Серия «Математика»
Том 1 (2007), № 1, С. 267—274

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.968

Существование и структура решений систем нелинейных интегро-функциональных уравнений Вольтерры первого рода *

Н. А. Сидоров (`sidorov@math.isu.runnet.ru`)
Иркутский госуниверситет, ИДСТУ СО РАН, Иркутск

А. В. Труфанов (`atrufanov@mail.ru`)
Иркутский госуниверситет, Иркутск

Д. Н. Сидоров (`dsidorov@isem.sei.irk.ru`)
Институт систем энергетики СО РАН, Иркутск

Аннотация. Доказаны теоремы существования обобщенных решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерры первого рода. Обобщенные решения строятся в пространстве распределений с точечным носителем.

Ключевые слова: Обобщенное решение, нелинейные системы, уравнения Вольтерры, функция Дирака.

Рассматривается система

$$\int_0^t \sum_{j=1}^m K_{ij}(t,s)\Big(x_j(s) + \sum_{s=1}^m a_{js} x_j(\alpha s) + g_j(s^l x(s), s)\Big)\, ds = \tag{1}$$

$$= f_i(t),\ i = 1, .., m,$$

где матрица K и вектор-функции g, f – аналитические в окрестности нуля, причем

$$K(t,s) = \sum_{i=0}^n K_{n-i}^n t^{n-i} s^i + O((|t| + |s|)^{n+1}),$$

$$\mathbf{det} K_{n-i}^n \neq 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

* Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 05-01-00336), программой НАТО (проект RIG981276), Иркутским Государственным Университетом (проект 2007-01-03)

$$g_j(s^l x(s), s) = g_j(s^{l_{1j}} x_1(s), ..., s^{l_{mj}} x_m(s), s),$$

$$\min_{ij} l_{i\,j} = l.$$

В работе предполагается, что $l > n$. Строятся обобщенные решения с точечным носителем в сингулярной части вида

$$x(t) = c_0\delta(t) + c_1\delta^{(1)}(t) + \ldots + c_n\delta^{(n)}(t) + u(t), \tag{2}$$

где $\delta(t)$ — функция Дирака,$c_0, ..., c_n$ – постоянные векторы из R^m, $u(t)$ — регулярная вектор-функция. Доказаны теоремы существования непрерывных и обобщенных решений (2) систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерры первого рода (1). В первых двух теоремах предполагается, что в уравнении (1) нет возмущения аргумента, то есть матрица $A = ||a_{j\,s}|| \equiv 0$. В теоремах 1, 2, 3 $u(t)$ — аналитическая в окрестности точки $t = 0$, в теореме 4 функция $u(t)$ строится в виде логарифмо-степенного ряда.

Совокупность всех бесконечно дифференцируемых финитных функций с носителями в окрестности $(-\rho, \rho)$ обозначим через $D_{(-\rho,\rho)}$. Множество линейных непрерывных функционалов, определенных на $D_{(-\rho,\rho)}$, обозначим через $D'_{(-\rho,\rho)}$, а подмножество его элементов вида (2) с сингулярностью n-го порядка с носителем в нуле – через $D'_{n(-\rho,\rho)}$. Таким образом, искомое решение (2) уравнения (1) строится в классе $D'_{n(-\rho,\rho)}$ и удовлетворяет уравнению (1) в смысле теории распределений Соболева–Шварца. Сразу отметим, что при $n < l$ $\forall x \in D'_{n(-\rho,\rho)}$ произведение $t^l x = t^l u(t)$ является регулярной функцией, что решает для уравнения (1) при $l > n$ проблему нелинейных операций с такими обобщенными функциями.

Так как в пространстве D' при $i, j = 0, 1, \ldots, n$, $k \geq n$ справедливы тождества

$$t^{k-i}\Theta * s^i\delta^{(j)}(s) = (-1)^j j! t^{k-j}\delta_{ij},$$

где Θ — функция Хевисайда, δ_{ij} — символ Кронекера, то имеет место равенство

$$\int_0^t \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} K^k_{k-i} t^{k-i} s^i (c_0\delta(s) + \ldots + c_n\delta^{(n)}(s))\, ds =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j j! \sum_{k=n}^{\infty} K^k_{k-j} t^{k-j} c_j.$$

Заметим, что

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{\partial^j K(t,s)}{\partial s^j}\Big|_{s=0} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j j! \sum_{k=n}^{\infty} K^k_{k-j} t^{k-j}.$$

Введем матрицу
$$A = [a_{js}]_{j,s=1}^{m}.$$
Ниже в теоремах 1 и 2 предполагается, что $A = 0$, а в теоремах 3 и 4 $A \neq 0$. Если $A = 0$, то элемент $x \in D'_{n(-\rho,\rho)}$ может быть решением уравнения (1) только тогда, когда регулярная составляющая из представления (2) удовлетворяет уравнению

$$\int\limits_0^t K(t,s)(u(s) + g(s^l u(s), s))\, ds = r(t, c_0, \ldots, c_n),$$

где
$$r(t, c_0, \ldots, c_n) = f(t) - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{\partial^j K(t,0)}{\partial s^j} c_j.$$
Определим постоянные векторы $c_0, \ldots, c_n$ из системы линейных алгебраических уравнений

$$r_t^{(i)}(0, c_0, \ldots, c_n) = 0, \quad i = 0, \ldots, n \tag{3}$$

с нижней блочно-треугольной матрицей с невырожденными матрицами на диагонали. Поэтому постоянные векторы $c_n, \ldots, c_0$ определяются последовательно и единственным образом.

Теорема 1. *Пусть* $l > n$, $A = 0$

$$\mathbf{det}\Big(\sum_{i=0}^{n} K_{n-i}^{n} \frac{1}{i+j}\Big) \neq 0, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

$$\mathbf{det}\Big(\sum_{i=0}^{n} K_{n-i}^{n}\Big) \neq 0,$$

$$\mathbf{det} K_{n-i}^{n} \neq 0, i = 0, 1, \ldots, n.$$

Тогда система (1) в классе $D'_n(-\tilde{\rho}, \tilde{\rho})$ *имеет единственное решение (2), где постоянные* $c_0, \ldots, c_n$ *определяются единственным образом из системы линейных алгебраических уравнений, непрерывная вектор-функция* $u(t)$ *строится методом последовательных приближений.*

Доказательство.

Коэффициенты $c_0, ..., c_n$ сингулярной составляющей решения (2) определены выше из системы (3). Для построения регулярной вектор-функции $u(t)$ решим при найденных $c_0, \ldots, c_n$ систему

$$\int\limits_0^t K(t,s)(u(s) + g(s^l u(s), s))\, ds = r(t, c_0, \ldots, c_n), \tag{4}$$

применив комбинацию метода неопределенных коэффициентов с методом последовательных приближений.

Для краткости введем обозначение

$$\Phi(u,t) := \int_0^t K(t,s)(u(s) + g(s^l u(s), s))\, ds - r(t,c) = 0. \tag{5}$$

Предположим, что однородная система

$$\int_0^t \sum_{i=0}^{n} K_{n-i}^{n} t^{n-i} s^i x(s)\, ds = 0 \tag{6}$$

имеет только тривиальное решение. Это будет выполнено, если

$$\mathbf{det}\Big(\sum_{i=0}^{n} K_{n-i}^{n} (i+j)^{-1}\Big) \neq 0$$

при $j = 1, 2, \ldots$ Тогда для любого натурального N найдутся вектор-функции u_i такие, что

$$|\Phi(u_0 + u_1 t + \ldots + u_N t^N, t)| = O(|t|^{n+N+1}). \tag{7}$$

Так как однородная система (6) имеет только нулевое решение, то векторы u_i определяются однозначно методом неопределенных коэффициентов при подстановке полинома

$$u^0(t) = u_0 + u_1 t + \ldots + u_N t^N$$

в уравнение (5).

Далее подставим вектор-функцию

$$u(t) = u^0(t) + t^N v(t) \tag{8}$$

в систему (5) и приведем члены со степенями t^i, $i = n, n+1, \ldots, n+N$ с учетом равенств (4) и задания полинома $u^0(t)$. Полученное равенство продифференцируем по t и будем искать методом последовательных приближений вектор-функцию v из эквивалентной системы интегральных уравнений

$$v = F(v,t). \tag{9}$$

Здесь

$$F(v,t) = K^{-1}(t,t)t^{-N}\Big\{-K(t,t)(u^0(t) + g(t^l u^0(t) + t^{l+N} v(t), t)) -$$

$$- \int_0^t K_t'(t,s)(u^0(s) + s^N v(s) + g(s^l u^0(s) + s^{l+N} v(s), s))\, ds + r_t'(t,c)\Big\}.$$

Предположим, что
$$\mathbf{det}\sum_{i=0}^{n} K_{n-i}^{n} = a \neq 0.$$
Покажем, что тогда оператор F при достаточно большом N удовлетворяет в шаре $||x|| \leq r$ пространства $C_{[-\rho,\rho]}$ условиям принципа сжимающих отображений. Действительно,
$$||g(s^l(u^0(s) + s^N v_1(s)), s) - g(s^l(u^0(s) + s^N v_2(s)), s)|| \leq$$
$$\leq |s|^{l+N} C_1 ||v_1 - v_2||$$
при $\forall v_1, v_2$ из шара $S(0, r) \subset C_{[-\rho,\rho]}$.

Далее, так как
$$||K_t'(t, s)|| \leq C_2(|t| + |s|)^{n-1},$$
то
$$\left|\left|\frac{1}{t^{n+N}}\int_0^t K_t'(t, s)s^N\, ds\right|\right| \leq \frac{2^{n-1}C_2}{N+1}.$$
В силу этих оценок найдется постоянная c такая, что
$$||F(v_1, t) - F(v_2, t)|| \leq \frac{c}{N+1}\|v_1 - v_2\|.$$
Зафиксируем $q < 1$ и выберем $N > c/q - 1$. Тогда оператор F в шаре $\|v\| \leq r$ пространства $C_{[-\rho,\rho]}$ будет сжимающим с коэффициентом сжатия q. Так как в силу оценки (7)
$$||F(0, t)|| = O(|t|),$$
то найдется такое $\tilde{\rho} \in (0, \rho]$, что $\max\limits_{|t|\leq\tilde{\rho}} ||F(0, t)|| \leq (1-q)r$. Следовательно, сжимающий оператор F переводит шар $\|v\| \leq r$ пространства $C_{[-\tilde{\rho},\tilde{\rho}]}$ в себя. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы 1* $\sum_{i=0}^{n} K_{n-i}^{n} = 0$ *и при этом*
$$\left.\frac{\partial^i K(t, s)}{\partial t^i}\right|_{s=t} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, r-1,$$
$$\left.\frac{\partial^r K(t, s)}{\partial t^r}\right|_{s=t} = O(t^{n-r}), \quad r \leq n.$$
Тогда утверждения теоремы 1 остаются справедливыми.

Лемма 1. Пусть коэффициенты ядра $K_{ij}(t,s)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, функции $f_i(t)$ являются аналитическими в некоторой окрестности нуля, тогда вектор-функция

$$\omega(t) = c_0\delta(t) + c_1\delta^{(1)}(t) + \ \dots\ + c_n\delta^{(n)}(t) + p(t)$$

удовлетворяет системе первых m уравнений системы

$$\begin{cases} \int\limits_0^t \sum\limits_{j=1}^m K_{ij}(t,s)\omega_j(s)ds = f_i(t), \quad i = \overline{1,m} \\ x_j(t) + \sum\limits_{s=1}^m a_{js}x_s(\alpha t) + g_j(t^l x(t), t) = \omega_j(t), \quad j = \overline{1,m}. \end{cases}$$

где векторы констант $c_0,\ \dots\ ,c_n$ определяются из системы (3), вектор-функция $p(t)$ — единственное регулярное решение уравнения

$$\int\limits_0^t K(t,s)p(s)ds = r(t,c_0,\dots,c_n).$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы 1, матрица* $A \neq 0$, $0 < |\alpha| < 1$ *и*

$$\mathbf{det}\left(E_m + \frac{1}{\alpha^i|\alpha|}A\right) \neq 0,\ i = 0,1,...,n, \tag{10}$$

$$\mathbf{det}\left(E_m + \alpha^j A\right) \neq 0,\ j = 0,1,2,.... \tag{11}$$

Тогда уравнение (1) имеет обобщенное решение

$$x(t) = \left(E_m + \frac{1}{\alpha^0|\alpha|}A\right)^{-1} c_0\delta(t) + \ \dots \tag{12}$$

$$\dots\ + \left(E_m + \frac{1}{\alpha^n|\alpha|}A\right)^{-1} c_n\delta^{(n)}(t) + u(t),$$

где векторы констант $c_0,\ \dots\ ,c_n$ *определяются из системы (3), регулярная вектор-функция* $u(t)$ *является аналитической в окрестности нуля.*

Рассмотрим случай, когда условие (11) не выполняется при $j = k$. Введем обозначение $C(i) \overset{\triangle}{=} (E_m + \alpha^i A)$. Пусть

$$\begin{aligned} &\mathbf{det}(C(k)) = 0, \\ &\mathbf{det}(C(j)) \neq 0,\ j = 0,1,...,k-1,k+1,... \end{aligned} \tag{13}$$

размерность ядра $\mathbf{dim}N(C(k)) = d$ и матрица $C(k)$ имеет полный $(-A)$ - жорданов набор $\{\varphi_i^{(j)}\}, i = \overline{1,d}, j = \overline{1,p_i}$, т.е выполняются равенства

$$C(k)\varphi_i^{(1)} = 0,\ i = \overline{1,d}; C(k)\varphi_i^{(j)} = (-A)\varphi_i^{(j-1)},\ i = \overline{1,d}, j = \overline{2,p_i},$$

$$\mathbf{det}|| < (-A)\varphi_i^{(p_i)}, \psi_k > || \neq 0, i, k = \overline{1,d} \tag{14}$$

где векторы ψ_j $j = \overline{1,d}$ — элементы базиса пространства нулей матрицы $C(k)^T$, числа p_i, $i = \overline{1,d}$ суть длины цепочек $(-A)$-присоединенных элементов.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия леммы 1, матрица $A \neq 0$, $0 < |\alpha| < 1$, выполнены условия (10), а также (13) и (14). Тогда система (1) имеет решение вида (12), где точка $t = 0$ является логарифмической особой точкой регулярной составляющей u(t),*

$$u(t) = u^N(t) + t^N v(t), v(0) = 0,$$

причем

$$u^N(t) = \sum_{i=0}^{k-1} u_i t^i + t^k(u_{kp}\ln^p|t| + ... + u_{k1}\ln|t| + u_{k0}) + \sum_{i=k+1}^{N} t^i \sum_{j=0}^{z_i} u_{ij}\ln^j|t|,$$

где $p = \max p_i$, z_i — определенные натуральные числа. При этом d координат векторного коэффициента u_{k0} останутся свободными параметрами в соответствующем решении системы (1), функция $v(t)$ строится методом последовательных приближений.

Доказательства теорем 2, 3 и 4, как и теоремы 1, используют принцип сжатых отображений в сочетании с методом неопределенных коэффициентов для построения начальных приближений. Детали приведены в работе [1].

Замечание 1.
Если A — самосопряженная матрица, то $p_1 = \ldots p_d = 1$.

Замечание 2.
Всегда найдутся базисы $\{\phi_i\}, \{\psi_i\}$, для которых будут выполнены условие (14).

Замечание 3.
Если в Теореме 4 $C(k_i) = 0, i = 1, ..., s., s \geq 2$, то регулярную составляющую $u(t)$ решения 6 тоже можно построить в виде логарифма степенного ряда, но процесс построения существенно усложняется.

Пример.
Рассмотрим систему уравнений

$$\int_0^t (t^2+ts-2s^2)(x_1(s)+s^5x_2^2(s))\,ds = 1+t.$$

$$\int_0^t (t^2+ts-2s^2)(x_2(s)+s^6x_1(s)x_2(s))\,ds = 2+t^2+\frac{5}{6}t^3.$$

$$\int_0^t (t^2+ts-2s^2)(x_3(s)+s^5x_3(s)x_2(s))\,ds = 3+t+t^2+t^3.$$

Здесь выполнены условия теоремы 2 при $n=2$, $l=5/2$, $p=1$. В классе D' существует решение

$$x_1(t) = \delta(t) - \delta^{(1)}(t) - \frac{1}{14}t^5 + O(t^6),$$

$$x_2(t) = 2\delta(t) - \frac{1}{4}\delta^{(2)}(t) + 1 + O(t),$$

$$x_3(t) = 3\delta(t) - \delta^{(1)}(t) - \frac{1}{4}\delta^{(2)}(t) + \frac{6}{5} + O(t).$$

Список литературы

1. *Сидоров Н. А., Сидоров Д. Н.* Существование и построение обобщенных решений нелинейных интегральных уравнений Вольтерры первого рода //Дифференц. уравнения.— 2006. — Т. 42. № 9.— С. 1243–1247.
2. *Сидоров Н. А., Труфанов А. В.* Структура решений операторных уравнений с функциональными возмущениями// Труды Средневолжского Математического общества.— 2006. Т. 8. № 1.—С. 104–109.
3. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М: Наука, 1969.
4. *Магницкий Н. А.* Асимптотики решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода.—// Докл. АН СССР. 1983.— Т. 269. № 1.— С. 29–32.

N. A. Sidorov, A. V. Trufanov, D. N. Sidorov

Existance and structure of solutions of systems of nonlinear Volterra integral-functinal equations of the first kind

Abstract. Generalized solutions existance theorems are proved for systems of nonlinear Volterra integral-functinal equations of the first kind. Generalized solutins are constructed in the distribution space with point support.