Серия «Математика»
Том 1 (2007), № 1, С. 86—92

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.956

О разрешимости некоторых граничных задач для систем, вырождающихся внутри области эллиптичности или на ее границе

Е. А. Головко (golovko_i@mail.ru)
ИМЭИ ИГУ, г.Иркутск

Г. А. Тренёва
ИрГТУ, г.Иркутск

Аннотация. В работе рассматриваются видоизмененные задачи Дирихле для систем, вырождающихся внутри области или на её границе. Доказаны теоремы о разрешимости этих задач.

Ключевые слова: эллиптические системы, видоизмененная задача Дирихле.

Введение

Для одного эллиптического уравнения в частных производных второго порядка в достаточно малой области с гладкой границей задача Дирихле с любыми непрерывными граничными данными всегда разрешима и ее решение единственно. Аналогичные факты имеют место и для сильно эллиптических систем уравнений второго порядка. Для эллиптических систем уравнений, не удовлетворяющих условию сильной эллиптичности, наблюдается другая ситуация [1]. В настоящее время системы с многими независимыми переменными, не удовлетворяющие условию сильной эллиптичности ещё недостаточно изучены. Для таких систем в работах авторов [2, 3, 4] рассмотрены классические граничные задачи (Дирихле и Неймана). В настоящей работе рассмотрен ряд граничных задач для многомерных систем, вырождающихся внутри области эллиптичности или на её границе.

1. Видоизменённая задача Дирихле для системы, вырождающейся на границе области эллиптичности

Рассмотрим систему

$$\Delta u_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[f(x_1,...,x_n)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right],\ \ j=\overline{1,n}. \tag{1.1}$$

Обозначим

$$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Продифференцируем j-е уравнение системы (1.1) по x_j

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta u_j = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left[f(x_1,...,x_n)H\right],\ \ j=\overline{1,n},$$

и просуммируем полученные результаты

$$\Delta H=\Delta[fH]$$

или

$$\Delta[(f-1)H]=0 \tag{1.2}$$

Будем рассматривать систему (1.1) в области D с гладкой границей Γ, в которой $f(x_1,...,x_n)<1$, а на всей границе $f|_\Gamma=1$ происходит вырождение.

Постановка видоизмененной задачи Дирихле: найти регулярное в D, непрерывно дифференцируемое в $D\bigcup\Gamma$ решение системы (1.1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u_i\,|_\Gamma=g_i, i=\overline{1,n-1}, \tag{1.3}$$

$$(f-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,|_\Gamma=0. \tag{1.4}$$

Известно. что гармоническая функция $(f-1)H$, определенная и непрерывная в $D\bigcup\Gamma$, достигает своего максимального и минимального значения на границе Γ. В силу условия (1.4) $(f-1)H\equiv 0$ в D. Но $f-1=0$ только на Γ, следовательно, $H\equiv 0$ в D. Тогда система (1.1) примет вид

$$\Delta u_j=0, j=\overline{1,n}. \tag{1.5}$$

Из граничных условий (1.3) $n-1$ компонента u_i решения задачи определяется единственным образом как решение задачи Дирихле для уравнений Лапласа (1.5). Для нахождения u_n имеем два уравнения

$$\Delta u_n=0,\quad \frac{\partial u_n}{\partial x_n}=-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=\varphi,$$

которые рассматриваем в области D. Проинтегрировав последнее уравнение по x_n:

$$u_n = \int_0^{x_n} \varphi dx_n + \varphi(x_1, ..., x_{n-1})$$

и подставив результат интегрирования в уравнение $\Delta u_n = 0$, получим

$$\Delta u_n = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + \int_0^{x_n} \Delta' \varphi dx_n + \Delta' \psi,$$

где

$$\Delta' = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

Из соотношения

$$\Delta u_n = \Delta' \psi + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} - \int_0^{x_n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2} dx_n + \int_0^{x_n} \Delta \varphi dx_n =$$

$$= \Delta' \psi + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \Big|_{x_n=0} + \int_0^{x_n} \Delta \varphi dx_n$$

с учетом равенства

$$\Delta \varphi = -\Delta \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta u_i = 0$$

получим

$$\Delta u_n = \Delta' \psi + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \Big|_{x_n=0} = 0 \; .$$

Следовательно, функция $\psi(x_1, ..., x_{n-1})$ определяется из уравнения Пуассона

$$\Delta' \psi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \Big|_{x_n=0} \; . \tag{1.6}$$

Теорема 1. *Видоизмененная задача Дирихле (1.3)-(1.4) для системы (1.1) в области D разрешима, $n-1$ компонента ее решения определяется единственным образом, а u_n — с точностью до регулярной в D функции $\psi(x_1, ..., x_{n-1})$, являющейся решением уравнения (1.6).*

Замечание 1. Утверждение теоремы 1 не меняется, если $f(x_1, ..., x_n) = 1$ на замкнутой линии, ограничивающей подобласть в D, так как гармоническая в подобласти функция продолжается нулем.

2. Видоизменённая задача Дирихле для системы, вырождающейся внутри области эллиптичности

Рассмотрим теперь случай, когда вырождение происходит не на всей границе Γ , а в одной или нескольких точках внутри области D.

Пусть $f(x_1, x_2) = 1$ в точке $(0, 0)$, например $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + 1$. Тогда для уравнения (1.2) задача Дирихле с граничным условием

$$(f(x_1, x_2) - 1)H\,|_\Gamma = g_2(x_1, x_2) \in C^1(\Gamma) \tag{2.1}$$

имеет решение

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2}H = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma g_2 \frac{\partial G}{\partial n} dS,$$

обращающееся в нуль в точке $(0, 0)$. Здесь G — функция Грина на плоскости

$$G = w - \ln\frac{1}{r}, \;\; G\,|_\Gamma\, = 0$$

а w - гармоническая в D функция, совпадающая с $f(x_1, x_2)H$ на границе Γ.

В частности, если область D является кругом $\{x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$, получим интеграл Пуассона

$$(f(x_1, x_2) - 1)H = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{g_2(\psi)(R^2 - \rho^2)d\psi}{\rho^2 - 2R\rho\cos(\varphi - \psi) + R^2}, \tag{2.2}$$

где $x_1 = \rho\cos\varphi$, $x_2 = \rho\sin\varphi$. Вычтем из него нулевое выражение

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} g_2(\psi)d\psi = 0 :$$

$$\rho H = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{-\rho^2 + R\rho\cos(\varphi - \psi)}{\rho^2 - 2R\rho\cos(\varphi - \psi) + R^2} g_2(\psi)d\psi.$$

Поделив на ρ, получим

$$H = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{R\cos(\varphi - \psi) - \rho}{\rho^2 - 2R\rho\cos(\varphi - \psi) + R^2} g_2(\psi)d\psi. \tag{2.3}$$

По известной ненулевой функции H функция u_1 определяется единственным образом как решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}(fH),$$

$$u_1|_{\Gamma} = g_1(x_1, x_2) \in C^2(\Gamma), \tag{2.4}$$

u_2 — с точностью до константы как решение задачи о наклонной производной

$$\Delta u_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}(fH), \ \ \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big|_{\Gamma} = H - \frac{\partial u_1}{\partial x_1},$$

а $g_2(x_1, x_2)$ в круге $\{x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$ должна удовлетворять дополнительному условию(2.3).

Теорема 2. *При $n = 2$ для системы (1.1) видоизмененная задача Дирихле с граничными условиями (2.1) и (2.4) в области D , ограниченной Γ, является фредгольмовой. Функция g_2 из условия (2.1) должна удовлетворять k условиям ортогональности, где k - количество точек, в которых $f(x_1, x_2) = 1$.*

Пусть теперь вырождение происходит на прямой $f = x_1 + b$. Тогда при вычитании из интеграла Пуассона (2.2) нулевого выражения

$$(x_1 + b - 1)H\Bigg|_{x_1 = 1-b} = 0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{g_2(\psi)(R^2 - \rho^2)d\psi}{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2},$$

где $x_1^0 = R\cos\psi, x_2^0 = R\sin\psi, x_1 = \rho\cos\psi, x_2 = \rho\sin\psi$, получим интегральное выражение с зависимосью от параметра b:

$$H(\rho, \varphi, b) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{g_2(\psi)(R^2 - \rho^2)}{(\rho^2 - 2R\rho\cos(\varphi - \psi) + R^2)} \times$$

$$\times \frac{(b - 1 - \rho\cos\varphi)d\psi}{(b-1)^2 + \rho^2\sin^2\varphi - 2R\rho\cos(\varphi - \psi) + R^2} \tag{2.5}$$

Теорема 3. *Задача (1.1), (2.1), (2.4) разрешима в круге D. Функция u_1 определяется однозначно, u_2 — с точностью до константы, а функция g_2 из условия (2.1) должна удовлетворять интегральному условию (2.5)с зависимостью от параметра b.*

Замечание 2. Теорема 3 допускает обобщение для произвольной ограниченной области D и на случай n переменных.

3. Задача Дирихле для эллиптической системы, вырождающейся в нуле

Рассмотрим теперь задачу Дирихле в обычной постановке для системы с более сильным вырождением. Пусть в системе (1.1)

$$f(x_1, ..., x_n) = r^k(X) + 1, \ r(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{3.1}$$

Будем рассматривать задачу Дирихле для такой системы в произвольной области D с гладкой грницей Γ с граничными условиями

$$u_j\,|_\Gamma = f_j \in C^1(\Gamma),\ j = \overline{1,n} \tag{3.2}$$

Выразим гармоническую функцию $r^k H$ формулой Пуассона через ее граничные значения $f(Y) = r^k(Y)H(Y),\ Y \in \Gamma$:

$$r^k(X)H(X) = \int\limits_\Gamma P(X,Y)f(Y)d_y\sigma. \tag{3.3}$$

Разложим ядро интеграла Пуассона (3.3) в ряд по однородным гармоническим многочленам. Получим конечное число условий ортогональности, которым должна удовлетворять функция $f(Y)$:

$$\int\limits_\Gamma Q_{1-k}(X,Y)f(Y)d_y\sigma = 0. \tag{3.4}$$

В частности, при $n = 3$ если область D является шаром радиуса R, получим $\sum\limits_{\nu=1}^{k-1}(2\nu+1) = k^2 - 1$ условие для функции

$$Q_{1-k} = \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{\rho^{\nu-k}}{R^\nu} \left(P_\nu(\cos\beta)P_\nu(\cos\beta') + \right.$$
$$\left. + 2\sum_{h=1}^{\nu} \frac{(\nu-h)!}{(\nu+h)!} \cos h(\varphi-\varphi')P_{\nu,h}(\cos\beta)P_{\nu,h}(\cos\beta')\right)$$

Задача сводится к уравнению Фредгольма при выполнении условий (3.4).

Теорема 4. *Задача Дирихле (3.2) для системы (1.1), где функция f определяется по формуле (3.1), в области D, на границе Γ которой $r^k(X) \neq 1$, является нетеровой.*

Список литературы

1. *Янушаускас А.И.* Граничные задачи для эллиптических уравнений в частных производных и интего-дифференциальные уравнения. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та,1997. — 168 с.
2. *Головко Е.А.* О задаче Дирихле для эллиптической системы в полупространстве // Четвертый сибирский конгресс по прикладной и индустриальной матеметики. Тезисы докладов /. — Новосибирск: Изд-во новосиб. ун-та, 2000. — С. 51.

3. *Исаева Г.А.* Задаче Дирихле для одной эллиптической системы, вырождающейся на границе полупространства // Четвертый сибирский конгресс по прикладной и индустриальной матеметики. Тезисы докладов /. — Новосибирск: Изд-во новосиб. ун-та, 2000. — С. 60.
4. *Головко Е.А., Исаева Г.А.* Об классе многомерных эллиптических систем с младшими членами // IV Всесибирский конгресс женщин-математиков: Материалы конф. — Красноярск: РИО СибГТУ, 2006. — С. 45–47.

E. A. Golovko, G. A. Treneva

On the solvability of some boundary value problems for the degenerated systems inside or on the boundary of the elliptic range

Abstract. In this paper the modified Dirichlet problems for degenerated systems inside of the elliptic range or on its boundary are investigated. The theorems of solvability of these problems are proved