



УДК 518.517

Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра I рода: элементы теории и численные методы*

А. С. Апарцин (apartsyn@isem.sei.irk.ru)

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск

Аннотация. В статье дан обзор результатов, полученных автором в последние годы в области теории и численных методов решения полилинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода.

Ключевые слова: мажорантные уравнения; функция Ламберта; нелинейные интегральные неравенства; неулучшаемые оценки; численные методы.

Дорогому учителю Владимиру Владимировичу Васильеву, под руководством которого автор выполнил в 1964 году курсовую работу по интегральным уравнениям типа Вольтерра, посвящаю.

Введение

Хорошо известным универсальным подходом к построению математической модели нелинейной динамической системы типа вход-выход является представление отклика системы на входное возмущение в виде отрезка интегро-степенного ряда (полинома) Вольтерра.

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — скалярные функции времени. Тогда полином Вольтерра N -ой степени, отображающий $x(t)$ в $y(t)$, имеет следующий вид:

$$y(t) = \sum_{m=1}^N \int_0^t \cdots \int_0^t K_m(t, s_1, \dots, s_m) \prod_{i=1}^m x(s_i) ds_i, \quad t \in [0, T]. \quad (0.1)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 05-01-00336.

Предположим, ядра Вольтерра K_m , $m = \overline{1, N}$, уже идентифицированы каким-либо способом, например, по методике [1]–[3] (ядра K_m , $m = \overline{2, N}$, априори симметричны по s_1, \dots, s_m), и ставится задача найти такое возмущение $x(t)$, которому отвечает заданный отклик $y(t)$.

В этом случае (0.1) является полилинейным (N -линейным) относительно $x(t)$ уравнением Вольтерра I рода. Для приложений особую роль играют билинейное ($N = 2$) и трилинейное ($N = 3$) уравнение (0.1).

Теория подобных уравнений, вообще говоря, отсутствует. В данной статье приводится обзор результатов, полученных автором в последние годы как в области теории таких уравнений, так и в области численных методов их решения.

1. Специфика полилинейных уравнений Вольтерра I рода

Полагая в (0.1) $N = 1, 2, 3$, выпишем последовательно линейное

$$\int_0^t K_1(t, s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

билинейное

$$\int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 = y(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.2)$$

и трилинейное

$$\begin{aligned} & \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 + \\ & + \int_0^t \int_0^t \int_0^t K_3(t, s_1, s_2, s_3)x(s_1)x(s_2)x(s_3)ds_1ds_2ds_3 = y(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (1.3)$$

уравнения Вольтерра I рода.

Всюду далее считаем все функции и функциональные пространства вещественными.

Напомним вначале хорошо известный факт относительно (1.1).

Пусть $K'_{1t}(t, s) \in C_\Delta$, $\Delta = \{t, s/0 \leq s \leq t \leq T\}$; $K_1(t, t) \neq 0$ $\forall t \in [0, T]$; $y'(t) \in C_{[0, T]}$ и $y(0) = 0$.

Тогда (1.1) имеет непрерывное и притом единственное на $[0, T]$ решение при любом $T < \infty$.

Чтобы понять специфику билинейного уравнения (1.2), рассмотрим простейший случай постоянных ядер: $K_1(t, s) \equiv 1$, $K_2(t, s_1, s_2) = \lambda \neq 0$, так что (1.2) принимает вид

$$\int_0^t x(s)ds + \lambda \left(\int_0^t x(s)ds \right)^2 = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.4)$$

Теорема 1. Пусть

$$y(t) \in C_{[0, T]}^{(1)}, \quad y(0) = 0. \quad (1.5)$$

Тогда функция

$$x^*(t) = \frac{y'(t)}{\sqrt{1 + 4\lambda y(t)}} \quad (1.6)$$

— решение уравнения (1.4).

Доказательство. Убедимся, что подстановка (1.6) в (1.4) обращает (1.4) в тождество. Имеем:

$$I \triangleq \int_0^t x^*(s)ds = \int_0^t \frac{y'(s)ds}{\sqrt{1 + 4\lambda y(s)}} = \frac{1}{2\lambda} \int_1^{\sqrt{1+4\lambda y(t)}} du = \frac{1}{2\lambda} \left(\sqrt{1 + 4\lambda y(t)} - 1 \right).$$

Отсюда

$$I^2 = \frac{1}{4\lambda^2} (2 + 4\lambda y(t) - 2\sqrt{1 + 4\lambda y(t)}) = \frac{y(t)}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2} (1 - \sqrt{1 + 4\lambda y(t)}),$$

поэтому

$$I + \lambda I^2 \equiv y(t).$$

□

Для установления принадлежности решения к тому или иному классу нужны дополнительные предположения.

Теорема 2. Пусть, кроме (1.5), справедливо неравенство

$$T < \frac{1}{4|\lambda|F}, \quad (1.7)$$

где

$$F = \max_{0 \leq t \leq T} |y'(t)|. \quad (1.8)$$

Тогда

$$x^*(t) \in C_{[0, T]}. \quad (1.9)$$

Доказательство. Так как $y(0) = 0$, то $y(t) = ty'(\xi)$, $\xi \in [0, t]$, следовательно, $|y(t)| \leq tF$, а значит, (1.7) обеспечивает строгую положительность подкоренного выражения в (1.6), откуда и вытекает (1.9). \square

Замечание 1. Неравенство (1.7) с учетом (1.8) является, по сути, нелинейным ограничением на величину T . К примеру, если $y(t) = \ln(t + \mu) - \ln \mu$, $\mu > 0$, то $F = \frac{1}{\mu}$ и $T < \frac{\mu}{4|\lambda|}$; если $y(t) = e^t - 1$, то (1.7), (1.8) дают $Te^T < \frac{1}{4|\lambda|}$, откуда $T < W\left(\frac{1}{4|\lambda|}\right)$, где W — главная вещественная ветвь функции Ламберта [4], [5]. Как мы увидим далее, эта функция играет в теории полилинейных вольтерровых уравнений ключевую роль.

Таким образом, даже в случае постоянных ядер непрерывное решение билинейного уравнения существует, вообще говоря, лишь в некоторой окрестности нуля. Локальный характер непрерывного решения — принципиальное отличие полилинейных уравнений от линейного.

В некоторых частных случаях непрерывное решение (1.4) носит глобальный характер.

Теорема 3. Пусть выполнено условие (1.5), $y(t)$ знакопостоянна на $[0, T]$ и

$$\text{sign } \lambda = \text{sign } y(t).$$

Тогда

$$x^*(t) \in C_{[0, T]} \quad \forall T < \infty. \quad (1.10)$$

Доказательство немедленно следует из (1.6).

Теорема 4. Пусть

$$y(t) = g(t) + \lambda g^2(t), \quad (1.11)$$

где $g(t) \in C_{[0, T]}^{(1)}$, $g(0) = 0$. Тогда (1.10) также верно.

Доказательство. В силу (1.11)

$$y'(t) = (1 + 2\lambda g(t)) g'(t) \quad (1.12)$$

и

$$\sqrt{1 + 4\lambda y(t)} = 1 + 2\lambda g(t). \quad (1.13)$$

Из условий на $g(t)$ вытекает (1.5), поэтому, пользуясь результатом теоремы 1 и подставляя (1.12), (1.13) в (1.6), получаем

$$x^*(t) = g'(t) \in C_{[0, T]} \quad \forall T < \infty.$$

\square

До сих пор мы интересовались непрерывным решением (1.4). Следующая теорема показывает, что, несмотря на условие $y(0) = 0$, которое для линейного уравнения (1.1) гарантирует отсутствие решений в классе обобщенных функций, в случае (1.4) это заведомо не так. Именно, справедлива

Теорема 5. *Если $x^*(t)$ — решение уравнения (1.4), то*

$$x^{**}(t) = -(x^*(t) + \frac{1}{\lambda}\delta(t)), \quad (1.14)$$

где $\delta(t)$ — δ -функция Дирака, также решение (1.4).

Доказательство. Покажем, что подстановка (1.14) в (1.4) обращает (1.4) в тождество. Действительно, так как

$$I \triangleq \int_0^t x^{**}(s)ds = -\int_0^t x^*(s)ds - \frac{1}{\lambda},$$

то

$$I^2 = \left(\int_0^t x^*(s)ds\right)^2 + \frac{2}{\lambda} \int_0^t x^*(s)ds + \frac{1}{\lambda^2},$$

следовательно,

$$I + \lambda I^2 = \int_0^t x^*(s)ds + \lambda \left(\int_0^t x^*(s)ds\right)^2 \equiv y(t).$$

□

В то же время единственность решения (1.4) в $C_{[0,T]}$ гарантирует

Теорема 6. *Если решение (1.4) в $C_{[0,T]}$ существует, то оно единственно.*

Доказательство. Предположим противное, что существуют два решения $x^*(t)$ и $x^{**}(t) \neq x^*(t)$, принадлежащие $C_{[0,T]}$. Тогда их разность $\varepsilon(t) = x^*(t) - x^{**}(t)$ удовлетворяет тождеству

$$\int_0^t \varepsilon(s)ds \left(1 + \lambda \int_0^t (x^*(s) + x^{**}(s))ds\right) \equiv 0, \quad t \in [0, T].$$

Но в силу непрерывности $x^*(t)$ и $x^{**}(t)$ выражение в скобках не может тождественно равняться нулю, так как при $t = 0$ оно равно единице. Следовательно,

$$\int_0^t \varepsilon(s) ds \equiv 0, \quad t \in [0, T],$$

а значит, $x^*(t) \equiv x^{**}(t)$, что противоречит исходному предположению. \square

Отметим, что формула (1.6) обращения уравнения (1.4) может быть получена несколькими способами. Так, замена искомой функции

$$\theta(t) = \int_0^t x(s) ds, \quad t \in [0, T], \quad (1.15)$$

позволяет получить (1.6) дифференцированием корня

$$\theta^*(t) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\lambda y(t)}}{2\lambda}, \quad t \in [0, T], \quad (1.16)$$

квадратного уравнения

$$\theta^2(t) + \frac{1}{\lambda} \theta(t) - \frac{y(t)}{\lambda} = 0, \quad t \in [0, T], \quad (1.17)$$

(из двух корней (1.17) условию $\theta(0) = 0$, вытекающему из (1.15), удовлетворяет корень (1.16)).

Весьма поучительным является вывод (1.6) с помощью принципа сжимающих отображений. Его применение возможно в нескольких вариантах. Остановимся на способе, заключающемся в переходе от (1.4) к эквивалентному уравнению II рода путем дифференцирования (1.4) и поиске неподвижной точки отображения

$$V(x(t)) = y'(t) - 2\lambda x(t) \int_0^t x(s) ds \quad (1.18)$$

с помощью итерационного процесса

$$x_{k+1} = V(x_k(t)) = y'(t) - 2\lambda x_k(t) \int_0^t x_k(s) ds, \quad (1.19)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0(t) = y'(t).$$

С учетом условия $y(0) = 0$ имеем:

$$x_1(t) = (1 - 2\lambda y(t)) y'(t);$$

$$\begin{aligned}
 x_2(t) &= (1 - 2\lambda y(t) + 6\lambda^2 y^2(t)) y'(t); \\
 x_3(t) &= (1 - 2\lambda y(t) + 6\lambda^2 y^2(t) - 20\lambda^3 y^3(t)) y'(t); \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_k(t) &= (1 - 2\lambda y(t) + 6\lambda^2 y^2(t) - 20\lambda^3 y^3(t) + \dots + (-1)^k \frac{(2k)!}{(k!)^2} \lambda^k y^k(t)) y'(t) = \\
 &= \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{(2i)!}{(i!)^2} \lambda^i y^i(t) \right) y'(t).
 \end{aligned}$$

Поскольку, как известно (см., например, [7], стр. 33), при $|z| < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1+z}} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}z^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}z^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}z^4 - \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(2i)!}{(i!)^2 4^i} z^i,$$

то, полагая $z = 4\lambda y(t)$, получаем, что при условии

$$4|\lambda y(t)| < 1 \tag{1.20}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = x^*(t) = \frac{y'(t)}{\sqrt{1 + 4\lambda y(t)}},$$

а это совпадает с (1.6).

Если положить $y(t) = g(t) + \lambda g^2(t)$, $g(0) = 0$, то итерационный процесс (1.19) дает

$$x_k(t) = g'(t)(1 + 2\lambda g(t)) \sum_{i=0}^k (-1)^i (2\lambda g(t))^i, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и при

$$2|\lambda g(t)| < 1 \tag{1.21}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = x^*(t) = g'(t). \tag{1.22}$$

Замечание 2. Подчеркнем, что условия (1.20), (1.21), обеспечивающие абсолютную сходимость знакопеременных рядов и накладывающие ограничения на T , являются излишне обременительными для вывода формул обращения соответствующих уравнений. Рассмотренный пример иллюстрирует механизм сужения области существования искомого решения, полученного с помощью принципа сжимающих отображений. „Изюминка“ развиваемого далее аппарата заключается в получении максимально широкой области существования за счет прямого вывода формул обращения так называемых мажорантных уравнений.

2. Мажорантные уравнения (билинейный случай)

Введем обозначения

$$k = \min_{t \in [0, T]} |K_1(t, t)| > 0; \quad (2.1)$$

$$L_1 = \max_{0 \leq s \leq t \leq T} |K'_{1t}(t, s)| \geq 0; \quad (2.2)$$

$$M_2 = \max_{0 \leq s \leq t \leq T} |K_2(t, t, s)| > 0; \quad (2.3)$$

$$L_2 = \max_{0 \leq s_1, s_2 \leq t \leq T} |K'_{2t}(t, s_1, s_2)| \geq 0; \quad (2.4)$$

и вновь обратимся к линейному уравнению (1.1). Дифференцирование (1.1) и переход к оценке по модулю приводит с учетом (1.8), (2.1), (2.2) к неравенству

$$|x(t)| \leq \frac{F}{k} + \frac{L_1}{k} \int_0^t |x(s)| ds, \quad t \in [0, T], \quad (2.5)$$

откуда по лемме Гронуолла-Беллмана

$$|x(t)| \leq \frac{F}{k} e^{\frac{L_1}{k} t}, \quad t \in [0, T]. \quad (2.6)$$

Оценку (2.6) естественно назвать неувлучшаемой, поскольку при замене в (2.5) знака \leq на $=$ (2.6) также переходит в равенство, так как мажоранта — функция $\frac{F}{k} e^{\frac{L_1}{k} t}$ — является точным решением уравнения

$$\psi(t) = Fk^{-1} + L_1k^{-1} \int_0^t \psi(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (2.7)$$

Замечание 3. Далеко не все известные в литературе оценки для линейных интегральных неравенств являются неувлучшаемыми. Например, оценка Вендроффа решений двумерного неравенства

$$x(t_1, t_2) \leq F + K \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} x(s_1, s_2) ds_1 ds_2, \quad F, K, x, t_1, t_2 \geq 0,$$

такова:

$$x(t_1, t_2) \leq F e^{K t_1 t_2},$$

а неувлучшаемой мажорантой является решение соответствующего уравнения — функция

$$F \mathcal{J}_0 \left(2i \sqrt{K t_1 t_2} \right) \equiv F \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(K t_1 t_2)^k}{(k!)^2},$$

где \mathcal{J}_0 — функция Бесселя нулевого порядка, i — мнимая единица (см. [6], стр. 46-48). ■

Уравнение (2.7) назовем мажорантным для (1.1) интегральным уравнением Вольтерра II рода, а поскольку (2.7) эквивалентно интегральному уравнению Вольтерра I рода

$$\int_0^t (k - L_1(t-s))x(s)ds = Ft, \quad t \in [0, T], \quad (2.8)$$

то и (2.8) также будем называть мажорантным для (1.1).

Наконец, заменой (1.15) решение (2.7) сводится к дифференцированию решения мажорантной задачи Коши

$$\dot{\theta}(t) = L_1 k^{-1} \theta(t) + F k^{-1}, \quad \theta(0) = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (2.9)$$

Переходя теперь к билинейному уравнению (1.2), предположим вначале, что ядра K_1 и K_2 от t не зависят, так что $L_1 = L_2 = 0$. Так как при этом дифференцирование (1.2) приводит с учетом симметрии K_2 по s_1, s_2 к неравенству

$$|x(t)| \leq F k^{-1} + 2M_2 k^{-1} |x(t)| \int_0^t |x(s)| ds, \quad t \in [0, T], \quad (2.10)$$

то, обобщая линейный случай, естественно трактовать нелинейное интегральное уравнение II рода

$$\psi(t) = F k^{-1} + 2M_2 k^{-1} \psi(t) \int_0^t \psi(s) ds, \quad t \in [0, T], \quad (2.11)$$

как мажорантное для (1.2).

Эквивалентное (2.11) мажорантное интегральное уравнение I рода имеет вид

$$k \int_0^t \psi(s) ds - M_2 \left(\int_0^t \psi(s) ds \right)^2 = Ft, \quad t \in [0, T]. \quad (2.12)$$

Замена (1.15) осуществляет переход от (2.12) к мажорантному функциональному уравнению

$$k\theta(t) - M_2 \theta^2(t) = Ft, \quad t \in [0, T], \quad (2.13)$$

с условием $\theta(0) = 0$, а дифференцирование (2.13) дает эквивалентную (2.13) мажорантную задачу Коши

$$\dot{\theta}(t) = \frac{F k^{-1}}{1 - 2M_2 k^{-1} \theta(t)}, \quad \theta(0) = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (2.14)$$

Решение (2.13), (2.14) — функция

$$\theta^*(t) = \frac{k - \sqrt{k^2 - 4M_2Ft}}{2M_2}, \quad t \in [0, T], \quad (2.15)$$

вещественная при $T \leq \frac{k^2}{4M_2F}$, поэтому непрерывное решение (2.11), (2.12) определяется формулами

$$\psi^*(t) = \frac{F}{\sqrt{k^2 - 4M_2Ft}}, \quad t \in [0, T], \quad (2.16)$$

$$T < T^* = \frac{k^2}{4M_2F}. \quad (2.17)$$

Выше мы определили понятие неухудшаемости оценок непрерывных решений линейных интегральных неравенств. В нелинейном случае, в частности, применительно к (2.10), это понятие нуждается в уточнении.

Определение 1. Оценку непрерывных решений неравенства (2.10)

$$|x(t)| \leq \psi^*(t), \quad t \in [0, T], \quad T < T^*, \quad (2.18)$$

назовем неухудшаемой, если

- 1) мажоранта $\psi^*(t)$ является (единственным) решением уравнения (2.11);
- 2) T^* не может быть заменено на $T^{**} > T^*$.

Таким образом, для получения неухудшаемой оценки важно не только найти точное решение соответствующего уравнения, но и определить максимально широкую гарантированную область его существования. Очевидно, что формулы (2.16), (2.17) и определяют неухудшаемую оценку вида (2.18), так как ограничение (2.17) не может быть ослаблено.

Замечание 4. В рассмотренном простейшем случае $L_1 = L_2 = 0$ принцип сжимающих отображений дает ту же область существования непрерывного решения (сравни (2.17) с (1.20)), однако в силу механизма, указанного в замечании 2, он не позволяет получить максимальную область для общих уравнений (1.2).

Всюду далее, не уменьшая общности, будем для сокращения записи считать, что $k = 1$ (в противном случае во всех выкладках константы F , L_1 , L_2 , M_2 следует умножить на k^{-1}).

Пусть теперь ядра K_1 и K_2 в (1.2) таковы, что $L_1 \neq 0$, $L_2 = 0$. В этом случае мажорантное интегральное уравнение для (1.2) имеет вид

$$\int_0^t \left(1 - L_1(t-s)\right) \psi(s) ds - M_2 \left(\int_0^t \psi(s) ds \right)^2 = Ft, \quad t \in [0, T], \quad (2.19)$$

а мажорантная задача Коши —

$$\dot{\theta}(t) = \frac{F + L_1\theta(t)}{1 - 2M_2\theta(t)}, \quad \theta(0) = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (2.20)$$

Применяя для решения (2.20) метод разделения переменных и правило интегрирования дробно-рациональной функции

$$\frac{1 - 2M_2\theta(t)}{F + L_1\theta(t)},$$

приходим к трансцендентному уравнению

$$\theta(t) + a = c(t)e^{b\theta(t)}, \quad t \in [0, T]. \quad (2.21)$$

В (2.21) приняты следующие обозначения:

$$a = \frac{F}{L_1}; \quad b = \frac{2L_1M_2}{L_1 + 2FM_2}; \quad c(t) = \frac{F}{L_1} \exp \frac{L_1^2 t}{L_1 + 2FM_2}. \quad (2.22)$$

Точное решение (2.21) выражается в терминах функции Ламберта W . Напомним ([4], [5]), что функция Ламберта $y = W(z)$ удовлетворяет уравнению

$$ye^y = z$$

и имеет две вещественные ветви — главную, определенную при всех вещественных $z \geq -e^{-1}$ и аналитичную в нуле, причем $W(0) = 0$ (обычно она обозначается как $W(0, z)$ или просто $W(z)$), — и вторую ветвь, определенную при $z \in [-e^{-1}, 0)$ и обозначаемую как $W(-1, z)$, при этом $W(0, -e^{-1}) = W(-1, -e^{-1}) = -1$, $W(-1, 0) = -\infty$.

Умножим (2.21) на $-be^{-b(\theta(t)+a)}$, тогда

$$-b(\theta(t) + a)e^{-b(\theta(t)+a)} = -bc(t)e^{-ba},$$

откуда

$$-b(\theta(t) + a) = W(-bc(t)e^{-ba})$$

и, следовательно,

$$\theta(t) = -\frac{1}{b}W(-bc(t)e^{-ba}) - a,$$

так что с учетом (2.22) решение задачи Коши (2.20) есть

$$\theta^*(t) = -\frac{L_1 + 2M_2F}{2L_1M_2}W\left(-\frac{2M_2F}{L_1 + 2M_2F} \exp \frac{L_1^2 t - 2M_2F}{L_1 + 2M_2F}\right) - \frac{F}{L_1}. \quad (2.23)$$

Для определения точной верхней границы T^* для T достаточно приравнять аргумент функции Ламберта в (2.23) к $-\frac{1}{e}$. Несложные преобразования дают

$$T^* = \frac{L_1 + 2M_2F}{L_1^2} \ln\left(1 + \frac{L_1}{2M_2F}\right) - \frac{1}{L_1}. \quad (2.24)$$

Для получения решения (2.19) осталось продифференцировать (2.23). Поскольку

$$W'(z) = \frac{W(z)}{z(1+W(z))},$$

находим, что

$$\psi^*(t) = -\frac{L_1}{2M_2} \frac{W\left(-\frac{2M_2F}{L_1+2M_2F} \exp \frac{L_1^2 t - 2M_2F}{L_1+2M_2F}\right)}{1 + W\left(-\frac{2M_2F}{L_1+2M_2F} \exp \frac{L_1^2 t - 2M_2F}{L_1+2M_2F}\right)}. \quad (2.25)$$

Если исходные данные в (1.2) характеризовать пятеркой параметров (k, F, L_1, M_2, L_2) , то полученный выше результат суммирует

Теорема 7. Пусть исходным данным в (1.2) отвечает набор $(1, F, L_1, M_2, 0)$. Тогда непрерывное решение (1.2) $x^*(t)$ заведомо существует на $[0, T]$, $T < T^*$, и справедливо неравенство (2.18), где $\psi^*(t)$ и T^* определены формулами (2.25), (2.24).

Замечание 5. Применение принципа сжимающих отображений в рассматриваемом случае приводит к оценке

$$T < \min \left[\frac{r}{L_1(F+r) + 2M_2(F+r)^2}, \frac{1}{L_1 + 4M_2(F+r)} \right]. \quad (2.26)$$

Если, к примеру, $L_1 = 2M_2 = F = 1$, то максимум правой части (2.26) равен $1/(3 + \sqrt{2}) \approx 0.171$. В то же время формула (2.24) дает $T^* = 2 \ln 2 \approx 0.386$.

Осталось рассмотреть случай $L_2 > 0$, которому отвечает мажорантное интегральное уравнение

$$\psi(t) = F + L_1 \int_0^t \psi(s) ds + 2M_2 \psi(t) \int_0^t \psi(s) ds + L_2 \left(\int_0^t \psi(s) ds \right)^2 \quad (2.27)$$

и мажорантная задача Коши

$$\dot{\theta}(t) = \frac{F + L_1 \theta(t) + L_2 \theta^2(t)}{1 - 2b_2 \theta(t)}, \quad \theta(0) = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (2.28)$$

Точное решение (2.28) ((2.27)) может быть получено с учетом знака дискриминанта $D = L_1^2 - 4L_2F$ квадратного трехчлена в числителе (2.28). Как показано в [10], [11], если $D = 0$, то

$$\theta^*(t) = -\frac{a}{W(-1, -a\sqrt{L_2} e^{-\frac{L_2}{2M_2}(b-t)})} - \frac{L_1}{2L_2}, \quad (2.29)$$

$$\psi^*(t) = \frac{aL_2}{2M_2} \frac{1}{W\left(-1, -a\sqrt{L_2} e^{-\frac{L_2}{2M_2}(b-t)}\right)} \cdot \frac{1}{1 + W\left(-1, -a\sqrt{L_2} e^{-\frac{L_2}{2M_2}(b-t)}\right)}, \quad (2.30)$$

$$T^* = b - \frac{2M_2}{L_2}(1 + \ln(a\sqrt{L_2})). \quad (2.31)$$

В (2.29)–(2.31)

$$a = \frac{L_2 + L_1M_2}{2L_2M_2}, \quad b = \frac{M_2}{L_2} \ln F + \frac{2(L_2 + L_1M_2)}{L_2L_1}.$$

Таким образом, верна

Теорема 8. Пусть исходным данным в (1.2) отвечает набор $(1, F, L_1, M_2, L_2)$. Тогда непрерывное решение (1.2) заведомо существует на $[0, T]$, $T < T^*$, и справедливо неравенство (2.18), где $\psi^*(t)$ и T^* определены формулами (2.30), (2.31).

Замечание 6. Формулы для T^* при $D \geq 0$ получены в [9]. Вопрос о представлении в этом случае решения (2.27) в терминах функции Ламберта остается открытым.

3. Мажорантные уравнения (трилинейный случай)

Переход к трилинейному уравнению (1.3) связан с существенным усложнением техники исследования. Ниже мы ограничимся случаем постоянных ядер Вольтерра: $K_1(t, s) \equiv 1$; $K_2(t, s_1, s_2) \equiv \lambda$; $K_3(t, s_1, s_2, s_3) \equiv \mu \neq 0$. Очевидно, что при этом аналог мажорантного функционального уравнения (2.13) имеет вид

$$\theta - M_2\theta^2 - M_3\theta^3 = Ft, \quad t \in [0, T], \quad (3.1)$$

где $M_2 = |\lambda| \geq 0$, $M_3 = |\mu| > 0$, $\theta(0) = 0$, эквивалентная (3.1) мажорантная задача Коши есть

$$\dot{\theta}(t) = \frac{F}{1 - 2M_2\theta(t) - 3M_3\theta^2(t)}, \quad \theta(0) = 0; \quad 0 < t \leq T, \quad (3.2)$$

а решением $\psi^*(t)$ мажорантного интегрального уравнения

$$\psi(t) = F + 2M_2\psi(t) \int_0^t \psi(s) ds + 3M_3\psi(t) \left(\int_0^t \psi(s) ds \right)^2, \quad t \in [0, T],$$

является производная от решения (3.2) ((3.1)) $\theta^*(t)$.

Стандартная подстановка $z(t) = \theta(t) + \frac{M_2}{3M_3}$ сводит (3.1) к кубическому уравнению

$$z^3(t) + pz(t) + q(t) = 0, \quad (3.3)$$

$$p = -\left(\frac{1}{M_3} + \frac{M_2^2}{3M_3^2}\right), \quad q(t) = \frac{M_2}{3M_3}\left(\frac{1}{M_3} + \frac{2}{9}\frac{M_2^2}{M_3^2}\right) + \frac{Ft}{M_3}. \quad (3.4)$$

Условием вещественности корней (3.3) является неравенство $\frac{q^2(t)}{4} + \frac{p^3}{27} \leq 0$, поэтому T^* есть положительный корень квадратного относительно t уравнения

$$\frac{q^2(t)}{4} + \frac{p^3}{27} = 0.$$

Применение системы компьютерной алгебры MAPLE дает

$$T^* = \frac{-9M_2M_3 - 2M_2^3 + 2\sqrt{27M_3^3 + 27M_3^2M_2^2 + 9M_3M_2^4 + M_2^6}}{27M_3^2F}. \quad (3.5)$$

Согласно [8], стр. 197, при $t \leq T^*$ корни (3.3) можно найти по формуле

$$z_k(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-p} \cdot \cos \frac{\varphi(t) + 2k\pi}{3}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.6)$$

где $\varphi(t)$ — наименьший положительный угол, удовлетворяющий условию

$$\cos \varphi(t) = -\frac{q(t)}{2} \sqrt{-\frac{27}{p^3}}. \quad (3.7)$$

Нас интересует положительный корень (3.3), равный $\frac{M_2}{3M_3}$ при $t = 0$, так как $\theta(0) = 0$. Из (3.6), (3.7) следует, что нужному корню соответствует $k = 2$, так что

$$\theta^*(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-p} \sin \left\{ \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} q(t) \sqrt{-\frac{1}{p^3}} \right) \right\} - \frac{M_2}{3M_3}, \quad t \in [0, T^*]. \quad (3.8)$$

Тем самым найдено точное решение мажорантных задач (3.1), (3.2). Для нахождения $\psi^*(t)$ остается продифференцировать (3.8) и учесть (3.4):

$$\psi^*(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{F \cos \left\{ \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} q(t) \sqrt{-\frac{1}{p^3}} \right) \right\}}{pM_3 \sqrt{4 + \frac{27q^2(t)}{p^3}}}, \quad 0 \leq t < T^*. \quad (3.9)$$

Теорема 9. В рассматриваемом случае непрерывное решение (1.3) заведомо существует на $[0, T]$, $T < T^*$, и справедливо неравенство (2.18), где $\psi^*(t)$ и T^* определены формулами (3.9), (3.5).

Для иллюстрации полученных формул приведем следующий пример.

Пусть $F = M_2 = M_3 = 1$. Тогда

$$q(t) = \frac{11}{27} + t; \quad p = -\frac{4}{3}; \quad T^* = \frac{5}{27}; \quad \theta^*(T^*) = \frac{1}{3};$$

$$\theta^*(t) = \frac{4}{3} \sin \left\{ \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{27}{16} \left(\frac{11}{27} + t \right) \right) \right\}, \quad t \in \left[0, \frac{5}{27} \right];$$

$$\psi^*(t) = \frac{4 \cos \left\{ \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{27}{16} \left(\frac{11}{27} + t \right) \right) \right\}}{\sqrt{15 - 66t - 81t^2}}, \quad t \in \left[0, \frac{5}{27} \right).$$

4. Неулучшаемые оценки решений некоторых нелинейных интегральных неравенств

В пунктах 2, 3 были найдены точные решения серии мажорантных интегральных уравнений и максимальные области их существования, что обеспечивает неулучшаемость в смысле определения 1 оценок решений соответствующих интегральных неравенств. Ниже для удобства приводится сводка таких оценок и иллюстрирующие примеры.

4.1. Если

$$x(t) \leq F + Mx(t) \int_0^t x(s) ds, \quad x(t), F, M > 0,$$

то

$$x(t) \leq \frac{F}{\sqrt{1 - 2MFt}}$$

при

$$0 \leq t < \frac{1}{2MF}.$$

Пример 1. $F = M = 1$.

Если

$$x(t) \leq 1 + x(t) \int_0^t x(s) ds,$$

то

$$x(t) \leq \frac{1}{\sqrt{1 - 2t}}, \quad 0 \leq t < \frac{1}{2}.$$

4.2. Если

$$x(t) \leq F + L \int_0^t x(s) ds + Mx(t) \int_0^t x(s) ds, \quad x(t), F, L, M > 0,$$

то

$$x(t) \leq -\frac{L}{M} \frac{W\left(-\frac{MF}{L+MF} \exp \frac{L^2 t - MF}{L+MF}\right)}{1 + W\left(-\frac{MF}{L+MF} \exp \frac{L^2 t - MF}{L+MF}\right)}$$

при

$$0 \leq t < \frac{L + MF}{L^2} \ln\left(1 + \frac{L}{MF}\right) - \frac{1}{L}.$$

Пример 2. $F = L = M = 1$.

Если

$$x(t) \leq 1 + \int_0^t x(s) ds + x(t) \int_0^t x(s) ds,$$

то

$$x(t) \leq -\frac{W\left(-\frac{1}{2} \exp \frac{t-1}{2}\right)}{1 + W\left(-\frac{1}{2} \exp \frac{t-1}{2}\right)} \quad \text{при} \quad 0 \leq t < 2 \ln 2 - 1.$$

4.3. Если

$$x(t) \leq F + L \int_0^t x(s) ds + Mx(t) \int_0^t x(s) ds + N \left(\int_0^t x(s) ds \right)^2,$$

$$x(t), F, L, M, N > 0, L^2 - 4NF = 0,$$

то

$$x(t) \leq \frac{aN}{M} \frac{1}{W\left(-1, -a\sqrt{N} \exp\left(-\frac{N}{M}(b-t)\right)\right)} \cdot \frac{1}{1 + W\left(-1, -a\sqrt{N} \exp\left(-\frac{N}{M}(b-t)\right)\right)}$$

при

$$0 \leq t < b - \frac{M}{N} (1 + \ln(a\sqrt{N})),$$

где

$$a = \frac{2N + LM}{2NM}, \quad b = \frac{M}{2N} \ln F + \frac{2N + LM}{LN}.$$

Пример 3. $L = 2, F = M = N = 1, a = 2, b = 2.$

Если

$$x(t) \leq 1 + 2 \int_0^t x(s) ds + x(t) \int_0^t x(s) ds + \left(\int_0^t x(s) ds \right)^2,$$

то

$$x(t) \leq \frac{2}{W(-1, -2e^{t-2}) \cdot \left(1 + W(-1, -2e^{t-2})\right)}, \quad 0 \leq t < 1 - \ln 2.$$

4.4. Если

$$x(t) \leq F + 2Mx(t) \int_0^t x(s) ds + 3Nx(t) \left(\int_0^t x(s) ds \right)^2, \quad x(t), F, M, N > 0,$$

то

$$x(t) \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{F \cos \left\{ \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} q(t) \sqrt{-\frac{1}{p^3}} \right) \right\}}{pM_3 \sqrt{4 + \frac{27q^2(t)}{p^3}}}$$

при

$$0 \leq t < \frac{-9NM - 2M^3 + 2\sqrt{27N^3 + 27N^2M^2 + 9NM^4 + M^6}}{27N^2F},$$

где

$$p = -\left(\frac{1}{N} + \frac{M^2}{3N^2}\right), \quad q(t) = \frac{M}{3N} \left(\frac{1}{N} + \frac{2}{9} \frac{M^2}{N^2}\right) + \frac{Ft}{N}.$$

Пример 4. $F = 1, M = \frac{1}{2}, N = \frac{1}{6}, p = -9, q(t) = 8 + 6t.$

Если

$$x(t) \leq 1 + x(t) \int_0^t x(s) ds + \frac{1}{2} x(t) \left(\int_0^t x(s) ds \right)^2,$$

то

$$x(t) \leq \frac{6 \cos \left\{ \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{(4+3t)\sqrt{3}}{9} \right) \right\}}{\sqrt{33 - 72t - 27t^2}}, \quad 0 \leq t < \sqrt{3} - \frac{4}{3} \approx 0.3987.$$

5. Дальнейшие обобщения

Обобщая рассмотренный в пункте 3 случай постоянных ядер Вольтерра в (0.1) с $N = 3$ на $N > 3$, введем мажорантное функциональное уравнение

$$\theta(t) - \sum_{i=2}^N M_i \theta^i(t) = Ft, \quad \theta(0) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (5.1)$$

и эквивалентную мажорантную задачу Коши

$$\dot{\theta}(t) = \frac{F}{1 - \sum_{i=2}^{N-1} i M_i \theta^{i-1}(t)}, \quad \theta(0) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (5.2)$$

где $M_i = |K_i|$, $i = \overline{2, N}$, причем производная точного решения (5.1) ((5.2)) является при некотором достаточно малом $T^* > T$ неухудшаемой оценкой решений интегрального неравенства

$$x(t) \leq F + \sum_{i=2}^N i M_i x(t) \left(\int_0^t x(s) ds \right)^{i-1}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.3)$$

Если при $N = 4$ нахождение неухудшаемой для (5.3) оценки в принципе возможно с использованием известных способов Эйлера или Феррари поиска корней многочлена четвертой степени, то при $N > 4$ речь может идти, вообще говоря, лишь об оценках, близких к неухудшаемым. Для конкретных числовых значений M_i , $i = \overline{1, N}$, такие оценки могут быть получены при любом N .

Так, в развитие примера 4 положим $M_i = \frac{1}{i!}$, $i = \overline{2, N}$, тогда (5.1) имеет вид

$$\theta(t) - \sum_{i=2}^N \frac{1}{i!} \theta^i(t) = Ft, \quad \theta(0) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (5.4)$$

Точное решение (5.4) и критическое значение t обозначим как $\theta_N^*(t)$ и T_N^* , чтобы подчеркнуть их зависимость от N . Ясно, что $T_N^* > T_{N+1}^*$; $\theta_N^*(t) > \theta_{N+1}^*(t)$, $\psi_N^*(t) = \dot{\theta}_N^*(t) \leq \dot{\theta}_{N+1}^*(t) = \psi_{N+1}^*(t)$ при $0 \leq t < T_{N+1}^*$. Устремляя N в (5.4) к ∞ , получаем уравнение

$$2\theta(t) - Ft + 1 = e^{\theta(t)}, \quad (5.5)$$

решение которого $\theta_\infty^*(t)$ определяется в терминах функции Ламберта. Поскольку (5.5) преобразуется к виду

$$-\left(\theta(t) + \frac{1 - Ft}{2}\right) e^{-(\theta(t) + \frac{1 - Ft}{2})} = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1 - Ft}{2}},$$

отсюда

$$\theta_{\infty}^*(t) = -W\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1-Ft}{2}}\right) + \frac{Ft-1}{2}, \quad (5.6)$$

$$\psi_{\infty}^*(t) = \dot{\theta}_{\infty}^*(t) = -\frac{F}{2} \frac{W\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1-Ft}{2}}\right)}{1+W\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1-Ft}{2}}\right)} + \frac{F}{2}, \quad (5.7)$$

а приравнивание аргумента W к $-\frac{1}{e}$ дает значение T_{∞}^* :

$$T_{\infty}^* = \frac{2 \ln 2 - 1}{F},$$

причем $\theta_{\infty}^*(T_{\infty}^*) = \ln 2$.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Если

$$x(t) \leq F + \sum_{i=2}^N \frac{x(t)}{(i-1)!} \left(\int_0^t x(s) ds \right)^{i-1}, \quad x(t), F > 0, N \geq 2,$$

то

$$x(t) \leq -\frac{F}{2} \left(\frac{W\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1-Ft}{2}}\right)}{1+W\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1-Ft}{2}}\right)} - 1 \right)$$

при

$$0 \leq t < \frac{2 \ln 2 - 1}{F}.$$

Замечание 7. Учитывая результат примера 4, при $N \geq 4$ имеем двусторонние оценки

$$0.386294361 = 2 \ln 2 - 1 < T_N^* < \sqrt{3} - \frac{4}{3} = 0.398717475,$$

$$0.6931471806 = \ln 2 < \theta_N^*(T_N^*) < \sqrt{3} - 1 = 0.732050808.$$

Для получения достаточно грубых оценок решений неравенства (5.3) может быть применен следующий прием.

Введем последовательность $\lambda_k = (k! M_k)^{\frac{1}{k}}$, $k = \overline{2, N}$, и обозначим

$$\bar{\lambda} = \max_{2 \leq k \leq N} \lambda_k, \quad \underline{\lambda} = \min_{2 \leq k \leq N} \lambda_k.$$

Тогда при любом $N \geq 2$

$$T_{\bar{\lambda}} < T_N^* < T_{\underline{\lambda}}, \quad \psi_N^*(t) \leq \psi_{\bar{\lambda}}(t), \quad 0 \leq t < T_{\bar{\lambda}},$$

где

$$T_{\bar{\lambda}} = \frac{1}{F} \left(\frac{1 + \bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} \ln \frac{1 + \bar{\lambda}}{\bar{\lambda}e} + 1 \right); \quad (5.8)$$

$$T_{\underline{\lambda}} = \frac{1}{F} \left(\frac{1 + \underline{\lambda}}{\underline{\lambda}} \ln \frac{1 + \underline{\lambda}}{\underline{\lambda}e} + 1 \right); \quad (5.9)$$

$$\psi_{\bar{\lambda}}(t) = -\frac{1}{1 + \bar{\lambda}} \frac{W \left(-\frac{\bar{\lambda}}{1 + \bar{\lambda}} e^{-\frac{\bar{\lambda}}{1 + \bar{\lambda}}(1 - Ft)} \right)}{1 + W \left(-\frac{\bar{\lambda}}{1 + \bar{\lambda}} e^{-\frac{\bar{\lambda}}{1 + \bar{\lambda}}(1 - Ft)} \right)} + \frac{F\bar{\lambda}}{1 + \bar{\lambda}}. \quad (5.10)$$

Для иллюстрации приведенных формул рассмотрим

Пример 5. Пусть $N = 3$, $M_2 = \frac{1}{2}$, $M_3 = \frac{1}{3}$, $F = 1$. Тогда согласно (3.4), (3.5), (3.9) $p = -\frac{15}{4}$, $q(t) = 3t + \frac{7}{4}$, $T_3^* = \frac{5\sqrt{5}-7}{12} = 0.348361572$,

$$\psi_3^*(t) = \frac{10 \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{(7+12t)\sqrt{5}}{25} \right) \right)}{\sqrt{95 - 210t - 180t^2}}.$$

Так как $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \sqrt[3]{2}$, то $\underline{\lambda} = 1$, $\bar{\lambda} = \sqrt[3]{2} = 1.259921050$. По (5.8), (5.9), (5.10) $T_{\bar{\lambda}} = 0.2543242862$, $T_{\underline{\lambda}} = 0.386294361$, $\psi_{\bar{\lambda}}(0) = \psi_3^*(0) = 1$, $\psi_3^*(T_{\bar{\lambda}}) = 1.701940189$, $\psi_{\bar{\lambda}}(T_{\bar{\lambda}}) = \infty$.

Замечание 8. При изложении результатов пункта 5 мы следовали работе [12].

6. Численные методы решения полилинейных уравнений Вольтерра I рода

В работах [13], [14], [15] рассматривались численные методы решения уравнений (1.2), (1.3). На тестовых примерах было показано, что как и в линейном случае (1.1), методы правых и средних прямоугольников сходятся по шагу сетки h с порядками $\mathcal{O}(h)$ и $\mathcal{O}(h^2)$ соответственно, а при возмущенных исходных данных в метрике C они обладают саморегуляризирующим свойством. Теоретическое обоснование сходимости применительно к (1.2) было дано в [14] лишь для частного случая постоянных ядер K_1 и K_2 . Ниже приводится доказательство сходимости для общего случая.

Введем сетку узлов $t_i = ih$, $i = \overline{1, n}$, $nh = T$, причем считаем $T < T^*$, чтобы обеспечить существование непрерывного решения (1.2).

Аппроксимируя интегралы в (1.2) квадратурами правых прямоугольников, запишем сеточный аналог (1.2):

$$h \sum_{j=1}^i K_{1,i,j} x_j^h + h^2 \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i K_{2,i,j,k} x_j^h x_k^h = y_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.1)$$

Для вычисления x_i^h из (6.1) имеем квадратное уравнение

$$\begin{aligned} h^2 K_{2,i,i,i} (x_i^h)^2 + \left(h K_{1,i,i} + 2 \sum_{j=1}^{i-1} K_{2,i,j,j} x_j^h \right) x_i^h = \\ = y_i - h \sum_{j=1}^{i-1} K_{1,i,j} x_j^h - h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} K_{2,i,j,k} x_j^h x_k^h, \quad i = \overline{2, n}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

причем вещественность корней (6.2) гарантирует неравенство $T < T^*$, а выбор нужного корня определяется условием $x_1^h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \bar{x}(0) = \frac{y'(0)}{K_1(0,0)}$, x_1^h удовлетворяет квадратному уравнению (в (6.1) $i = 1$) $h^2 K_{2,1,1,1} (x_1^h)^2 + h K_{1,1,1} x_1^h - y_1 = 0$.

Обозначим через $\bar{x}_i \equiv \bar{x}(t_i)$, $i = \overline{1, n}$, каркас точного решения уравнения (1.2), а через ε^h — вектор ошибки сеточного решения: $\varepsilon^h = \{\varepsilon_i^h\} \equiv \{\bar{x}_i - x_i^h\}$, $i = \overline{1, n}$. Так как вектор $\{\bar{x}_i\}$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяет системе

$$h \sum_{j=1}^i K_{1,i,j} \bar{x}_j + h^2 \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i K_{2,i,j,k} \bar{x}_j \bar{x}_k = y_i - R_i(\bar{x}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.3)$$

где

$$R_i(\bar{x}) = \int_0^{t_i} K_1(t_i, s) \bar{x}(s) ds + \int_0^{t_i} \int_0^{t_i} K_2(t_i, s_1, s_2) \bar{x}(s_1) \bar{x}(s_2) ds_1 ds_2 - \quad (6.4)$$

$$- \left(h \sum_{j=1}^i K_{1,i,j} \bar{x}_j + h^2 \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i K_{2,i,j,k} \bar{x}_j \bar{x}_k \right)$$

— суммарная погрешность квадратуры на $[0, t_i]$ и $[0, t_i] \times [0, t_i]$, то, вычитая из (6.3) (6.1), получим относительно ε^h следующую СЛАУ:

$$h \sum_{j=1}^i K_{1,i,j} \varepsilon_j^h + h^2 \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i K_{2,i,j,k} (\bar{x}_j \varepsilon_k^h + x_k^h \varepsilon_j^h) = -R_i(\bar{x}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.5)$$

Принципиальное отличие (6.5) от аналогичной СЛАУ в линейном случае ($K_2 \equiv 0$) заключается во вхождении в (6.5) самого сеточного

решения $\{x_i^h\}$, так что оценка погрешности численного решения возможна лишь при условии получения равномерной по шагу сетки h оценки $|x_i^h|$. При этом существенно, что равномерная оценка каркаса точного решения

$$|\bar{x}_i| \leq \psi^*(T), \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.6)$$

для различных наборов (k, F, L_1, M_2, L_2) уже получена (см. пункт 2, формулы (2.16), (2.25), (2.30)). Существенную роль для дальнейшего играет

Лемма 1. Пусть X — множество решений числового неравенства

$$ax \leq b + cx^2, \quad x, a, b, c > 0.$$

Тогда при $a^2 > 4bc$ $X = X_1 \cup X_2$, где

$$X_1 = \left\{ x : x \leq x^* = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2c} \right\}, X_2 = \left\{ x : x \geq x^{**} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2c} \right\},$$

а при $a^2 \leq 4bc$ $X = R_+$.

Доказательство очевидно (см. рис. 1).

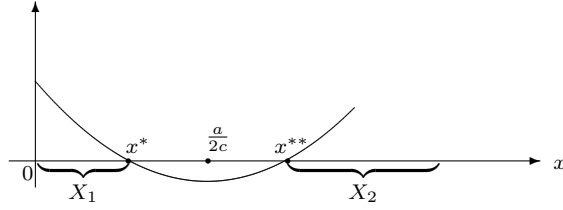


Рис. 1

Нужную равномерную оценку компонент сеточного решения дает

Теорема 10. Справедливо неравенство

$$|\bar{x}_i^h| \leq \psi^*(T). \quad (6.7)$$

Доказательство. Вычитая из i -ой строки (6.1) $(i-1)$ -ю и переходя к оценке по модулю, имеем для $i = \overline{2, n}$:

$$|x_i^h| \leq F + L_1 h \sum_{j=1}^{i-1} |x_j^h| + hM_2(x_i^h)^2 + 2M_2|x_i^h|h \sum_{j=1}^{i-1} |x_j^h| + L_2 \left(h \sum_{j=1}^{i-1} |x_j^h| \right)^2.$$

Обозначим через x_i^* меньший корень сеточного уравнения

$$x_i = F + L_1 h \sum_{j=1}^{i-1} x_j + hM_2 x_i^2 + 2M_2 x_i h \sum_{j=1}^{i-1} x_j + L_2 \left(h \sum_{j=1}^{i-1} x_j \right)^2, \quad i = \overline{2, n}. \quad (6.8)$$

Согласно лемме 1, при достаточно малом h

$$|x_i^h| \leq x_i^*, \quad i = \overline{2, n}, \quad (6.9)$$

и

$$|x_1^h| \leq x_1^* = \frac{1 - \sqrt{1 - 4M_2Fh}}{2M_2h}.$$

Если ввести замену

$$\theta_i = h \sum_{j=1}^i x_j, \quad \theta_0 = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.10)$$

то

$$x_i = \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{h}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.11)$$

и подстановка (6.10), (6.11) в (6.8) дает

$$\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{h} = \frac{F + L_1\theta_{i-1} + L_2\theta_{i-1}^2}{1 - M_2(\theta_i + \theta_{i-1})}, \quad \theta_0 = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.12)$$

Разностная схема (6.12) аппроксимирует мажорантную задачу Коши (2.28), имеющую решение $\theta^*(t)$ такое, что $\dot{\theta}^*(t) = \psi^*(t)$, $0 \leq t < T^*$.

Поскольку $x_i^* = \frac{\theta_i^* - \theta_{i-1}^*}{h}$, то справедливость теоремы 1 в силу (6.9) будет следовать из неравенства

$$x_i^* \leq \dot{\theta}^*(t_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.13)$$

В частном случае, когда $L_1 = L_2 = 0$, погрешность разностной схемы (6.12) равна нулю, так как

$$\theta_i^* = \theta^*(t_i) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4M_2Fih}}{2M_2}, \quad i = \overline{1, n},$$

откуда, в силу монотонного возрастания $\dot{\theta}^*(t)$,

$$x_i^* = \frac{\theta^*(t_i) - \theta^*(t_{i-1})}{h} = \dot{\theta}^*(\xi) \leq \dot{\theta}^*(t_i), \quad \xi \in [t_{i-1}, t_i],$$

и (6.13) выполняется. Справедливость (6.13) в общем случае следует тогда из явности числителя в (6.12). Теорема 1 доказана. \square

Замечание 9. Численные результаты показывают, что при замене в числителе (6.12) хотя бы в одном слагаемом θ_{i-1} на θ_i неравенство (6.13) может нарушаться.

Теперь мы можем, учитывая оценку

$$|R_i(\bar{x}) - R_{i-1}(\bar{x})| \leq ch^2, \quad i = \overline{2, n}, \quad c = \text{const}, \quad (6.14)$$

вытекающую из стандартной оценки погрешности квадратуры правых прямоугольников при дополнительном условии $\bar{x}(t) \in C_{[0, T]}^{(1)}$, сформулировать основную теорему сходимости.

Теорема 11. Пусть

$$\gamma(T) = 2h_0 M_2 \psi(T) + 2M_2 T \psi(T) < 1. \quad (6.15)$$

Тогда

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\varepsilon_i^h| = \mathcal{O}(h). \quad (6.16)$$

Доказательство. Заменяя в (6.3) i на $i-1$, найдем разность между соседними строками СЛАУ (6.3) с учетом симметрии ядра K_2 по второму и третьему аргументам:

$$\begin{aligned} & h\varepsilon_i^h + h \sum_{j=1}^{i-1} (K_{1i,j} - K_{1i-1,j})\varepsilon_j^h + h^2 K_{2i,i,i}(\bar{x}_i + x_i^h)\varepsilon_i^h + \\ & + h^2(\bar{x}_i + x_i^h) \sum_{j=1}^{i-1} K_{2i,i,j}\varepsilon_j^h + h^2 \varepsilon_i^h \sum_{j=1}^{i-1} K_{2i,i,j}(\bar{x}_j + x_j^h) + \\ & + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{i-1} (K_{2i,j,k} - K_{2i-1,j,k})(\bar{x}_k + x_k^h)\varepsilon_j^h = R_{i-1}(\bar{x}) - R_i(\bar{x}), \quad i = \overline{2, n}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Разделим (6.17) на h , перейдем к оценке по модулю и, учитывая (6.6), (6.7), (6.14) и условие теоремы 11 (6.15), получим:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_i^h| \leq & \frac{ch}{1 - 2hM_2\psi(T) - 2M_2T\psi(T)} + \frac{L_1 + 2M_2\psi(T) + 2L_2T\psi(T)}{1 - 2hM_2\psi(T) - 2M_2T\psi(T)} \cdot \\ & \cdot h \sum_{j=1}^{i-1} |\varepsilon_j^h|, \quad i = \overline{2, n}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Кроме того, при $i = 1$ непосредственно из (6.3) имеем

$$|\varepsilon_1^h| \leq \frac{|R_1(\bar{x})|/h}{1 - 2hM_2\psi(T)},$$

и так как $|R_1(\bar{x})| \leq ch^2$, то (6.18) выполняется и для $i = 1$.

Окончательно, усиливая (6.18) и применяя разностный аналог леммы Гронуолла-Беллмана (см., например, [6], стр. 20–21), приходим к неравенству

$$|\varepsilon_i^h| \leq \frac{ch}{1 - \gamma(T)} e^{\frac{(L_1 + 2M_2\psi(T) + 2L_2T\psi(T))T}{1 - \gamma(T)}}, \quad i = \overline{1, n},$$

из которого и следует (6.16). \square

Замечание 10. Если ввести сетку узлов $t_{i-\frac{1}{2}} = (i-\frac{1}{2})h$, $i = \overline{1, n}$, и потребовать непрерывность K_{1ts^2}''' , K_{2ts^2}''' и $\bar{x}''(t)$, то приведенная техника обеспечивает доказательство сходимости метода средних прямоугольников с порядком $\mathcal{O}(h^2)$. Аналогичный результат справедлив и для метода интегрирования произведения (product integration method), рассмотренного в линейном случае в [18] и особенно эффективного, если ядра K_1 и K_2 сильно осциллируют.

Замечание 11. Результаты пункта 6 изложены в [16], [17].

7. Численные результаты

Рассмотрим в качестве тестовых два билинейных уравнения, отличающихся лишь правой частью:

$$\int_0^t (1 - (t-s))x(s)ds - \frac{1}{2} \left(\int_0^t x(s)ds \right)^2 = t - t^2, \quad (7.1)$$

$$\int_0^t (1 - (t-s))x(s)ds - \frac{1}{2} \left(\int_0^t x(s)ds \right)^2 = t. \quad (7.2)$$

Легко проверить, что (единственным) непрерывным решением (7.1) является $\bar{x}(t) = 1$, $t \in [0, T] \forall T < \infty$, при этом $k = 1$, $L_1 = 1$, $M_2 = \frac{1}{2}$, $L_2 = 0$ и, так как $\max_{t \in [0,1]} |1 - 2t| = 1$, то $F = 1$, если $T \leq 1$.

Сравнение (7.2) с (2.19) показывает, что уравнение (7.2) — мажорантное для (7.1), отвечающее набору $(k, L_1, M_2, L_2, F) \equiv (1, 1, \frac{1}{2}, 0, 1)$. Следовательно, его точное решение — функция

$$\psi^*(t) = -\frac{W(-\frac{1}{2}e^{\frac{t-1}{2}})}{1 + W(-\frac{1}{2}e^{\frac{t-1}{2}})}, \quad 0 \leq t < T^* = 2 \ln 2 - 1, \quad (7.3)$$

которая является производной от решения $\theta^*(t)$ мажорантной задачи Коши

$$\dot{\theta}(t) = \frac{1 + \theta(t)}{1 - \theta(t)}, \quad \theta(0) = 0, \quad 0 < t \leq 2 \ln 2 - 1 \approx 0.3863,$$

$$\theta^*(t) = -2W\left(-\frac{1}{2}e^{\frac{t-1}{2}}\right) - 1.$$

Применительно к (7.1) алгоритм (6.1) сводится к рекурсии

$$\theta_i = 1 - \sqrt{1 + \theta_{i-1}^2 - 2(1+h)\theta_{i-1} - 2(h - (2i-1)h^2)}, \quad (7.4)$$

$$x_i^h = \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{h}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \theta_0 = 0. \quad (7.5)$$

В таблице I приведены результаты расчетов по (7.4), (7.5) для $h = 0.1$; $h = 0.05$; $h = 0.01$.

Анализ таблицы показывает, что условие (6.15) теоремы 11, накладывающее дополнительное ограничение на величину T , не является следствием грубости применяемой техники, а отражает существо дела. Видно, что при $t \rightarrow 1$ возникает погранслоя ошибки сеточного решения. Неравенство (6.15) выполняется при $h_0 = 0.1$ и $T < 0.29$. Если, например, $T = 0.2$, то $\|\varepsilon^h\|_{C_h} = \max_{1 \leq i \leq n} |\varepsilon_i^{h=0.05}| = 0.04256$, $\|\varepsilon^{h=0.01}\|_{C_h} = 0.00949$, что дает линейную сходимость по шагу сетки.

Таблица I.

t_i	$x_i^{h=0.1}$	$x_i^{h=0.05}$	$x_i^{h=0.01}$
0.1	0.944614	0.969371	0.993302
0.2	0.924532	0.957443	0.990515
0.3	0.893969	0.938625	0.985950
0.4	0.845776	0.907417	0.977956
0.5	0.767188	0.852688	0.962672
0.6	0.636304	0.751265	0.929893
0.7	0.421267	0.557343	0.848292
0.8	0.095975	0.205154	0.610776
0.9	-0.317630	-0.310235	-0.006406
1.0	-0.734764	-0.835726	-0.943465

Применение квадратуры средних прямоугольников к (7.1) порождает рекурсию

$$\theta_i = \frac{2-h}{2} - \sqrt{\frac{(2-h)^2}{4} + \theta_{i-1}^2 - (2+h)\theta_{i-1} - 2(h - (2i-1)h^2)}, \quad (7.6)$$

$$x_{i-\frac{1}{2}}^h = \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{h}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \theta_0 = 0, \quad (7.7)$$

и при любых i и h $\theta_i = ih$ и $x_{i-\frac{1}{2}}^h = \bar{x}(t_{i-\frac{1}{2}}) = 1$.

Нулевая погрешность сеточного решения является следствием нулевой погрешности аппроксимации интегралов в (7.1) квадратурой средних прямоугольников на точном решении $\bar{x}(t) = 1$.

Для мажорантного уравнения (7.2) вместо (7.4), (7.6) имеем соответственно

$$\theta_i = 1 - \sqrt{1 + \theta_{i-1}^2 - 2(1+h)\theta_{i-1} - 2h}, \quad \theta_0 = 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad (7.4')$$

$$\theta_i = \frac{2-h}{2} - \sqrt{\frac{(2-h)^2}{4} + \theta_{i-1}^2 - (2+h)\theta_{i-1} - 2h}, \quad \theta_0 = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7.6')$$

Таблица II.

t_i	$x_i^{h=0.05}$	$x_i^{h=0.01}$	$\bar{x}_i = \psi^*(t_i)$
0.1	1.142588	1.227300	1.251235
0.2	1.484858	1.642044	1.689001
0.3	2.188318	2.614438	2.763269
0.4	6.752919	1-0.04 I	$\bar{x}(0.3862) = \infty$

Таблица III.

$t_{i-\frac{1}{2}}$	$x_{i-\frac{1}{2}}^{h=\frac{1}{20}}$	$x_{i-\frac{1}{2}}^{h=\frac{1}{60}}$	$\bar{x}_{i-\frac{1}{2}} = \psi^*(t_{i-\frac{1}{2}})$
0.075	1.179086	1.177151	1.176911
0.175	1.556047	1.550974	1.550346
0.275	2.387831	2.363315	2.360349
0.375	6.51-4.72 I	9.815176	8.751915

В таблице II наряду с расчетами по (7.4'), (7.5) с $h = 0.05$ и $h = 0.01$ приведены значения точного решения $\bar{x}(t_i) = \psi^*(t_i)$.

Появление при $t = 0.4$ комплексного корня — следствие нарушения неравенства $t < T^* = 0.3862$. Если ограничиться, как и для (7.5), значением $T = 0.2$, то $\|\varepsilon^{h=0.05}\|_{C_h} = 0.020414$, $\|\varepsilon^{h=0.01}\|_{C_h} = 0.048957$ и линейная сходимость имеет место. Аналогичные данные для квадратуры средних прямоугольников (расчеты по (7.6'), (7.7)) содержатся в таблице III. При $T = 0.275$ $\|\varepsilon^{h=\frac{1}{20}}\|_{C_h} = 0.02748$, $\|\varepsilon^{h=\frac{1}{60}}\|_{C_h} = 0.00297$, что соответствует квадратичной скорости сходимости.

Замечание 12. В [15] на модельных примерах показана сходимость квадратурных методов правых и средних прямоугольников для трилинейного уравнения (1.3), однако для теоретического обоснования сходимости необходимо использование аппарата соответствующих “ламбертоподобных” функций и их сеточных аналогов.

Замечание 13. В некоторых моделях численности популяций важную роль играет управляющее воздействие, совпадающее с правой частью Ft мажорантных интегральных уравнений. Так, задача Коши

$$\dot{\xi}(t) = k\xi(t) - Ft, \quad t > 0, \quad \xi(0) = \varepsilon > 0, \quad k, F > 0,$$

моделирует поведение неустойчивого нулевого состояния динамической системы, характерное, например, для развития эпидемии, когда эффективность борьбы возрастает пропорционально времени t . Несложный анализ показывает, что при $F < \varepsilon k^2$ экспоненциальный рост $\xi(t)$ сохраняется. При $F = \varepsilon k^2$ рост становится линейным, а если $F > \varepsilon k^2$, то в

момент времени

$$T^* = -\frac{1}{k} W\left(-1, -\frac{(F - \varepsilon k^2) e^{-1}}{F}\right) - 1$$

$\xi(T^*) = 0$. Детальнее эта проблема изложена в [19], [20]. В [20] для модели Ланкастера ведения войны двумя противниками рассмотрен аналогичный закон управления резервами слабой стороны.

Список литературы

1. *Apartsyn A.S.* Mathematical modelling of the dynamic systems and objects with the help of the Volterra integral series // EPRI-SEI Joint seminar. — Beijing, China. — 1991. — P. 117–132.
2. *Апарцин А.С.* О новых классах линейных многомерных уравнений I рода типа Вольтерра // Изв. вузов. Математика. — 1995. — № 11. — С. 28–41.
3. *Апарцин А.С.* О повышении точности моделирования нелинейных динамических систем полиномами Вольтерра // Электронное моделирование. — 2001. — Т. 23, № 6 — С. 3–12.
4. *R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare and D.J. Jeffrey.* Lambert's W function in Maple // The Maple Technical Newsletter. — 1993. — № 9.
5. *Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E., Jeffrey D.J., Knuth D.E.* On the Lambert W function // Advances Computational Maths. — 1996. — Vol. 5. — P. 329–359.
6. *Апарцин А.С.* Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1999. — 193 с.
7. СМБ. Математический анализ. Вычисление элементарных функций. — М.: Физматгиз, 1963. — 247 с.
8. СМБ. Высшая алгебра. — М.: Наука, 1965. — 300 с.
9. *Апарцин А.С.* О билинейных уравнениях Вольтерра I рода // Оптимизация, управление, интеллект. — 2004. — 2(8). — С. 20–28.
10. *Апарцин А.С.* О полилинейных уравнениях Вольтерра I рода // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 2. — С. 118–125.
11. *Апарцин А.С.* К теории полилинейных уравнений Вольтерра I рода // Оптимизация, управление, интеллект. — 2005. — 1(9). — С. 5–27.
12. *Апарцин А.С.* Неулучшаемые оценки решений некоторых классов нелинейных интегральных неравенств (в печати).
13. *Апарцин А.С., Маркова Е.В.* О численном решении билинейного уравнения Вольтерра I рода // Труды XII Байкальской международной конференции. — Иркутск, ИСЭМ СО РАН. — 2001. — Т. 4. — С. 20–24.
14. *Апарцин А.С., Маркова Е.В.* Численное решение полилинейных уравнений Вольтерра I рода методом кубатур. Материалы VI Международного семинара „Кубатурные формулы и их приложения“. — Уфа, ИМВЦ УфНЦ РАН. — 2001. — С. 5–9.
15. *Apartsyn A.S., Markova E.V.* On numerical solution of the multilinear Volterra equations of the first kind // Proceedings of The International Conference on Computational Mathematics, Part 2. — Novosibirsk. — 2002. — P. 322–326.
16. *Апарцин А.С.* О сходимости численных методов решения билинейного уравнения Вольтерра I рода // ЖВМиМФ. — 2007. — Т. 47, № 8. — С. 1380–1388.

17. *Апарцын А.С.* К обоснованию сходимости численных методов решения билинейного уравнения Вольтерра I рода // Труды III Межвузовской зональной конференции, посвященной памяти Б.А. Бельтюкова „Математика и проблемы ее преподавания в вузе“. — Иркутск: Изд-во Иркутского государственного педагогического университета, 2007. — С. 28–31.
18. *Linz P.* Product integration method for Volterra integral equations of the first kind // ВIT, 1971. — Vol. 11. — P. 413–421.
19. *Апарцын А.С., Щербинин М.С.* Моделирование динамики численности популяции на базе уравнений, мажорирующих билинейные уравнения Вольтерра I рода // Оптимизация, управление, интеллект. — 2005. — 2(10). — С. 37–44.
20. *Апарцын А.С., Щербинин М.С.* О некоторых задачах управления численностью популяции (в печати).

A. S. Apartsyn

Polilinear integral Volterra equations of the first kind: the elements of the theory and numeric methods

Abstract. This paper contains the review of the results obtained in the last years in the theory and numeric methods of the solution of polilinear integral Volterra equations of the first kind.