; № 8. – С. 39–61.
5. Уткин, В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления / Уткин В.И. – М.:Наука. Физматлит, 1981. – 367 с.
6. Матросов, В.М. Аналитическая динамика систем твердых тел с трением / Матросов В.М., Финогенко И.А. // В кн.: Нелинейная механика. – М.: Физматлит, 2001. – С. 39–61.
7. Матросов, В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамтических свойств нелинейных систем / Матросов В.М. – М.: Физматлит, 2001. – 380 с.
8. Гелиг, А.Х. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия / Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. – М.: Наука. Физматлит, 1978. – 400 с.
9. Финогенко, И.А. Об условии правой липшивости для дифференциальных уравнений с кусочно непрерывными правыми частями / Финогенко И.А. // Дифференциальные уравнения. – 2003. Т.39, № 8. – С. 1068–1075.
10. Финогенко, И.А. О непрерывных аппроксимациях и правосторонних решениях дифференциальных уравнений с кусочно непрерывными правыми частями / Финогенко И.А. Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т.41. №5. – С. 647–655.

I. A. Finogenko
On differential equations with discontinuous right hand part

Abstract. In the article the brief review of the basic concepts, methods and problems of the theory of the differential equations with an discontinuous right hand parts is resulted. Various ways of definitions for the right hand parts in points of discontinuous and implicit forms of record for such equations are analyzed.
Keywords: discontinuous system; differential inclusion; the generalized solution; quasi-solution; a sliding mode; right-hand Lipschitz condition.

Иван Анатольевич Финогенко, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952) 45-30-51, (fin@icc.ru)
Ivan Finogenko, head of laboratory, Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontov Str., 664033. Phone: (3952)453051 (fin@icc.ru)