Серия «Математика»
Том 1 (2007), № 1, С. 322—329

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.983.51

Обобщенные решения нестационарных вырожденных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах

М. В. Фалалеев (mihail@ic.isu.ru)
Институт математики, экономики и информатики ИГУ, Иркутск

Аннотация. Данная заметка представляет собой продолжение цикла работ автора по вопросам построения теории обобщенных решений вырожденных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и посвящена исследованию разрешимости в классе распределений задачи Коши для вырожденного дифференциального уравнения первого порядка с переменными операторными коэффициентами. Такие задачи, в случае фредгольмовости оператора при производной, сводятся к исследованию систем интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода с ядром общего вида. Использовав, во-первых, полученные ранее результаты о разрешимости таких систем в классе непрерывных функций и, во-вторых, теорию фундаментальных оператор-функций вырожденных дифференциальных операторов в банаховых пространствах, удалось построить обобщенное решение рассматриваемой задачи в классе обобщенных функций с ограниченным слева носителем. Исследована связь полученного обобщенного решения с непрерывным решением этой же задачи. Приведена формула для фундаментальной оператор-функции нестационарного дифференциального оператора первого порядка в регулярном случае.

Ключевые слова: фредгольмов оператор, уравнения Вольтерра

Введение

Рассматривается задача Коши вида

$$B\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \tag{0.1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{0.2}$$

где B, $A(t)$ — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, E_1, E_2 — банаховы пространства, $D(B) \subset D(A(t))$, $\overline{D(B)} = \overline{D(A(t))} = E_1$, B — фредгольмов [1], $A(t)$ — сильно непрерывная оператор-функция класса

$C^\infty(R^1)$, причем $A^*(t)$ существует при почти всех t, $\overline{R(B)} = R(B)$, $f(t)$ достаточно гладкая функция со значениями в E_2.

Задачи вида (0.1) – (0.2) не всегда разрешимы в классе $C^1[0;+\infty)$, поэтому в работе строятся обобщенные решения этой задачи в классе распределений с ограниченным слева носителем. Исследована связь между построенным обобщенным и гладким решениями задачи (0.1)–(0.2).

1. Непрерывные решения задачи (0.1)–(0.2)

Пусть $\{\varphi_l, l = 1,\dots,n\}$ — базис ядра $N(B)$, ψ_l, $l = 1,\dots,n$ — базис ядра $N(B^*)$, Γ — оператор Шмидта [1] соответствующий B.

Обозначим через $\mathcal{U}(t) : E_2 \to E_2$ разрешающий оператор [2] уравнения

$$\dot{x}(t) = A(t)\Gamma x(t), \tag{1.1}$$

тогда решение задачи Коши для уравнения (1.1) с начальным условием $\tilde{x}_0$ представимо в виде

$$x(t) = \mathcal{U}(t)\tilde{x}_0.$$

Для разрешающего оператора $\mathcal{U}(t)$ справедливо представление (см. [2]):

$$\mathcal{U}(t) = I_2 + \int_0^t A(t_1)\Gamma dt_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_k} \dots \int_0^{t_2} A(t_k)\Gamma A(t_{k-1})\Gamma \dots A(t_1)\Gamma dt_1 \dots dt_k,$$

причем

$$\| \mathcal{U}(t) \| \le \exp \int_0^t \| A(\tau)\Gamma \| \, d\tau,$$

$\mathcal{U}(t)$ непрерывно обратим, т.е. $\mathcal{U}^{-1}(t) \in \mathcal{L}(E_2)$, и

$$\dot{\mathcal{U}}(t) = A(t)\Gamma\mathcal{U}(t), \quad \mathcal{U}(0) = I_2,$$

$$\dot{\mathcal{U}}^{-1}(t) = -\mathcal{U}^{-1}(t)A(t)\Gamma, \quad \mathcal{U}^{-1}(0) = I_2,$$

$I_2 : E_2 \to E_2$ — единичный (тождественный) оператор.

Далее используются терминология и обозначения работ [3, 4, 5].

Лемма 1. (вспомогательная). *Обобщенная оператор-функция*

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{U}(t)\Big(I_2\theta(t) * \mathcal{U}^{-1}(t)\Big),$$

действующая на обобщенные функции $g(t) \in K'(E_2)$ по правилу

$$\mathcal{E}(t)g(t) = \mathcal{U}(t)\Big(I_2\theta(t) * \mathcal{U}^{-1}(t)g(t)\Big),$$

является фундаментальной [3, 4] для дифференциального оператора

$$\Big(I_2\delta'(t) * -A(t)\Gamma\Big),$$

на классе обобщенных функций $g(t) \in K'(E_2)$, для которых существует свертка $I_2\theta(t)*\mathcal{U}^{-1}(t)g(t)$ (таковым будет, например, класс $K'_+(E_2)$ [3, 4]).

Доказательство. Действительно, $\forall g(t) \in K'(E_2)$ справедлива следующая цепочка равенств

$$\Big(I_2\delta'(t) * -A(t)\Gamma\Big)\mathcal{E}(t)g(t) = \frac{d}{dt}\Big[\mathcal{U}(t)\Big(I_2\theta(t) * \mathcal{U}^{-1}(t)g(t)\Big)\Big] -$$

$$-A(t)\Gamma\mathcal{U}(t)\Big(I_2\theta(t) * \mathcal{U}^{-1}(t)g(t)\Big) = \mathcal{U}'(t)\Big(I_2\theta(t) * \mathcal{U}^{-1}(t)g(t)\Big) +$$

$$+\mathcal{U}(t)\Big(I_2\delta(t) * \mathcal{U}^{-1}(t)g(t)\Big) - A(t)\Gamma\mathcal{U}(t)\Big(I_2\theta(t) * \mathcal{U}^{-1}(t)g(t)\Big) =$$

$$= A(t)\Gamma\mathcal{U}(t)\Big(I_2\theta(t) * \mathcal{U}^{-1}(t)g(t)\Big) + \mathcal{U}(t)\mathcal{U}^{-1}(t)g(t) -$$

$$-A(t)\Gamma\mathcal{U}(t)\Big(I_2\theta(t) * \mathcal{U}^{-1}(t)g(t)\Big) = g(t) = I_2\delta(t) * g(t),$$

т.е.

$$\Big(I_2\delta'(t) * -A(t)\Gamma\Big)\mathcal{E}(t) = I_2\delta(t)$$

что и означает, согласно определению фундаментальной оператор-функции [3, 4], справедливость утверждения вспомогательной леммы. □

Введем следующие функции:

$$b_l(t) = -\int_0^t \Big\langle \mathcal{U}(t)\mathcal{U}^{-1}(\tau)\Big(A(\tau)x_0 + f(\tau)\Big), \psi_l\Big\rangle d\tau,$$

$$K_{kl}(t,s) = \Big\langle \mathcal{U}(t)\mathcal{U}^{-1}(s)A(s)\varphi_k, \psi_l\Big\rangle, \quad k,l = 1,\dots,n.$$

Пусть выполнено условие

A) все функции $K_{kl}(t,s)$ аналитичны в окрестности точки $(0;0)$ при $|t| < R$ и $|s| < R$ и все их частные производные до $(m-1)$-го порядка включительно обращаются в нуль в точке $(0;0)$, но не все частные производные m-го порядка равны нулю в точке $(0;0)$.

Обозначим через K_{ij} матрицу из $(i;j)$-коэффициентов Маклорена функций $K_{kl}(t,s)$ и назовем точку $t = 0$ *регулярной* для матричной функции $K(t,s) = \| K_{kl}(t,s) \|$, если обратима матрица $\sum_{i+j=m} K_{ij}$, т.е.

$$\det \sum_{i+j=m} K_{ij} \neq 0.$$

Введем следующий ряд матричных функций

$$L_k(\lambda) = \sum_{i+j=k} \frac{K_{ij}}{\lambda + j + 1}, \quad k = m, m+1, \ldots$$

и назовем *характеристическим уравнением* задачи (0.1) - (0.2) уравнение

$$\det L_m(\lambda) = 0.$$

Для каждого целого неотрицательного корня λ_0 характеристического уравнения будем предполагать выполненным условие

B) матрица $L_m(\lambda_0)$ имеет полный обобщенный $\{\frac{(-1)^{k+1}}{k!} L_m^{(k)}(\lambda_0)\}$-жорданов набор [3, 5] элементов $\{\overline{e}_i^{(j)},\ i = 1, \ldots, n_0,\ j = 1, \ldots, p_i\}$, здесь $n_0 = \dim N(L_m(\lambda_0)) = n - rang L_m(\lambda_0)$.

Следуя [3, 5] *кратностью* целого неотрицательного корня λ_0 назовем число

$$m_0 = \max\{p_i,\ i = 1, \ldots, n_0\},$$

а его *показателем* величину

$$q_0 = p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_0}.$$

В [3, 5] приведена и доказана следующая

Теорема 1. *Если выполнено условие A), характеристическое уравнение имеет r неотрицательных целых корней $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_r$ кратностей $m_1, m_2, \ldots, m_r$ с показателями $q_1, q_2, \ldots, q_r$, для каждого из которых выполнено условие B), $t = 0$ регулярная особая точка для $K(t, s)$ и $b_l(0) = b_l'(0) = \ldots = b_l^{(m)}(0) = 0,\ l = 1, \ldots, n$, тогда задача Коши (0.1) - (0.2) имеет $(q_1 + q_2 + \ldots + q_r)$ — параметрическое непрерывное решение вида*

$$x(t) = x_0 + \Gamma v(t) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) \varphi_i,$$

где

$$v(t) = \int_0^t \mathcal{U}(t) \mathcal{U}^{-1}(\tau) \Big(A(\tau) x_0 + f(\tau) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\tau) A(\tau) \varphi_i \Big) d\tau,$$

числовые функции $\xi_i(t)$ восстанавливаются из системы интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода

$$\int_0^t K(t, \tau) \overline{\xi}(\tau) d\tau = \overline{b}(t),$$

(здесь $\overline{\xi}(t) = \Big(\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)\Big)$, $\overline{b}(t) = \Big(b_1(t), b_2(t), \ldots, b_n(t)\Big)$ — вектор-столбцы) в виде логарифмо-степенных рядов, часть коэффициентов которых содержат свободные параметры и выражаются через элементы обобщенных $\{\frac{(-1)^{k+1}}{k!}L_m^{(k)}(\lambda_i)\}$-жорданов набор.

Одно из жестких условий этой теоремы, а именно, $\overline{b}(0) = \overline{b}'(0) = \ldots = \overline{b}^{(m)}(0) = 0$, можно снять, если строить решение задачи (0.1) - (0.2) в классе распределений.

2. Обобщенные решения задачи (0.1)-(0.2).

В обобщенных функциях задачу (0.1) - (0.2) можно переписать в виде [3, 4]

$$\Big(B\delta'(t) * -A(t)\Big)\tilde{x}(t) = f(t)\theta(t) + Bx_0\delta(t). \tag{2.1}$$

Будем искать обобщенное решение в виде следующей суммы

$$\tilde{x}(t) = \Gamma\delta(t) * y(t) + \Big(x_0 + \sum_{i=1}^{n}\xi_i(t)\varphi_i\Big)\theta(t) + \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \varphi_i, \tag{2.2}$$

$$w_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\delta^{(j)}(t) \in D'_+ \, [6], \tag{2.3}$$

$$Q_k\delta(t) * y(t) = 0, \;\; Q_k = \Big\langle \cdot, \psi_k \Big\rangle, \; k = 1, \ldots, n, \tag{2.4}$$

$$y(t) \in K'_+(E_2).$$

После подстановки (2.2) в (2.1) получим относительно $y(t)$ дифференциальное уравнение

$$\Big(I_2\delta'(t) * -A(t)\Gamma\Big)y(t) = \Big(A(t)x_0 + f(t) + \sum_{i=1}^{n} A(t)\varphi_i \cdot \xi_i(t)\Big)\theta(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} A(t)\varphi_i \cdot w_i,$$

решение которого, в силу вспомогательной леммы, имеет вид

$$y(t) = \mathcal{E}(t)\Big(A(t)x_0 + f(t) + \sum_{i=1}^{n} A(t)\varphi_i \cdot \xi_i(t)\Big)\theta(t) + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}(t)A(t)\varphi_i \cdot w_i$$

или

$$y(t) = \int_0^t \mathcal{U}(t)\mathcal{U}^{-1}(\tau)\Big(A(\tau)x_0 + f(\tau) + \sum_{i=1}^{n} A(\tau)\varphi_i \cdot \xi_i(\tau)\Big)d\tau + \tag{2.5}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}(t)A(t)\varphi_i\cdot w_i$$

Непосредственными вычислениями находим

$$\mathcal{E}(t)A(t)\varphi_i w_i=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j c_{ij}\Bigg[\mathcal{U}(t)\Big(\mathcal{U}^{-1}(t)A(t)\varphi_i\Big)^{(j)}\Bigg|_{t=0}\theta(t)-$$

$$-\sum_{l=0}^{j-1}\Bigg\{\sum_{\mu=0}^{j-l-1}C_j^{\mu}C_{j-\mu-1}^{l}\mathcal{U}^{(j-l-1-\mu)}(0)\Big(\mathcal{U}^{-1}(t)A(t)\varphi_i\Big)^{(\mu)}\Bigg|_{t=0}\Bigg\}\delta^{(l)}(t)\Bigg].$$

Подставив теперь выражение для $y(t)$ в соотношения (2.4), получим следующую систему интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^t K_{ik}(t,\tau)\xi_i(\tau)d\tau=b_k(t)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j c_{ij}\frac{\partial^j K_{ik}(t,0)}{\partial\tau^j}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j c_{ij}\sum_{l=0}^{j-1}(-1)^l\sum_{\mu=0}^{j-l-1}C_j^{\mu}C_{j-\mu-1}^{l}\frac{\partial^{j-l-1}K_{ik}(0,0)}{\partial t^{j-l-1-\mu}\partial\tau^{\mu}}\delta^{(l)}(t),k=1,\ldots,n,$$

которая, в силу условия A), окончательно принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^t K_{ik}(t,\tau)\xi_i(\tau)d\tau=b_k(t)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j c_{ij}\frac{\partial^j K_{ik}(t,0)}{\partial\tau^j},\ \ k=1,\ldots,n \tag{2.6}$$

и разрешима относительно $\xi_i(\tau)$, если

$$\frac{d^l}{dt^l}\Bigg(b_k(t)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j c_{ij}\frac{\partial^j K_{ik}(t,0)}{\partial\tau^j}\Bigg)=0,\ \ l=0,\ldots,m,\ k=1,\ldots,n.$$

Эту систему линейных алгебраических уравнений (относительно c_{ij}) можно переписать поблочно в векторно-матричном виде следующим образом

$$K_{l\,m-l}\overline{c}_{m-l}=\frac{(-1)^{m-l}}{l!(m-l)!}\overline{b}^{(l)}(0)+A^1_{m-l+1}K_{l\,m-l+1}\overline{c}_{m-l+1}- \tag{2.7}$$

$$-A^2_{m-l+2}K_{l\,m-l+2}\overline{c}_{m-l+2}+\ldots+(-1)^{l+1}A^l_m K_{l\,m}\overline{c}_m,\ l=0,\ldots,m,$$

где $\overline{c}_j=\Big(c_{1j},c_{2j},\ldots,c_{nj}\Big)$, $j=0,1,\ldots,m$ — вектор-столбцы. Если $detK_{l\,m-l}\neq 0$, $l=0,1,\ldots,m$, то система (2.7) однозначно разрешима относительно $\overline{c}_j$, $j=0,1,\ldots,m$ и следовательно все составляющие обобщенного решения (2.2) полностью восстанавливаются.

Таким образом доказана следующая

Теорема 2. *Если выполнено условие A), характеристическое уравнение имеет r целых неотрицательных корней $0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_r$ кратностей $m_1, m_2, \ldots, m_r$ с показателями $q_1, q_2, \ldots, q_r$, для каждого из которых выполнено условие B), $t = 0$ регулярная особая точка для $K(t,s)$ и $\det K_{l\,m-l} \neq 0$, $l = 0, 1, \ldots, m$, тогда задача Коши (0.1) - (0.2) имеет $(q_1 + q_2 + \ldots + q_r)$-параметрическое обобщенное решение вида (2.2), (2.3), (2.5), в котором числовые функции $\xi_i(t)$ восстанавливаются из системы интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода (2.6) в виде логарифмо-степенных рядов, часть коэффициентов которых содержат свободные параметры и выражаются через элементы обобщенных $\{\frac{(-1)^{k+1}}{k!} L_m^{(k)}(\lambda_i)\}$-жорданов набор, а числовые коэффициенты сингулярной составляющей (2.3) обобщенного решения однозначно восстанавливаются из системы (2.7).*

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 2* $\overline{b}(0) = \overline{b}'(0) = \ldots = \overline{b}^{(m)}(0) = 0$, *то обобщенное решение (2.2) окажется классическим (гладким) из теоремы 1.*

Замечание 1. Условие $A(t) \in C^\infty(R^1)$ в задаче (0.1)–(0.2) можно ослабить, в этом случае обобщенное решение можно будет построить по этой же технологии, но уже в шкале пространств обобщенных функций конечной гладкости [4].

Список литературы

1. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969.— 528 с.
2. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.— 536 с.
3. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A. and Falaleev M.* Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.— 548 p.
4. *Фалалеев М.В.* Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах // СМЖ.— 2000.— Т. 41, № 5.— С. 1167–1182.
5. *Фалалеев М.В.* Задача Коши для вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах // Вестник Челябинского университета. Сер. 3. Математика. Механика. / Под ред. В.Д. Батухтина.— Челябинск: Изд-во Челяб. ун-та, 1999.— №. 2— С. 126–136.
6. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.— 320 с.

M. V. Falaleev

The Generalized solutions of the nonstationary degenerated differential equations in Banach spaces

Abstract. This paper continues a series of papers on the problems of the construction theory of the generalized solutions of singular differential equations in Banach spaces and is focused on the investigation of Cauchy problem solvability in the class of distributions for a singular differential equation of the first order with variable operators coefficients. These problems in the case of the Fredholm operator by derivative can be reduced to the investigation of the system of integral Volterra equations of the first kind with the kernels of general types. Based on the results of solvability of these systems in the class of continuous functions and the theory of fundamental operator-functions of degenerated differential operators in Banach spaces, we can construct the generalized solutions of the considered problem in the class of generalized functions with left-bounded support. The connection between the obtained generalized solution and the continuous solution of this problem was investigated. The formula of the fundamental operator-function of the nonstationary differential operator of the first order in regular case was obtained.