Серия «Математика»
Том 1 (2007), № 1, С. 101—112

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 514.76

Канонический репер изотропной кривой в семимерном псевдооктавном аффинном пространстве

П. Я. Грушко (grushko@math.isu.ru)
Иркутский государственный университет, Иркутск

Н. М. Кузуб (knm1@mail.ru)
Иркутский государственный университет, Иркутск

Аннотация. С помощью компьютерных программ находится оптимальный канонический репер гладкой кривой с изотропными касательными в семимерном псевдооктавном пространстве.

Ключевые слова: гиперкомплексные числа, канонический репер, изотропная кривая

Введение

Почти комплексные структуры исторически были первым примером гладких многообразий над алгебрами. Более сложный и в то же время узкий класс представляют почти кватернионные структуры, что позволяет разрабатывать весьма содержательную теорию. Наиболее глубокие свойства таит в себе класс многообразий, касательные пространства которых снабжены структурами алгебр, изоморфных исключительным алгебрам, таким как октонионы, алгебра Алберта [1] и др. В последние десятилетия они все чаще становятся объектом исследования в математике и смежных дисциплинах с разных точек зрения [2] [3],[4]. В частности, изучались подмногообразия различной размерности в семимерных многообразиях со структурной группой G_2, состоящей из автоморфизмов алгебры Кэли, являющейся простой компактной группой Ли размерности 14 и ранга 2. Наряду с получаемой удвоением обычных кватернионов алгеброй Кэли, в которой все ненулевые элементы обратимы, имеется еще алгебра Кэли-Диксона [5], в которой необратимые элементы образуют изотропный конус, а метрика является псевдоэвклидовой. Геометрия пространств с такой фундаментальной группой весьма своеобразна, что связано с наличием векторного и смешанного произведения, а также вполне изотропных подпространств размерности от 1 до 3.

Целью настоящей работы является построение теории изотропных кривых в плоских семимерных пространствах с указанной геометрией. Изотропность касательных векторов вынуждает искать в качестве натурального параметра нечто отличное от длины дуги исходной кривой, поскольку $\int |\dot{r}(t)|dt$ тождественно равен нулю. Роль фундаментальной группы играет в этом случае особая простая некомпактная группа Ли G_2^n (нормальная форма комплексной группы Ли G_2). Она устроена сложнее компактной формы и для ее всестороннего детального исследования широко применяются компьютерные средства, включая возможности пакета Mathematica и программы, написанные на Delphi.

1. Структурная группа

Рассмотрим унитарную альтернативную восьмимерную алгебру Кэли-Диксона, элементами которой являются гиперкомплексные числа (числа Кэли). Ей соответствует семимерная антикоммутативная алгебра V без единицы, которая в стандартном базисе $\{e_1, \dots, e_7\}$ задается следующей таблицей умножения:

$$\begin{array}{llll}
[e_1,e_2]=e_3, & [e_1,e_3]=-e_2, & [e_1,e_4]=-e_5, & [e_1,e_5]=e_4, \\
[e_1,e_6]=-e_7, & [e_1,e_7]=e_6, & [e_2,e_3]=e_1, & [e_2,e_4]=-e_6, \\
[e_2,e_5]=e_7, & [e_2,e_6]=e_4, & [e_2,e_7]=-e_5, & [e_3,e_4]=-e_7, \\
[e_3,e_5]=-e_6, & [e_3,e_6]=e_5, & [e_3,e_7]=e_4, & [e_4,e_5]=e_1, \\
[e_4,e_6]=e_2, & [e_4,e_7]=e_3, & [e_5,e_6]=e_3, & [e_5,e_7]=-e_2, \\
[e_6,e_7]=e_1. & & &
\end{array}$$

и, разумеется,

$$[e_1,e_1]=0, [e_2,e_2]=0, [e_3,e_3]=0, [e_4,e_4]=0,$$

$$[e_5,e_5]=0, [e_6,e_6]=0, [e_7,e_7]=0.$$

Векторное произведение $[,]$ в этой алгебре, в силе тождеств альтернативности, индуцирует скалярное произведение $\langle,\rangle$, в котором указанный базис является ортогональным, причем

$$e_1^2=1,\ e_2^2=1,\ e_3^2=1,\ e_4^2=-1,\ e_5^2=-1,\ e_6^2=-1,\ e_7^2=-1,$$

что соответствует псевдооктавной геометрии сигнатуры (3,4).

Теория кривых общего вида в семимерном псевдооктавном пространстве была рассмотрена в [6]. Целью настоящей работы является построение канонического репера для кривых, касательные векторы которых изотропны, а двумерные соприкасающиеся плоскости не являются вполне изотропными.

В то время как ортогональный базис подходит для присоединения к точкам кривых общего вида ($(r'(t))^2 > 0$ или $(r'(t))^2 < 0$), для изотропных кривых нужны базисы, содержащие изотропные векторы. Для нашего случая наиболее естественны и удобны базисы, содержащие одну пару изотропных неортогональных векторов, ортогональное дополнение к которой представляет пятимерное подпространство с ортогональным базисом сигнатуры (2,3).

Итак, для решения нашей задачи рассмотрим другой базис. Этот новый базис в пространстве V, обозначаемый через $\{f_i\}$, введем следующим образом:

$$f_1 = e_1 + e_4,\ f_2 = e_1 - e_4,\ f_3 = e_2,\ f_4 = e_3,\ f_5 = e_5,\ f_6 = e_6,\ f_7 = e_7.$$

Соответственно,

$$e_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), e_2 = f_3, e_3 = f_4, e_4 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2), e_5 = f_5, e_6 = f_6, e_7 = f_7.$$

При этом, векторы $\{f_1,\ f_2\}$ образуют изотропную пару, то есть $f_1^2 \equiv 0$, $f_2^2 \equiv 0$, $\langle f_1,\ f_2\rangle = 2$, векторы $f_3^2 = f_4^2 = 1$, $f_5^2 = f_6^2 = f_7^2 = -1$, остальные же скалярные произведения равны нулю.

Матрица Грама $||\langle f_i,\ f_j\rangle||$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, изотропный конус задается уравнением

$$4x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 = 0.$$

Цель, поставленная в работе, требует выполнения большого объема кропотливых вычислений. Достоверность полученных результатов обеспечивается применением двух независимых компьютерных вычислений с использованием программы, написанной на языке Delphi, и пакета Mathematica. Значительная часть проведенных выкладок для большей надежности дублировалась ручными вычислениями.

Векторное произведение [,] в этом базисе $\{f_1, \dots, f_7\}$ задаётся следующей таблицей умножения:
$[f_1,f_2]=2f_5, [f_1,f_3]=f_4+f_6, [f_1,f_4]=-f_3+f_7, [f_1,f_5]=f_1,$

$[f_1,f_6]=f_3-f_7, [f_1,f_7]=f_4+f_6, [f_2,f_3]=f_4-f_6, [f_2,f_4]=-f_3-f_7,$

$[f_2,f_5]=-f_2, [f_2,f_6]=-f_3-f_7, [f_2,f_7]=-f_4+f_6, [f_3,f_4]=\frac{1}{2}(f_1+f_2),$

$[f_3,f_5]=f_7, [f_3,f_6]=\frac{1}{2}(f_1-f_2), [f_3,f_7]=-f_5, [f_4,f_5]=-f_6, [f_4,f_6]=f_5,$

$[f_4,f_7]=\frac{1}{2}(f_1-f_2), [f_5,f_6]=f_4, [f_5,f_7]=-f_3, [f_6,f_7]=\frac{1}{2}(f_1+f_2),$

а также $[f_i,f_i]=0, i\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Группой автоморфизмов этой алгебры является некомпактная группа Ли G_2^n размерности 14. Соответствующая ей алгебра Ли состоит из дифференцирований алгебры V, то есть эндоморфизмов $\mathcal{D}$ векторного пространства V, удовлетворяющих линейным соотношениям

$$\mathcal{D}[f_i,f_j]=[\mathcal{D}f_i,f_j]+[f_i,\mathcal{D}f_j],\ i,j=\overline{1,7}.$$

Таким образом, получаем алгебру Ли $\tilde{g}_2$. Ее матричная реализация в базисе $\{f_i\}$ имеет вид

$$\mathcal{D}=\left(\begin{array}{rr|rr|rrr} d_{11} & 0 & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & d_{17}\\ 0 & -d_{11} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & d_{27}\\ \hline -2d_{23} & -2d_{13} & 0 & d_{34} & d_{35} & d_{36} & d_{37}\\ -2d_{24} & -2d_{14} & -d_{34} & 0 & d_{45} & d_{46} & d_{47}\\ \hline 2d_{25} & 2d_{15} & 2d_{35} & 2d_{45} & 0 & d_{56} & d_{57}\\ 2d_{26} & 2d_{16} & 2d_{36} & 2d_{46} & -d_{56} & 0 & d_{67}\\ 2d_{27} & 2d_{17} & 2d_{37} & 2d_{47} & -d_{57} & -d_{67} & 0 \end{array}\right), \tag{1.1}$$

причем коэффициенты d_{ij} связаны семью дополнительными соотношениями

$$\begin{array}{l} d_{13}-d_{17}-d_{23}-d_{27}+d_{45}=0, d_{15}+d_{25}+d_{36}+d_{47}=0,\\ d_{14}+d_{16}-d_{24}+d_{26}-d_{35}=0, d_{15}-d_{25}-d_{34}+d_{67}=0,\\ d_{13}-d_{17}+d_{23}+d_{27}-d_{56}=0, 2d_{24}-2d_{26}+d_{35}-d_{57}=0,\\ d_{22}-d_{37}+d_{46}=0. \end{array} \tag{1.2}$$

Следовательно, она определяется 28 двучленными и 7 добавочными линейными соотношениями на элементы матрицы седьмого порядка.

Как видно, в матрице естественным образом выделяются 9 блоков, связанных простыми матричными уравнениями. Программа находит канонический базис $\{E_1, ..., E_{14}\}$, содержащий пять 4-членных и девять

6-членных матриц. В силу этого, матрица $\mathcal{D}$ может быть также задана параметрически в виде линейной комбинации этих матриц так, что ее коэффициенты будут выражаются следующим образом через 14 независимых переменных {a, b, c, d, e, f, g, h, p, q, r, s, x, y}

$p-r$	0	$b-c-g-q$	$-a-d+f-x$	$-e-h-s$	a	b
0	$-p+r$	c	d	e	f	g
$-2c$	$-2b+2c+2g+2q$	0	$-2e-h-s-y$	$-2d+2f-x$	h	r
$-2d$	$2a+2d-2f+2x$	$2e+h+s+y$	0	$2c+2g+q$	p	s
$2e$	$-2e-2h-2s$	$-2d+2f-x$	$2c+2g+q$	0	$-q$	$-x$
$2f$	$2a$	h	p	q	0	$-y$
$2g$	$2b$	r	s	x	y	0

Важно знать алгебры Ли стационарных подгрупп 2-флагов, то есть одномерных подпространств и содержащих их двумерных подпространств. Девятимерная алгебра Ли стационарной подгруппы прямой, натянутой на изотропный вектор f_1 состоит из матриц вида

$d-f$	0	$b-e$	$-a-h$	$-c-g$	a	b
0	$-d+f$	0	0	0	0	0
0	$-2b+2e$	0	$-c-g-p$	$-h$	c	f
0	$2a+2h$	$c+g+p$	0	e	d	g
0	$-2c-2g$	$-h$	e	0	$-e$	$-h$
0	$2a$	c	d	e	0	$-p$
0	$2b$	f	g	h	p	0

где $\{a, b, c, d, e, f, g, h, p\}$ — независимые переменные. Она имеет базис, состоящий из пяти 4-членных и четырех 6-членных матриц $\{K_1, ..., K_9\}$. Таблица умножения в этом базисе имеет следующий вид

$[K_1K_2] = 0, [K_1K_3] = 0, [K_1K_4] = -2K_1, [K_1K_5] = 0, [K_1K_6] = K_1,$
$[K_1K_7] = -K_2, [K_1K_8] = 0, [K_1K_9] = -K_2, [K_2K_3] = K_1, [K_2K_4] = -K_2,$
$[K_2K_5] = 0, [K_2K_6] = 2K_2, [K_2K_7] = 0, [K_2K_8] = 0, [K_2K_9] = K_1,$
$[K_3K_4] = -K_3, [K_3K_5] = 2K_1, [K_3K_6] = K_7 - K_9,$
$[K_3K_7] = -K_4 - K_6, [K_3K_8] = K_2 - K_5, [K_3K_9] = -K_4 - K_6,$
$[K_4K_5] = K_5, [K_4K_6] = 0, [K_4K_7] = K_3] - K_9, [K_4K_8] = K_1,$
$[K_4K_9] = K_3 - K_7, [K_5K_6] = -K_2, [K_5K_7] = -K_1 - K_8,$
$[K_5K_8] = -K_3] - K_7 + K_9, [K_5K_9] = -K_8, [K_6K_7] = -K_7, [K_6K_8] = -K_8,$
$[K_6K_9] = K_3 - K_7, [K_7K_8] = 2K_2, [K_7K_9] = K_4 + K_6, [K_8K_9] = K_5.$

Инвариантная форма алгебры Ли, ассоциированная с матричным представлением, и форма Киллинга задаются следующими формулами

$$4(x_4^2 + x_6^2 - x_9^2) - 4(x_3x_7 + x_3x_9 + x_4x_6 + x_7x_9),$$

$$3(3x_4^2 + 3x_6^2 - 4x_9^2) - 6(2x_3x_7 + 2x_3x_9 + x_4x_6 + 2x_7x_9).$$

Эта алгебра Ли имеет 6-мерный радикал и трехмерную полупростую компоненту. Базис радикала составляют матрицы $\{K_1, K_2, K_5, K_6 - K_4, K_8, K_9 - K_7 - K_3\}$.

Стационарная подгруппа флага, заданного базисными векторами $\{f_1, f_7\}$ имеет 5-мерную разрешимую алгебру Ли.

Параметрическое задание этой 5-мерной подалгебры с параметрами $\{a, b, c, d, e\}$ таково

d	0	$b-e$	$-a$	$-c$	a	b
0	$-d$	0	0	0	0	0
0	$-2b+2e$	0	$-c$	0	c	0
0	$2a$	c	0	e	d	0
0	$-2c$	0	e	0	$-e$	0
0	$2a$	c	d	e	0	0
0	$2b$	0	0	0	0	0

В базисе, обозначаемом $\{M_1, ..., M_5\}$, таблица умножения в этой алгебре следующая
$[M_1, M_2] = 0, [M_1, M_3] = 0, [M_1, M_4] = -2M_1, [M_1, M_5] = 0,$
$[M_2, M_3] = M_1, [M_2, M_4] = -M_2, [M_2, M_5] = 0, [M_3, M_4] = -M_3,$
$[M_3, M_5] = 2M_1, [M_4, M_5] = M_5.$

Если же потребовать инвариантности вектора f_1 и инвариантности вектора f_7 по модулю f_1, то возникнет дополнительное условие $d = 0$ и последняя подалгебра будет четырехмерной.

В то время как группа G_2^n транзитивна на изотропных векторах, среди двумерных плоскостей выделяются шесть классов, различаемых рангом и сигнатурой.

Анализ рассмотренных здесь матриц служит оправданием действий при канонизации репера в следующем параграфе.

2. Кривые

Полное и исчерпывающее построение теории кривых в таком пространстве не является нашей целью. По причине неизотропности изучаемого пространства (в смысле неравнозначности направлений в касательном пространстве) число существенно различных случаев достаточно велико.

Полученные результаты представляют определенный интерес сами по себе, но более важную роль они могут играть, как и в классической евклидовой дифференциальной геометрии, при изучении строения подмногообразий большей размерности, в частности, гиперповерхностей с изотропной нормалью, поскольку последние могут расслаиваться на 5-параметрические семейства кривых определенного класса и тогда репер поверхности в точке тесно связан с репером единственной кривой такого класса, проходящей через эту точку.

Во всяком аффинном пространстве для кривой общего вида в каждой ее точке можно рассмотреть флаг $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset ... \subset \mathcal{F}_{n-1}$ такой, что $dim\, \mathcal{F}_i = i$, а подпространство $\mathcal{F}_i$ натянуто на векторы $\dot{r}, \ddot{r}, ..., r^{(i)}$. Он не зависит от параметризации кривой. Главную роль будет играть флаг $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3$.

Ранее мы исследовали кривые общего вида с неизотропными касательными векторами. Рассмотрим семейство изотропных кривых. Пусть $r(t)$ – C^3-гладкая параметризация ориентированной кривой в пространстве V. Мы предполагаем, что векторы $\{\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r}\}$ линейно независимы. Предположим, что касательная к данной кривой изотропна, то есть $(r'(t))^2 \equiv 0$. Так как стационарная подгруппа вектора f_1 восьмимерна, то орбита этого вектора имеет размерность 14-8=6 и потому совпадает с изотропныи конусом. Следовательно, в любой точке нашей кривой можно выбрать подвижной репер так, чтобы изотропный вектор f_1 был направлен по касательной, то есть $r'||f_1$. Мы ограничимся случаем, когда двумерная соприкасающаяся плоскость имеет ранг 1 и сигнатуру (0,1).

Воспользуемся методом внешних форм Картана. Деривационные формулы подвижного репера кривой запишутся в виде:

$$dr = \omega^{\ i} f_i,\ df_i = \omega^{\ j}_{\ i} f_j,$$

где $\omega_{\ i}$, $\omega^{\ j}_{\ i}$ – формы Пфаффа, причем $\omega^{\ j}_{\ i}$ удовлетворяют соотношениям (1.1), (1.2), определяющим алгебру Ли $\tilde{g}_2$, $i, j = \overline{1, 7}$. Формы $\omega_{\ i}$, $\omega^{\ j}_{\ i}$ зависят как от главного параметра s, так и от вторичных параметров, определяющих выбор репера.

Поместим начало репера в точке кривой. Так как начало репера уже выбрано, то

$$\delta r = \pi^i f_i = 0,\ \ \pi^i = 0,$$

где δ – символ дифференцирования по вторичным параметрам, а π^i, π^i_j – формы Пфаффа от дифференциалов этих параметров.

Следовательно, формы $\omega^{\ i}$ содержат дифференциал только одного главного параметра s. Согласно условию, расположим вектор f_1 коллинеарно касательной, то есть

$$dr = \omega^{\ 1} f_1,\ \omega^{\ i} = 0,\ i \neq 1.$$

Дифференцируя внешним образом соотношения $\omega^{\ i} = 0$ при $i \neq 1$ и используя лемму Картана, получаем следующие выражения:

$$\omega^{\ i}_{\ 1} = C^i \omega^{\ 1},$$

где C^i – некоторые функции, зависящие от главного и вторичных параметров.

Так как в используемой реализации алгебры Ли $\tilde{g}_2$ всегда $\omega\,{}^2_1 = 0$, то $C^2 = 0$. Поэтому рассматриваем равенство $\omega\,{}^i_1 = C^i\omega^1$ при $i \neq 1, 2$. и индексы суммирования в формулах будут в дальнейшем пробегать значения от 3 до 7.

Согласно методу внешних форм Картана,

$$\pi\,{}^i_1 = 0,\ i = 3, 4, 5, 6, 7.$$

Осталось зафиксировать девять вторичных параметров.

Дифференцируем равенства $\omega\,{}^i_1 = C^i\omega^1$ и, согласно лемме Картана, имеем

$$-2C^i\omega\,{}^1_1 + C^k\omega\,{}^i_k + dC^i = T^i\omega^1,\ i, k \neq 1, 2, \tag{2.1}$$

где T^i – некоторые функции. Следовательно,

$$-2C^i\pi\,{}^1_1 + C^k\pi\,{}^i_k = -\delta C^i,\ i, k \neq 1, 2.$$

Полагая $C^3 = 0$, $C^4 = 0$, $C^5 = 0$, $C^6 = 0$, $C^7 = 2$, фиксируем еще пять вторичных параметров: $\pi\,{}^3_7 = 0$, $\pi\,{}^3_5 = 0$, $\pi\,{}^2_2 = 0$, $\pi\,{}^3_6 = -\pi\,{}^1_5$, $\pi\,{}^3_4 = \pi\,{}^1_5$.

В результате получаем равенства:

$$\omega\,{}^3_1 = 0,\ \omega\,{}^4_1 = 0,\ \omega\,{}^5_1 = 0,\ \omega\,{}^6_1 = 0,\ \omega\,{}^7_1 = 2\omega^1.$$

Эти соотношения эквивалентны следующим:

$$\omega\,{}^2_3 = 0,\ \omega\,{}^2_4 = 0,\ \omega\,{}^2_5 = 0,\ \omega\,{}^2_6 = 0,\ \omega\,{}^2_7 = \omega^1.$$

Система уравнений (2.1) приводится к виду:

$$\begin{aligned} \omega\,{}^3_7 &= T^3\omega^1, \\ -\omega\,{}^1_5 - \omega\,{}^3_6 &= T^4\omega^1, \\ \omega\,{}^3_5 &= T^5\omega^1, \\ -\omega\,{}^1_5 + \omega\,{}^3_4 &= T^6\omega^1, \\ 4\omega\,{}^2_2 &= T^7\omega^1. \end{aligned}$$

Продифференцируем внешним образом эти выражения еще раз и запишем полученные уравнения для вторичных форм:

$$\begin{aligned} &\delta T^3 = -2\pi\,{}^1_3 + T^4\pi\,{}^1_5 - T^6\pi\,{}^1_5, \\ &\delta T^4 = -T^5\pi\,{}^1_3 - T^3\pi\,{}^1_5 + 2\pi\,{}^1_6 + T^5\pi\,{}^1_7, \\ &\delta T^5 = -T^4\pi\,{}^1_3 + T^6\pi\,{}^1_3 + 2\pi\,{}^1_5 + T^4\pi\,{}^1_7 - T^6\pi\,{}^1_7, \\ &\delta T^6 = -T^5\pi\,{}^1_3 - T^3\pi\,{}^1_5 + 2\pi\,{}^1_6 + T^5\pi\,{}^1_7, \\ &\delta T^7 = -8\pi\,{}^1_7. \end{aligned}$$

В последнем уравнении положим $T^7 = 0$, следовательно, $\pi\,{}^1_7 = 0$. Осталось зафиксировать три вторичных параметра. Полагая $T^3 = 0$, $T^4 = 0$,

$T^5 = 0$, фиксируем оставшиеся вторичные параметры: $\pi\,{}^1_3 = 0$, $\pi\,{}^1_5 = 0$, $\pi\,{}^1_6 = 0$. Теперь все вторичные формы зафиксированы.

Пусть $\omega\,{}^1 = ds$. Функция T^6 – функция натурального параметра s. Обозначим её через a_5.

Тогда остальные дифференциальные формы обозначим следующим образом:

$$\omega\,{}^1_3 = a_1(s)\,ds,\ \omega\,{}^1_5 = a_3(s)\,ds,\ \omega\,{}^1_6 = a_2(s)\,ds,\ \omega\,{}^7_1 = a_4(s)\,ds,$$

где a_i – функции параметра s, $i = 1, 2, 3, 4$.

Таким образом, используя метод внешних форм Картана, получили деривационные формулы канонического репера кривой:

$$\begin{aligned}
&r' = f_1,\\
&f_1' = 2f_7,\\
&f_2' = -2a_1f_3 + 2a_2f_4 + 2a_3f_5 + 2a_2f_6 + 2a_4f_7,\\
&f_3' = a_1f_1 - (a_3 + a_5)f_4 - a_3f_6,\\
&f_4' = -a_2f_1 + (a_3 + a_5)f_3 + (1 - a_1 + a_4)f_5,\\
&f_5' = a_3f_1 + (1 - a_1 + a_4)f_4 + (-1 - a_1 + a_4)f_6,\\
&f_6' = a_2f_1 - a_3f_3 + (1 + a_1 - a_4)f_5 - a_5f_7,\\
&f_7' = a_4f_1 + f_2 + a_5f_6,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где $a_i(s)$ – некоторые функции натурального параметра s, $i = \overline{1, 5}$.

Факторизуя двумерную соприкасающуюся плоскость по одномерной касательной прямой, получаем линейное расслоение над кривой с отрицательно определенной метрикой, ибо квадрат вектора f_7 отрицателен. Каждой параметризации кривой соответствует сечение этого расслоения, причем при любой замене параметризации (даже при замене ориентации кривой) происходит умножение на положительную функцию, поэтому расслоение снабжено ориентацией. При этом, натуральному параметру соответствуют векторы заданной ориентации, квадрат которых равен $(r'')^2 = (2f_7)^2 = -4$.

Имеем $d^2r = d(dr) = d(f_1ds) = 2f_7ds^2$, откуда $(d^2r)^2 = -4ds^4$, следовательно, $s = \int \sqrt[4]{-\frac{1}{4}(d^2r)^2} = \int \sqrt[4]{-\frac{1}{4}(\frac{d^2r}{dt^2})^2}dt$, что характеризует натуральный параметр и дает вычислительную формулу для него.

Далее, векторное произведение $[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]$ касательных векторов и элементов двумерной соприкасающейся плоскости задает изотропную прямую $\mathcal{L}$, не зависящую от выбора параметризации. Эта прямая натянута на вектор $f_4 + f_6$. Двумерная соприкасающаяся плоскость порождает трехмерную разрешимую подалгебру Ли $\mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{L}$, натянутую на векторы $\{f_1, f_7, f_4 + f_6\}$, которая никогда не совпадает с трехмерной соприкасающейся плоскостью. Кроме того, тройка изотропных векторов $\{f_1, f_4 - f_6, f_3 - f_7\}$ задает трехмерную нильпотентную подалгебру с коммутантом, натянутым на вектор $f_3 - f_7$.

Ортогональное дополнение к касательной натянуто на векторы $\{f_1, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$. Ортогональное дополнение к прямой $[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]$ натянуто на векторы $\{f_1, f_2, f_3, f_4 + f_6, f_5, f_7\}$.

Ортогональное дополнение к $\{\mathcal{F}_3\}$ натянуто на векторы $\{f_3, f_4, f_5, a_5 f_1 + 2f_6\}$, причем имеет место разложение V в прямую сумму. Проектирование π пространства V на $\mathcal{F}_3$ задается формулами $\pi(x) = Af_1 + Bf_7 + C(f_2 + a_5 f_6)$, где $x = \sum\limits_{i=1}^{7} x_i f_i$ - произвольный вектор,

$$A = \tfrac{1}{2}(2x_1 + a_5^2 x_2 - a_5 x_6),\ B = x_1,\ C = x_2.$$

Проекция кривой на соприкасающуюся плоскость $\mathcal{F}_3$ в заданной точке представляет изотропную кривую в трехмерном псевдоэвклидовом пространстве. Матрица Грама этого пространства имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4a_4 - a_5^2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому сигнатура скалярного произведения равна (1,2). Канонический репер и инвариант этой кривой выражаются через компоненты нашего репера.

Имеют место очевидные соотношения
$(r')^2 = 0$, $\langle r', r''\rangle = 0$, $(r'')^2 = -4$,
$\langle r', r'''\rangle = 4$, $\langle r'', r'''\rangle = 0$, $[r', r''] = 2(f_4 + f_6)$,
$[r', r'''] = 2(2f_5 + a_5(f_3 - f_7)$,
$[r'', r'''] = 4(-a_4(f_4 + f_6) + (f_4 - f_6) - \frac{a_5}{2}(f_1 + f_2)$.
Также
$(r''')^2 = 4(4a_4 - a_5^2)$,
$\langle [r', r''], r'''\rangle = (r', r'', r''') = -4a_5$,
$\langle [r'', r'''], [r'', r''']\rangle = 16(a_5^2 - 4a_4)$.

Отсюда получаются следующие вычислительные формулы для наиболее важных инвариантов a_4 и a_5

$$a_5 = -\frac{1}{4}(r', r'', r'''),$$
$$a_4 = \frac{1}{64}(4r'''^2 + (r', r'', r''')^2) = \frac{1}{64}((r', r'', r''')^2 - [r'' r''']^2) \tag{2.3}$$

Обозначим $H_1 = r'$, $H_2 = \frac{r''}{2}$, $H_3 = \frac{r'''}{2}$. Таким образом,
$H_1 = f_1$, $H_2 = f_7$, $H_3 = a_4 f_1 + f_2 + a_5 f_6$.
При перемножении получаем три новых вектора
$H_4 = [H_1, H_2] = f_4 + f_6$,
$H_5 = [H_1, H_3] = a_5 f_3 + 2f_5 - a_5 f_7$,
$H_6 = [H_2, H_3] = -\frac{a_5}{2}(f_1 + f_2) + (f_4 - f_6) - a_4(f_4 + f_6)$.

Положим также $H_7 = [H_1, H_6] = 2(f_7 - f_3) - a_5 f_5$. Определитель матрицы, выражающей векторы $\{H_1, ..., H_7\}$ через $\{f_1, ..., f_7\}$ равен $\frac{1}{2}(a_5^2 - 4)^2$. Значит при $a_5 \neq \pm 2$ векторы трехмерной соприкасающейся плоскости порождают семимерное пространство. Отметим также, что коэффициенты линейной системы зависят только от a_4 и a_5, которые легко вычисляются по формулам 2.3. Поэтому из системы семи линейных неоднородных векторных уравнений выражаются базисные векторы $\{f_1, ..., f_7\}$ через три производные вектор-функции, задающей кривую.

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}
&f_1 = H_1,\\
&f_2 = \frac{(4a_4 - a_5^2)H_1 - 4H_3 + 2a_5(1 - a_4)H_4 - 2a_5 H_6}{a_5^2 - 4},\\
&f_3 = \frac{(a_5^2 - 4)H_2 + a_5 H_5 + 2H_7}{a_5^2 - 4},\\
&f_4 = \frac{a_5(a_4 - 1)H_1 - a_5 H_3 + (a_5^2 - 2a_4 - 2)H_4 - 2H_6}{a_5^2 - 4}\\
&f_5 = \frac{-2H_5 - a_5 H_7}{a_5^2 - 4},\\
&f_6 = \frac{a_5(1 - a_4)H_1 + a_5 H_3 + 2(a_4 - 1)H_4 + 2H_6}{a_5^2 - 4}\\
&f_7 = H_2.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

В случае произвольной параметризации $r = r(t)$ как обычно, по формулам замены переменной могут быть выведены формулы для инвариантов a_4, a_5 и базисных векторов $\{f_1, ..., f_7\}$, а также и для a_1, a_2, a_3, которые здесь не приводятся в силу громоздкости. Итак, получена

Теорема 1. *Для любой параметризации кривой указанного класса имеются формулы, выражающие векторы канонического репера через первые три производные вектор-функции, задающей кривую. В случае натурального параметра они имеют вид (2.4).*

Сформулируем теперь основную теорему для этого класса кривых.

Теорема 2. *В семимерном псевдооктавном пространстве задание произвольных гладких функций $a_1(s), \ldots, a_5(s)$ определяет изотропную кривую с двумерными соприкасающимися плоскостями ранга 1 и сигнатуры (0,1), для которой коэффициенты $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ деривационных формул канонического репера 2.2, содержащего пару изотропных векторов, совпадают с этими заданными функциями. Эта кривая определяется с точностью до преобразований, сохраняющих псевдооктавную структуру.*

Доказательство ее проводится с использованием стандартных рассуждений, применяемых к подобным теоремам, основанных на интегрировании системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2.2.

Список литературы

1. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Группы и алгебры Ли. — М: Наука, 1982. — 447 с.
2. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами — Казань, Изд-во Казанск. ун-та. —1985.-264 с.
3. *Банару М. Б.* О сасакиевых гиперповерхностях 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли — Матем. сб., 2003, 194:8, 13-24.
4. *Fernandez M., Gray A.* Riemannian manifolds with structure group G_2 // Ann. di Math. Pura ed Appl. — 1982. — № 32. — P. 19–45.
5. *Желваков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И.* Кольца близкие к ассоциативным. — М: Наука, 1978. — 431 с.
6. *Кузуб Н.М.* Кривые в семимерном псевдооктавном пространстве.— «Студент и научно-технический прогресс». Сборник тезисов студентов и аспирантов ИГУ.— Иркутск: ИГУ, 1998.— С.54.

P. Y. Grushko, N. M. Kouzoub

The canonical frame of isotropic curve in the 7-dimensional affine space with pseudooctonion structure

Abstract. The optimal canonical frame of a smooth curve with isotropic tangent vectors in 7-dimensional affine space with pseudooctonion structure is constructed with an assistance of computer tools such as Mathematica and Delphi programs.