Серия «Математика»
Том 1 (2007), № 1, С. 93—100

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.983.51

Фундаментальные оператор-функции одного дифференциального оператора

Е. Ю. Гражданцева (geu@math.isu.ru)
Иркутский государственный университет, Иркутск

Аннотация. В работе при различных предположениях относительно операторных коэффициентов построена фундаментальная оператор-функция полного вырожденного дифференциального оператора второго порядка.

Ключевые слова: фундаментальная оператор-функция, банахово пространство, фредгольмов оператор

Введение

В приложениях возникают начально-краевые задачи, которые можно трактовать как дифференциальные уравнения в банаховых пространствах с необратимым оператором при старшей производной (в иной терминологии такие уравнения также называют уравнениями соболевского типа). Возрастание интереса к уравнениям, неразрешенным относительно старшей производной, обусловлено необходимостью решения важных прикладных задач, в частности, в области физики атмосферы, физики плазмы, теории электрических цепей, динамике колебаний стратифицированной жидкости, теории флаттера, теории ползучести металлов, теории фильтрации жидкости и многих других, а также естественным стремлением к изучению новых математических объектов.

В настоящее время имеется огромное количество теоретических и прикладных работ, посвященных изучению уравнений и систем, неразрешенных относительно старшей производной.

Однако непосредственно построение обобщенного (и непрерывного в том числе) решения сопровождается очень громоздкими и достаточно неудобными выкладками, что в свою очередь затрудняет поиск решения.

Понятие фундаментальной оператор-функции, введенное М.В. Фалалеевым, как расширение понятия фундаментального решения дифференциального (интегрального и интегро-дифференциального) оператора на банаховы пространства, дает возможность отойти от прямого построения обобщенного решения. При этом обобщенное решение исследуемой задачи записывается в виде свертки фундаментальной оператор-функции с источником (правой частью уравнения — свободной функцией). Таким образом, знание фундаментальной оператор-функции позволяет в замкнутой форме выписывать обобщенные решения и определять условия существования непрерывного решения исследуемой задачи, избегая непосредственного построения последнего.

В работе исследуется полный дифференциальный оператор второго порядка с фредгольмовым оператором при старшей производной. Для этого оператора, используя различные подходы, построена фундаментальная оператор-функция.

1. Предисловие

1.1. Понятие фундаментальной оператор-функции

Обозначим через $K'(R_+, E)$ множество обобщенных функций, носители которых находятся в $[0, +\infty)$.

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $k(t)$ — оператор-функция, действующая из E_1 в E_2, $k(t)$ — линейный замкнутый $\forall\ t$, $D(k(t)) = D(k)$ не зависит от t и $D(k) = E_1$, $k(t)$ — сильно непрерывна на D_k, причем существует $k^*(t) : E_2^* \to E_1^*$ при почти всех $t \in R$, $k^*(t)$ — линейный, $f(t) \in D'(R)$ (здесь через $D'(R)$, следуя [1], обозначено пространство $K'(R, R)$).

Выражение вида $k(t)f(t)$ назовем *обобщенной оператор-функцией.*

Определение 1 [2]. *Сверткой обобщенной оператор-функции $k(t)f(t)$ и обобщенной функции $v(t) \in K'(R, E_1)$* назовем обобщенную функцию $k(t)f(t) * v(t) \in K'(R, E_2)$ (если она существует), действующую по правилу

$$k(t)f(t) * (v(t), s(t)) = (f(t), (v(\tau), k^*(t)s(t+\tau)))\ \ \forall s(t) \in K(R, E_2^*).$$

Рассмотрим дифференциальный оператор вида

$$L(D) = \sum_{k=0}^{n} A_k \frac{d^k}{dt^k},$$

где A_k — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $\overline{\bigcap\limits_{k=0}^{n} D(A_k)} = E_1$.

Соответствующая ему обобщенная оператор-функция [3] имеет вид

$$L(\delta(t)) = \sum_{k=0}^{n} A_k \delta^{(k)}(t).$$

Определение 2. Фундаментальной оператор-функцией дифференциального оператора $L(D)$ на классе $K'(R, E_2)$ называется такая оператор-функция $E(t)$, что $\forall u(t) \in K'(R, E_2)$ на основном пространстве $K(R, E_2^*)$ справедливо равенство

$$L(\delta(t)) * E(t) * u(t) = u(t).$$

1.2. Некоторые сведения о жордановых наборах

Пусть A_1, A_0, B — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, где E_1, E_2 — банаховы пространства, такие, что $\overline{D(B)} = \overline{D(A_0) \cap D(A_1)} = E_1$, $\overline{R(B)} = R(B)$, $D(B) \subset (D(A_0) \cap D(A_1)), \dim N(B) = \dim N(B^*) = n \geq 1$, B — фредгольмов.

Будем предполагать следующее:

A) $\{\varphi_i,\ i = \overline{1,n}\}$ — базис $N(B)$, $\{\psi_j,\ j = \overline{1,n}\}$ — базис $N(B^*)$, существуют такие элементы $\varphi_i^{(1)} = \varphi_i\ \varphi_i^{(k)} \in E_1,\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,p_i},\ p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$, что справедливы соотношения

$$B\varphi_i^{(1)} = 0, B\varphi_i^{(2)} = A_1\varphi_i^{(1)}, B\varphi_i^{(k)} = A_1\varphi_i^{(k-1)} + A_0\varphi_i^{(k-2)}, k = \overline{3,p_i}, i = \overline{1,n};$$

$$\langle A_1\varphi_i^{(k)} + A_0\varphi_i^{(k-1)}, \psi_j \rangle = \begin{cases} 0, & k \neq p_i, \\ \delta_{ij}, & k = p_i,\ i, j = \overline{1,n}, \end{cases}$$

причем, элементы $\varphi_i^{(k)},\ k > p_i$ строятся формально следующим образом: $\varphi_i^{(k)} = \Gamma(A_1\varphi_i^{(k-1)} + A_0\varphi_i^{(k-2)})$, где Γ — оператор Шмидта [4].

Для присоединенных элементов $\psi_j^{(k)}$ справедливы аналогичные формулы $\psi_j^{(k)} = \Gamma^*(A_1^*\psi_j^{(k-1)} + A_0^*\psi_j^{(k-2)})$, и существуют элементы $\gamma_i,\ z_i,\ i = \overline{1,n}$ такие, что пары $\{\varphi_i, \gamma_i\}$ и $\{z_i, \psi_i\}$ биортогональны и

$$z_i = A_1\varphi_i^{(p_i)} + A_0\varphi_i^{(p_i-1)}, \quad \gamma_i = A_1^*\psi_i^{(p_i)} + A_0^*\psi_i^{(p_i-1)},\ \ i = \overline{1,n}.$$

Условие A) означает, что оператор B имеет полный биканонический [5] A_1, A_0 — жорданов набор.

1.3. Определения и свойства семейства M, N-функций

Приведем здесь в удобных для нас обозначениях некоторые сведения из [6].

Пусть E — банахово пространство, A_1 и A_0 — линейные коммутирующие операторы с $\overline{D(A_1)} = \overline{D(A_0)} = E$.

Определение 3 [6]. Однопараметрическое семейство ограниченных коммутирующих операторов $M(t),\ N(t)$ называется ω-сильно непрерывным семейством M, N-*функций*, порожденных операторами A_1 и A_0, если

1. $M(t+h) = M(t)M(h) + A_0 N(t)N(h)$;
$N(t+h) = M(t)N(h) + M(h)N(t) + A_1 N(t)N(h),\ \ t, h \geq 0$;
2. $N(0) = 0,\ M(0) = I$ и существуют $N'(0) = I,\ M'(0) = 0$;
3. Оператор-функции $M(t),\ N(t)$ сильно непрерывны по $t \geq 0$;
4. $\exists k > 0,\ \omega \geq 0 :\ \|M(t)\|,\ \|N(t)\| \leq k\ \exp(\omega t),\ t \geq 0$.

Определение 4. Операторы

$$\tilde{M}''(0)u = \lim_{h\to\infty} \frac{M(2h) - 2M(h) + I}{h^2} u, \quad \tilde{N}''(0)u = \lim_{h\to\infty} \frac{N(2h) - 2N(h)}{h^2} u,$$

определенные на тех $u \in E$, для которых соответствующий предел существует, называются производящими семейства M, N-*функций*.

1.4. Полиномиально относительно ограниченные пучки операторов

Приведем в удобных для дальнейшего исследования обозначениях некоторые сведения из [7].

Пусть $B,\ A_1,\ A_0$ — линейные непрерывные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2.

Определение 5 [7]. B-резольвентным множеством операторного пучка (A_1, A_0) называется множество

$$\rho^B(A_1, A_0) \equiv \{\mu \in C :\ R_\mu^B(A_1, A_0) = (\mu^2 B - \mu A_1 - A_0)^{-1} \in L(E_1, E_2)\},$$

где $L(E_1, E_2)$ — множество линейных непрерывных операторов, действующих из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2.

Определение 6 [7]. Оператор-функцию $R_\mu^B(A_1, A_0)$ комплексной переменной μ называют B-резольвентой пучка операторов (A_1, A_0).

Определение 7 [7]. Операторный пучок (A_1, A_0) называют полиномиально ограниченным относительно B, если $\exists a \in R_+$ такое, что $\{\mu \in C,\ |\mu| > a\} \subset \rho^B(A_1, A_0)$.

Пусть пучок (A_1, A_0) полиномиально ограничен относительно оператора B и выполнены условия [7]:

B) $\oint\limits_\gamma R_\mu^B(A_1, A_0) d\mu \equiv 0\ \ \forall \gamma \equiv \{\mu \in C :\ |\mu| = r > a\}$;

C) $BR_\mu^B(A_1, A_0)A_1 = A_1 R_\mu^B(A_1, A_0)B \quad \forall \mu \in \rho^B(A_1, A_0)$, т.е. пара операторов B и A_1 псевдокоммутируют относительно $R_\mu^B(A_1, A_0)$.

В случае B)

1) операторы [7]

$$P = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \mu R_\mu^B(A_1, A_0)Bd\mu, \;\; Q = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} BR_\mu^B(A_1, A_0)d\mu$$

являются проекторами в E_1 и E_2 и индуцируют разложения этих пространств в прямые суммы:

$$E_1 = E_1^0 \otimes E_1^1 = \ker P \otimes im\ P, \quad E_2 = E_2^0 \otimes E_2^1 = \ker Q \otimes im\ Q;$$

2) действие операторов $B,\ A_1,\ A_0$ расщепляются, причем операторы $A_0^0 : E_1^0 \to E_2^0,\ B^1 : E_1^1 \to E_2^1$ непрерывно обратимы.

В случае C) пары операторов B и A_0, A_0 и A_1 также псевдокоммутируют относительно $R_\mu^B(A_1, A_0)$.

2. Фундаментальные оператор-функции полного дифференциального оператора 2-го порядка с фредгольмовым оператором при старшей производной

Рассмотрим дифференциальный оператор вида

$$B\frac{d^2}{dt^2} - A_1\frac{d}{dt} - A_0. \tag{$*$}$$

2.1. Фундаментальная оператор-функция в условиях коммутирования

Пусть $B,\ A_1,\ A_0$ — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, B — фредгольмов, E_1, E_2 — банаховы пространства, $D(B) \subset (D(A_1) \cap D(A_0))$, $\overline{D(B)} = \overline{D(A_1) \cap D(A_0)}$, $\overline{R(B)} = R(B)$, $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n \geq 1$ и выполняется условие A) — оператор B имеет полный биканонический A_1, A_0-жорданов набор.

Допустим выполнимость следующих условий:

D) операторы $A_0\Gamma$ и $A_1\Gamma$ коммутируют;

E) операторы $A_0\Gamma$ и $A_1\Gamma$ являются производящими операторами ω-сильно непрерывного семейства M, N-функций [6].

Теорема 1 [8]. *Если выполнены условия A), D), E), то дифференциальный оператор (*) имеет фундаментальную оператор-функцию вида*

$$E(t) = \Gamma N(t)\theta(t) * (\Re(t)\theta(t) + \\ + I\delta(t)) * \left((I - Q)\delta(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \langle \bullet, \psi_i^{(j)} \rangle z_i \delta^{(p_i+1-j)}(t) \right),$$

где $\Re(t)$ *— резольвента ядра* $-\sum\limits_{i=1}^{n} Q_i N^{(p_i+2)}(t)$.

Пусть выполняется следующее условие:

F) операторное уравнение $X^2 - A_1\Gamma X - A_0\Gamma = 0$ имеет пару решений $X_1,\ X_2$ таких, что

$$X_1 + X_2 = A_1\Gamma, \quad X_1X_2 = X_2X_1 = -A_0\Gamma, \quad V = (X_1 - X_2)^{-1}.$$

Заметим, что условие F) обеспечивает псевдокоммутируемость операторов $A_0,\ A_1$ относительно оператора Γ, т.е. $A_1\Gamma A_0 = A_0\Gamma A_1$. (Здесь и далее в этой главе Γ — оператор Шмидта для оператора B.)

Введем в рассмотрение оператор-функцию

$$U(t) = (\exp X_1 t - \exp X_2 t).$$

Теорема 2 [9]. *Если выполнены условия A), F), оператор* B *— фредгольмов, то вырожденный дифференциальный оператор (*) имеет фундаментальную оператор-функцию вида*

$$E(t) = \Gamma\delta(t) * U(t)V\theta(t) * (R(t) + I\delta(t)) * \left(I\delta(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i}\langle \bullet, \psi_i^{(p_i+1-k)}\rangle z_i \delta^{(k)}(t)\right),$$

где $R(t)$ *— резольвента ядра* $-\sum\limits_{i=1}^{n} Q_i U^{(p_i+2)}(t)V\theta(t)$.

2.2. Фундаментальная оператор-функция в условиях спектральной ограниченности

Пусть $B,\ A_1,\ A_0$ — линейные непрерывные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, операторный пучок (A_1, A_0) является [7] полиномиально ограниченным относительно B, оператор B необратим. Это позволяет рассмотреть случай, когда ядро оператора B может быть бесконечномерным или длина жордановой цепочки равна бесконечности.

Теорема 3 [10]. *Если операторный пучок* (A_1, A_0) *полиномиально ограничен относительно оператора* B, *выполнены условия D), E), то дифференциальный оператор (*) имеет на классе* $K'(R, E_2)$ *фундаментальную оператор-функцию вида*

$$E(t) = N(t)(B^1)^{-1}Q\theta(t) - \sum_{q=0}^{\infty} K_q^2 (A_0^0)^{-1}(I - Q)\delta^{(q)}(t),$$

где [7] $N(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} R_\mu^B(A_1, A_0)Be^{\mu t}d\mu,\ N(0) = 0,\ N'(0) = P,\ BN''(0) = A_1P = QA_1,\ \{K_q^1, K_q^2\}$ *— семейства операторов, определенные следу-*

ющим образом: $K_0^1 = I,\ K_0^2 = I,\ K_1^1 = H_0,\ K_2^1 = -H_1,\ K_{q+1}^1 = K_q^2 H_0,\ K_{q+1}^2 = K_q^1 - K_q^2 H_1,$ *где* $H_0 = (A_0^0)^{-1}B^0,\ H_1 = (A_0^0)^{-1}A_1^0.$

Замечание. Если ∞ — несущественно особая точка [7], B — резольвенты пучка операторов (A_1, A_0), т.е. $\exists p \in \{0\} \cup N$ такое, что $K_j^1 \neq 0,\ K_j^2 \neq 0$ при $j = \overline{0,p}$, но $K_{p+1}^1 \equiv K_{p+1}^2 \equiv 0$, тогда фундаментальная оператор-функция рассматриваемого дифференциального оператора (*) будет иметь вид

$$E_1(t) = N(t)(B^1)^{-1}Q\theta(t) - \sum_{q=0}^{p} K_q^2 (A_0^0)^{-1}(I-Q)\delta^{(q)}(t).$$

Список литературы

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
2. *Фалалеев М.В.* Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах // СМЖ.— 2000. — Т. 41, № 5. — С. 1167–1182.
3. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsin A., Falaleev M.* Lypunov-Schmidt Method in Nonlinear Analysis and Application. — Kluwer Academic Publishers, 2002. — 566p.
4. *Вайнберг М.М. Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука. — 1969. — 528 с.
5. *Логинов Б.В., Русак Ю.Б.* Обобщенные жордановы структуры в теории ветвления // Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных. — Ташкент. — ФАН. — 1978. — С. 133–148.
6. *Иванов В.К., Мельникова И. В., Филинков А.И.* Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. — М.: Наука, 1995. — 176с.
7. *Замышляева А.А.* Исследование одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка. — Дис... канд. физ.-мат. наук. — Челябинск, 2003. — 101 с.
8. *Гражданцева Е.Ю.* Фундаментальная оператор-функция полного вырожденного дифференциального оператора второго порядка в банаховых пространствах в условиях псевдокоммутирования // Труды Второй Восточно-Сибирской зональной межвузовской конференции по математике и проблемам ее преподавания в вузе. — Иркутск: Изд-во Иркут. гос. пед. ун-та. — 2003. — С. 21–25.
9. *Гражданцева Е.Ю.* Фундаментальная оператор-функция вырожденного сингулярного полного дифференциального оператора второго порядка в банаховых пространствах // Труды XIII Байкальской международной школы-семинара. — Том 3. Обратные и некорректные задачи прикладной математики. — Иркутск: ИСЭМ СО РАН. — 2005. — С. 112–117.
10. *Фалалеев М.В., Гражданцева Е.Ю.* Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях спектральной ограниченности // Дифференциальные уравнения. 2006. — Т. 42, № 6. — С. 769–774.

E. U. Grazhdantseva

The fundamental operator-functions of a differential operator

Abstract. In this paper on the basis of various conditions on operator coefficients, a fundamental operator-function of the full singular differential operator of the second order is contructed.