



Серия «Математика»
Том 1 (2007), № 1, С. 52–61

Онлайн-доступ к журналу:
<http://isu.ru/izvestia>

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.958 / 517.977

Аналитическое решение одного класса вариационных задач аэродинамики больших скоростей *

М. А. Аргучинцева (marguch@math.isu.ru)
Иркутский государственный университет, Иркутск

Аннотация. В данной статье исследован класс вариационных задач нахождения поперечных контуров трехмерных тел, минимизирующих нагрев поверхности и сопротивление тела.

Ключевые слова: вариационное исчисление, оптимальное аэродинамическое проектирование.

Введение

В последнее время наряду с улучшением традиционных конфигураций, таких как осесимметричные тела и плоские крылья, ведется поиск новых трехмерных форм тел, обладающих оптимальными аэродинамическими и теплофизическими характеристиками. Из теоретических и экспериментальных исследований известно, что тела с некруговыми поперечными сечениями могут иметь меньшее сопротивление по сравнению с эквивалентными телами вращения [1]. Аналогичные результаты имеют место и при оптимизации форм тел по тепловому потоку [2].

Цель данной работы заключается в постановке и аналитическом исследовании одного класса вариационных задач нахождения поперечных контуров трехмерных тел, минимизирующих нагрев поверхности и сопротивление тела.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00187).

1. Постановка задачи

Рассмотрим гиперзвуковое движение трехмерного тела в цилиндрической системе координат (r, θ, z) с началом в вершине тела и осью Oz , направленной противоположно поступательному движению набегающего потока газа; θ – угол, образованный r с плоскостью Oxz декартовой системы координат. Ограничимся исследованием класса поверхностей, обладающих свойством гомотетии. Тогда каждое поперечное сечение тела, перпендикулярное оси Oz , должно быть геометрически подобно донному сечению тела. Поверхности таких тел описываются уравнением: $f(r, \theta, z) = r - \varphi(z)\rho(\theta) = 0$, где функции $\varphi(z)$, $\rho(\theta)$ определяют соответственно продольный и поперечный контуры тела. Поперечный контур тела $\rho(\theta)$ должен удовлетворять условию замкнутости контура

$$\rho(0) = \rho(2\pi) \quad (1)$$

и изопериметрическому ограничению на заданную площадь донного сечения S_B

$$J_V(\rho) = \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta = S_{B*}, \quad S_{B*} = \frac{2S_B}{L^2}, \quad (2)$$

где L – заданная длина тела.

В классе тонких тел с заданным продольным контуром тела $\varphi(z)$ выражения для коэффициентов волнового сопротивления C_D [1] и нагрева поверхности C_H [2, 3] можно записать в виде, зависящем только от поперечного контура тела $\rho(\theta)$:

$$C_D(\rho) = k_D J_D(\rho), \quad J_D(\rho) = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^6(\theta) d\theta}{[\dot{\rho}^2(\theta) + \rho^2(\theta)]}, \quad (3)$$

$$C_H(\rho) = k_H J_H(\rho), \quad J_H(\rho) = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^{2m}(\theta) d\theta}{[\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)]^{\frac{m-1}{2}}}, \quad (4)$$

$$k_D = L^{-2} \int_0^L \varphi(z) \dot{\varphi}^3(z) dz = const, \quad k_H = L^{-2} \int_0^L \varphi(z) \dot{\varphi}^m(z) dz = const.$$

Отметим, что подобные зависимости для коэффициента нагрева тела C_H (при соответствующих значениях $m \in [2, 10]$ и ограничениях на параметры гиперзвукового обтекания трехмерных тел) имеют место в ряде частных случаев теплообмена: для радиационных и конвективных тепловых потоков, при обтекании тел разреженным газом, а также при воздействии интенсивного лазерного излучения на обтекаемое тело [2].

Рассмотрим следующий класс оптимизационных задач: среди кусочно-гладких функций $\rho(\theta)$, удовлетворяющих ограничениям (1), найти ту, которая минимизирует обобщенный функционал

$$J(\rho) = \int_0^{2\pi} F(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \rho, \dot{\rho}) d\theta; \quad (5)$$

$$F(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \rho, \dot{\rho}) = \mu_1 \frac{\rho^{2m}(\theta)}{[\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)]^{(m-1)/2}} + \mu_2 \frac{\rho^6(\theta)}{\rho^2(\theta) + \dot{\rho}^2(\theta)} + \mu_3 \rho^2(\theta).$$

Функционал (5) в качестве слагаемых содержит функционалы сопротивления (3) и нагрева тела (4), а также изопериметрическое ограничение (2). В зависимости от конкретной физической постановки задачи смысл постоянных множителей μ_1, μ_2, μ_3 может меняться.

Используя принцип взаимности изопериметрических вариационных задач, можно поставить ряд задач, исследование которых приводит к минимизации обобщенного функционала (5).

А. Требуется найти поперечный контур тела $\rho(\theta)$, который минимизирует функционал нагрева (4) и удовлетворяет условиям (1), (2), а также ограничению на предельно допустимое значение сопротивления C_{D*} : $C_D \leq C_{D*}$. В этом случае $\mu_1 = 1$, а μ_2, μ_3 имеют смысл множителей Лагранжа. Решение данной задачи приведено в работе автора [2].

Б. Требуется найти поперечный контур тела $\rho(\theta)$, который минимизирует функционал сопротивления (3) и удовлетворяет условиям (1), (2), а также ограничению на предельно допустимое значение нагрева C_{H*} : $C_H \leq C_{H*}$. В этом случае $\mu_2 = 1$, а μ_1, μ_3 имеют смысл множителей Лагранжа.

В. Требуется найти поперечный контур тела $\rho(\theta)$, который минимизирует сразу два критерия – сопротивление тела (3) и его нагрев (4) и удовлетворяет условиям (1), (2).

Данная задача относится к многокритериальным вариационным задачам, для исследования которых можно использовать методы Парето и идеальной точки [4]. В методе Парето μ_1, μ_2 имеют смысл множителей Парето, а μ_3 – множитель Лагранжа.

В методе идеальной точки исходная многокритериальная задача сводится к однокритериальной с неаддитивным целевым функционалом

$$I = [k_D J_D(\rho) - C_{D*}]^2 + [k_H J_H(\rho) - C_{H*}]^2 \rightarrow \min,$$

где C_{D*}, C_{H*} – решения соответствующих однокритериальных задач о телах минимального сопротивления или минимального нагрева поверхности. С помощью метода Бунимовича-Дубинского [5] исследования неаддитивных вариационных задач, опять приходим к минимизации

функционала (5), где

$$\mu_1 = \left. \frac{\partial I}{\partial J_H} \right|_{\rho=\rho_*(\theta)}, \quad \mu_2 = \left. \frac{\partial I}{\partial J_D} \right|_{\rho=\rho_*(\theta)},$$

$\rho = \rho_*(\theta)$ – экстремаль задачи, а μ_3 – множитель Лагранжа.

Г. Рассмотрим гиперзвуковое движение тела по баллистической траектории. В рассматриваемом диапазоне скоростей гравитационная и центробежная силы малы по сравнению с сопротивлением тела, поэтому в первом приближении ими можно пренебречь. Тогда уравнения баланса сил и энергии могут быть записаны в виде

$$M \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} \tilde{\rho} v^2 C_D S_B, \quad \frac{d\tilde{z}}{dt} = -v \sin \gamma_E, \quad \frac{dH}{dt} = \frac{1}{2} \tilde{\rho} v^3 C_H S_B, \quad (6)$$

где M – масса тела

$$M = k_V J_V(\rho), \quad k_V = \frac{\tilde{\rho}_m L^2}{2} \int_0^L \varphi^2(z) dz = const,$$

$\tilde{\rho}_M$, S_B , v – плотность, площадь донного сечения и скорость тела; $\tilde{\rho}$ – плотность газа на высоте \tilde{z} ; γ_E – угол входа; t – время; H – суммарное количество тепла, поглощаемое поверхностью тела. Уравнения (6) исследуются при начальных условиях: $t = 0$, $v = v_0$, $\tilde{z} = \tilde{z}_0$, $H = 0$.

Целевой функционал задачи строится путем исключения времени из дифференциальных уравнений (6) и интегрирования нагрева тела вдоль траектории движения

$$H = \int_{v_k}^{v_0} \frac{M C_H}{C_D} v dv = k I, \quad I = \frac{J_V(\rho) J_H(\rho)}{J_D(\rho)},$$

$$k = k_V k_H (v_0^2 - v_k^2) / k_D, \quad (7)$$

где v_k – конечная скорость входа.

Приходим к следующей оптимизационной задаче. Требуется найти поперечный контур тела, удовлетворяющий граничному условию $\rho(0) = \rho(2\pi) = \rho_0$, изопериметрическому условию (2) и минимизирующий функционал суммарного нагрева тела вдоль баллистической траектории движения в атмосфере планеты I (7). Согласно методу Бунимовича - Дубинского [5], исходная вариационная задача сводится к минимизации функционала (5) с коэффициентами вида

$$\mu_1 = \left. \frac{\partial I}{\partial J_H} \right|_{\rho=\rho_*(\theta)}, \quad \mu_2 = \left. \frac{\partial I}{\partial J_D} \right|_{\rho=\rho_*(\theta)}, \quad \mu_3 = \left. \frac{\partial I}{\partial J_V} \right|_{\rho=\rho_*(\theta)} + \lambda,$$

где λ – постоянный множитель Лагранжа.

2. Аналитическое решение

Для исследования общей вариационной задачи (1), (5) используется аналитический метод [1, 2, 6]. Решение оптимизационной задачи должно удовлетворять:

1) уравнению Эйлера для целевого функционала (5), которое допускает первый интеграл

$$F - \dot{\rho}F_{\dot{\rho}} = C, \quad C = const; \quad (8)$$

2) условию трансверсальности

$$F_{\dot{\rho}}|_0 = F_{\dot{\rho}}|_{2\pi} = 0, \quad (9)$$

3) условию Лежандра

$$F_{\dot{\rho}\dot{\rho}} \geq 0; \quad (10)$$

4) условию Вейерштрасса-Эрдмана в угловых точках

$$\Delta[F - \dot{\rho}F_{\dot{\rho}}] = \Delta[F_{\dot{\rho}}]\delta\rho = 0,$$

где символ $\Delta[\dots]$ означает разность между значениями до $(-)$ и после $(+)$ угловой точки θ_C . Условие Вейерштрасса-Эрдмана приводит к соотношению

$$\dot{\rho}_+(\theta_C) + \dot{\rho}_-(\theta_C) = 0.$$

Следовательно, существует класс поперечных сечений, составленных из n симметричных циклов, каждый из которых занимает угол $2\pi/n$. Такой контур удовлетворяет условию замкнутости (1).

Ограничимся исследованием только одной дуги экстремали, составляющей половину цикла. Тогда функционал (5) примет следующий вид

$$J(\rho) = 2n \int_0^{\pi/n} F(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \rho, \dot{\rho})d\theta;$$

Особенностью подхода, развитого в работе, является то, что ищутся не только уравнений дуг экстремали функционала, но и число этих дуг. Это приводит к введению дополнительного оптимизирующего условия на число циклов

$$\int_0^{\pi/n} Fd\theta - \frac{\pi}{n}[F]_{\pi/n} = 0. \quad (11)$$

Интегрирование уравнения Эйлера (8) на отрезке $[0, \pi/n]$ с учетом условия трансверсальности (9) в конечных точках $\theta_0 = 0$, $\theta_f = \pi/n$ приводит к соотношению

$$\int_0^{\pi/n} Fd\theta - \int_0^{\pi/n} \Phi d\theta = \int_0^{\pi/n} Cd\theta \equiv \frac{\pi}{n}[F]_{\pi/n}; \quad (12)$$

$$\Phi = \dot{\rho}F_{\dot{\rho}}.$$

Из (11), (12) следуют условия для оптимального контура тела

$$\int_0^{\pi/n} \Phi d\theta = 0, \quad \Phi|_0 = \Phi|_{\pi/n} = 0. \quad (13)$$

Необходимо исследовать случай, когда $\Phi = 0$ в каждой точке отрезка $[0, \pi/n]$. Другой случай (когда функция Φ меняет знак на указанном отрезке) невозможен из-за нарушения уравнения Эйлера (8). Условия (13) приводят к уравнениям

$$\dot{\rho} = 0, \quad (14)$$

$$\Psi = \dot{\rho}^2 + \rho^2 - a^2\rho^4 = 0. \quad (15)$$

Из условия Лежандра (10) следует, что уравнения (14), (15) справедливы соответственно при $\rho \leq \rho_{kr} = 1/a$ и $\rho \geq \rho_{kr}$.

С учетом того, что концевые точки экстремали могут располагаться на кривых (14), (15) произвольным образом, необходимо исследовать три класса тел.

2.1. ТЕЛО КЛАССА I

Рассмотрим случай, когда обе концевые точки лежат на кривой (14):

$$\dot{\rho}|_0 = 0, \quad \dot{\rho}|_{\pi/n} = 0.$$

Тогда оптимальный поперечный контур удовлетворяет уравнению (14), решение которого $\rho = C_1$, $C_1 = const$. Таким образом, оптимальным телом класса I является тело вращения. Соответствующие значения коэффициентов сопротивления (3) и нагрева (4) имеют вид

$$C_H^{min} = 2\pi k_H C_1^{m+1}, \quad C_D^{min} = 2\pi k_D C_1^4.$$

Константа C_1 определяется из заданных условий. Например, в случае заданной площади донного сечения тела (2)

$$C_1 = \sqrt{S_{B^*}/(2\pi)}.$$

2.2. ТЕЛО КЛАССА II

Рассмотрим случай, когда обе концевые точки лежат на кривой (15) $\Psi = 0$:

$$\Psi|_0 = 0, \quad \Psi|_{\pi/n} = 0.$$

Тогда решение уравнения (15)

$$\rho(\theta) = \frac{1}{a \cos(\theta + C_2)}, \quad C_2 = \text{const.}$$

представляет собой сторону звездообразного поперечного контура. Неизвестные параметры a и C_2 определяются из заданных условий задачи:

$$S_{B^*} a^2 = 2n \left(\text{tg} \left(\frac{\pi}{n} + C_2 \right) - \text{tg} C_2 \right),$$

где в задачах:

- А. $a = \sqrt{S_{B^*} k_D / C_{D^*}}$,
- Б. $a = [S_{B^*} k_H / C_{H^*}]^{1/(m-1)}$,
- В. параметр a находится из уравнения

$$a^{2(m-3)} \left(\frac{2k_D}{(m-1)k_H} \right) [k_D S_{B^*} - C_{D^*} a^2] + [k_H S_{B^*} - C_{H^*} a^{m-1}] = 0,$$

- Г. $a = (\rho_0 \cos C_2)^{-1}$.

Рассмотрим условие (11) на число циклов экстремали n . Оно приводит к

$$\left[\frac{\mu_2}{a^2} \left(\frac{m-3}{m-1} \right) + \mu_3 \right] \cdot \left\{ \int_0^{\pi/n} \rho^2(\theta) d\theta - \frac{\pi}{n} \rho^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) \right\} = 0.$$

Выражение в фигурных скобках не может обращаться в нуль из-за нарушения уравнения Эйлера. Тогда

$$\mu_3 = -\frac{\mu_2}{a^2} \left(\frac{m-3}{m-1} \right).$$

Следовательно, условие (11) справедливо для любого числа циклов n . Таким образом, интегралы сопротивления и нагрева не зависят от числа циклов n

$$C_H^{\min} = k_H a^{1-m} S_{B^*}, \quad C_D^{\min} = k_D a^{-2} S_{B^*}. \quad (16)$$

На рис. 1 представлена динамика изменения оптимальных поперечных контуров тел класса II при $m = 5$, $n = 6$ и $S_{B^*} a^2 = \{1 - 2n \text{tg}(\pi/n), 2 - 3n \text{tg}(\pi/n), 3 - 5n \text{tg}(\pi/n)\}$.

2.3. ТЕЛО КЛАССА III

В данном случае экстремаль удовлетворяет условиям:

$$\dot{\rho}|_0 = 0, \quad \Psi|_{\pi/n} = 0.$$

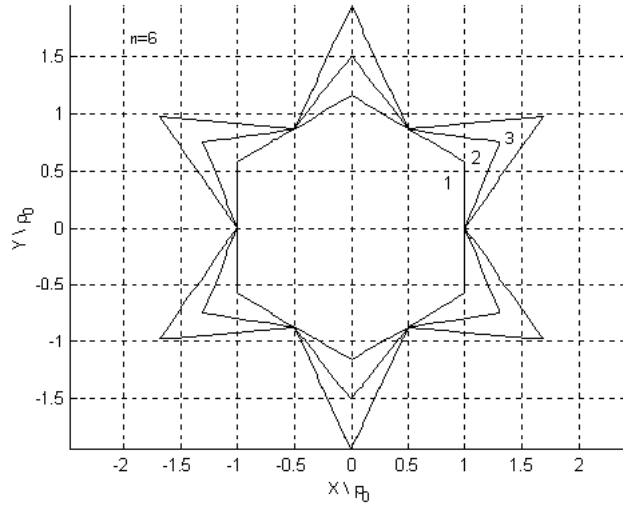


Рис. 1

Следовательно, поперечный контур тел описывается двумя уравнениями (14), (15) и содержит две дуги: часть окружности и прямую, касательную к ней. Аналитически, экстремаль можно представить в виде

$$\rho = \begin{cases} 1/a, & 0 \leq \theta \leq \varepsilon, \\ 1/[a \cos(\theta - \varepsilon)], & \varepsilon \leq \theta \leq \pi/n, \end{cases}$$

где ε угол сопряжения дуг экстремали, определяемый из заданных ограничений задачи:

$$S_{B_*} a^2 = 2n[\varepsilon + \operatorname{tg}(\pi/n - \varepsilon)].$$

Оптимальные поперечные контуры тел класса III для $m = 5$, $n = 3$ и $S_{B_*} a^2 = \{1 - 2\pi, 2 - 1.4n \operatorname{tg}(\pi/n), 3 - 1.7n \operatorname{tg}(\pi/n), 4 - 2n \operatorname{tg}(\pi/n)\}$ представлены на рис. 2.

Выражения для сопротивления и нагрева тел класса III также не зависят от числа циклов n и определяются по формулам (16).

Таким образом, были найдены три класса экстремалей: I. тело вращения ($\rho \leq \rho_{kr}$); II. звездообразное тело ($\rho \geq \rho_{kr}$); III. звездообразное тело круговыми включениями ($\rho \geq \rho_{kr}$). Следует отметить, что тела класса III имеют место при $S_{B_*} a^2 \in [2\pi; 2n \operatorname{tg}(\pi/n)]$, а решения класса II — при $S_{B_*} a^2 \geq 2n \operatorname{tg}(\pi/n)$. Анализ результатов показывает, что данные классы тел имеют два предельных случая: а) круговой поперечный контур при $S_{B_*} a^2 = 2\pi$; б) контур в виде правильного многоугольника при $S_{B_*} a^2 = 2n \operatorname{tg}(\pi/n)$.

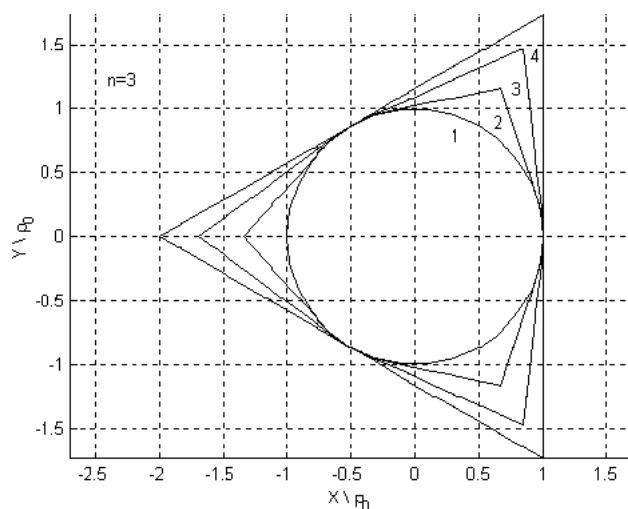


Рис. 2

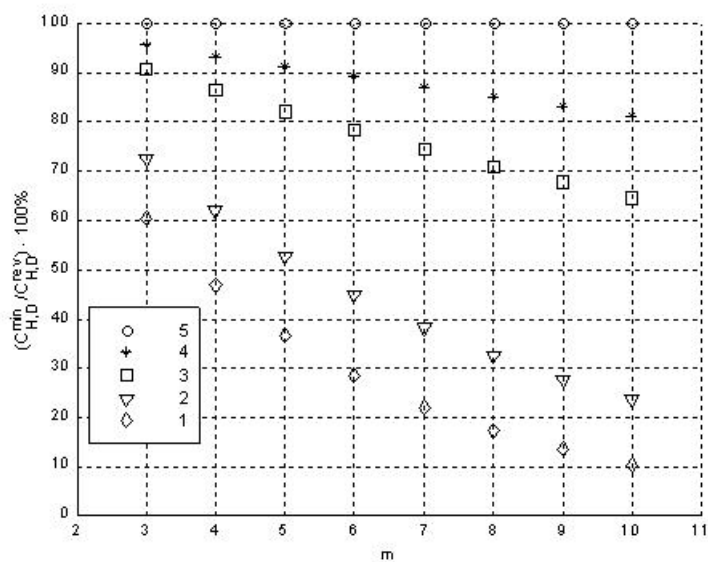


Рис. 3

На рис. 3 представлены отношения сопротивлений $C_D(m = 3)$ и тепловых потоков $C_H(m \neq 3)$ к поперечным контурам оптимальных тел ("min") и тел вращения ("rev"), обладающих такими же длиной $L = 1$ и площадью донного сечения S_B , при различных значениях параметров m и $S_B \cdot a^2 = \{1 - 10.3923, 2 - 8.6603, 3 - 6.9282, 4 - 6.5818, 5 - 2\pi\}$. Использование оптимальных форм тел дает значительное снижение

как сопротивления тела, так и нагрева поверхности по сравнению с эквивалентными телами вращения (до 90% — для класса II; до 70% — для класса III).

Список литературы

1. *Теория оптимальных аэродинамических форм* /Под ред. А.Миеле. — М.: Мир, 1969. — С.306-324.
2. *Аргучинцева М.А., Пиллогин Н.Н.* Оптимизация формы пространственного тела по радиационному тепловому потоку // Теплофизика высоких температур. — 2002. — Т.40, №4. — С.603-616.
3. *Пиллогин Н.Н., Турский Г.А.* Динамика ионизованного излучающего газа. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 305 с.
4. *Ногин В.Д., Протодьяконов И.О., Евлампиев И.И.* Основы теории оптимизации. — М.: Высшая школа, 1986. — 384с.
5. *Бунимович А.И., Дубинский А.В.* Вариационный метод для обобщенного класса функционалов и его применение к задачам аэромеханики // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1973. — №1. — С.15-26.
6. *Васильев В.В.* Тринадцать лекций по основам вариационного исчисления. — Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1989. — 104 с.

M. A. Arguchintseva

Analytical solution for one class of variational problems of hypersonic aerodynamics

Abstract. This paper presents investigation of one class of variational problems of minimization of the drag and heat fluxes to the surfaces of three-dimensional bodies. In a class of slender bodies possessing homothetic property the initial optimization problem may be reduced to the problem of finding optimal transverse contours. The investigation of the problem of determining the optimal transversal contour has shown that there exist the solutions composed of n identical cycles. A distinguishing feature of the suggested approach is that the minimization procedure includes not only a search for each extremal segment but also the number of these segments. This leads to the additional optimizing condition on the number of cycles. Joint integration of the Euler-Lagrange equation and the condition mentioned above has permitted the author to obtain three classes of analytical solutions.