Серия «Математика»
Том 1 (2007), № 1, С. 245—253

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.946

Преобразование годографа и нелинейные уравнения математической физики

Э. И. Семенов (semenov@icc.ru)
ИДСТУ СО РАН, г. Иркутск

Аннотация. В статье рассматривается преобразование годографа для двух физически важных нелинейных уравнений математической физики: неавтономного уравнения нелинейного тепломассопереноса и уравнения нелинейной диффузии третьего порядка. Приведены классы эквивалентности указанных уравнений. Выделены уравнения нелинейного тепломассопереноса, которые при определенных значениях параметров сводятся к линейным уравнениям с частными производными.

Ключевые слова: преобразование годографа, тепломассоперенос, уравнение Гарри–Дима.

Введение

Хорошо известно, что интегрирование некоторых классов нелинейных уравнений с частными производными можно существенно упростить, преобразовав их к более простому виду или к уравнениям, решения которых достаточно хорошо изучены. Существует много различных типов преобразований, используемых в математической физике, одним из которых является преобразование или метод годографа [1–3]. Суть данного преобразования в случае уравнения с двумя независимыми переменными x, t и искомой функцией $u = u(x, t)$ заключается в том, что решение ищется в неявном виде (x и t можно поменять ролями): $x = x(t, u)$, т.е. t и u принимаются за независимые переменные, а x — за зависимую переменную. При этом заметим, что может существовать несколько вариантов получения преобразованных уравнений на плоскости годографа. В работах [4, 5] преобразование годографа использовалось для квазилинейного уравнения теплопроводности

$$u_t = (K(u)u_x)_x$$

с произвольной функцией $K(u)$. При $K(u) = u^{-2}$ — в работах [3, 5, 6], причем в этом случае исследуемое уравнение сводилось к линейному уравнению теплопроводности.

В данной работе преобразование годографа и его модификации мы применим для неавтономного уравнения нелинейного тепломассопереноса

$$u_t = x^s \left(x^q u^p u_x\right)_x, \quad s,\ q,\ p \in \mathbb{R},\ p \neq 0, \tag{1}$$

и уравнения нелинейной диффузии третьего порядка

$$u_t = \left(f(u) u_x\right)_{xx} \tag{2}$$

с искомой функцией $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$. Уравнения (1), (2) возникают во многих задачах математической физики. Например, уравнение нелинейного тепломассопереноса (1) с параметрами $s = -q$, $q = 1$ описывает плоские задачи с осевой (цилиндрической) симметрией, при $q = 2$ — сферически-симметричные задачи. В теории статистической турбулентности встречается уравнение со значением $q = 5$. При отрицательных степенях показателя p уравнение (1) описывает процессы переноса в пористых средах. Уравнение нелинейной диффузии третьего порядка (2) сравнительно недавно стало привлекать внимание специалистов [7, 8]. Это уравнение представляет интерес по ряду причин, одной из которых является тот факт, что при $f(u) = u^{-3/2}$ уравнение (2) простой заменой $u = v^{-2}$ приводится к известному интегрируемому (в смысле метода обратной задачи рассеяния) уравнению Гарри–Дима [9]:

$$v_t = v^3 v_{xxx}.$$

1. Уравнение нелинейного тепломассопереноса

Как было указано во введении, преобразование годографа успешно применялось в работах [4–6] для квазилинейного уравнения теплопроводности, которое в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности является частным случаем неавтономного уравнения нелинейного тепломассопереноса (1). Поэтому представляется естественным использовать указанное преобразование, точнее его модификацию (обобщение) для уравнения (1).

Нетрудно убедиться, что следующее преобразование:

$$u(x,t) = x^s \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x,t), \quad t = \tau, \quad y = \varphi(x,t), \quad x = \psi(y,\tau), \tag{3}$$

после ряда несложных выкладок приводит уравнение (1) к следующему виду:

$$\psi_\tau = \psi^{q+(p+1)s} (\psi_y)^{-p-2} \psi_{yy} - s\psi^{q+(p+1)s-1} (\psi_y)^{-p}. \tag{4}$$

Поскольку целью любого преобразования является упрощение исходной модели и получение более простых соотношений, то теперь сосредоточим наше внимание на полученном уравнении. Это уравнение является автономным, т.е. не зависит явным образом от переменной y. Можно заметить, что если в уравнении (4) значение параметра p выбрать как $p = -2$, то оно упростится и запишется в следующем виде:

$$\psi_\tau = \psi^{q-s}\psi_{yy} - s\psi^{q-s-1}(\psi_y)^2.$$

По существу это уравнение нелинейной теплопроводности, поэтому, используя замену $\Omega(y,\tau) = (\psi(y,\tau))^{1-q}$, $q \neq 1$, перепишем это уравнение в более привычной форме

$$\Omega_\tau = \left(\Omega^\gamma \Omega_y\right)_y, \tag{5}$$

где $\gamma = \dfrac{q-s}{1-q}$. Таким образом, мы показали, что уравнение нелинейного тепломассопереноса (1) при $p = -2$ связано с классическим уравнением теплопроводности со степенной нелинейностью. В свою очередь видно, что при $\gamma = 0$, т.е. при равенстве параметров q и s, уравнение (5) становится линейным:

$$\Omega_\tau = \Omega_{yy}. \tag{6}$$

Резюмируя все вышеизложенное, мы пришли к выводу, что справедливо

Утверждение 1. *Обобщенное преобразование годографа вида*

$$u(x,t) = x^s \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,t), \quad t = \tau, \quad y = \varphi(x,t), \quad x = (\Omega(y,\tau))^{\dfrac{1}{1-q}}, \; q \neq 1,$$

связывает решения $u(x,t)$ неавтономного уравнения нелинейного тепломассопереноса

$$u_t = x^s\left(x^s u^{-2} u_x\right)_x, \quad s \in \mathbb{R},$$

с решениями $\Omega(y,\tau)$ линейного уравнения теплопроводности (6).

Хорошо известно [3, 6], что уравнение теплопроводности кристаллического водорода

$$u_t = \left(u^{-2}u_x\right)_x$$

преобразованием годографа редуцируется к линейному уравнению. Поэтому если в уравнении (5) показатель степени $\gamma = -2$ или, что тоже самое, $s = 2 - q$, то трансформацией, аналогичной преобразованию (3), указанное уравнение можно также свести к линейному. Таким образом, в этом случае имеет место

Утверждение 2. *Уравнение нелинейного тепломассопереноса вида*

$$u_t = x^{2-q}\left(x^q u^{-2} u_x\right)_x, \ \ q \in \mathbb{R},\ q \neq 1,$$

модифицированным преобразованием годографа

$$u(x,t) = x^{2-q}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,t), \ \ t=\tau,\ y=\varphi(x,t),$$

$$x = \left(\frac{\partial}{\partial y}W(y,\tau)\right)^{\dfrac{1}{1-q}}, \ \ y = v(z,\tau),\ z = W(y,\tau),$$

сводится к линейному уравнению теплопроводности $v_\tau = v_{zz}$.

Замечание 1. Если в выражении (4) с показателем степени $p = -2$ значение параметра q выбрать равным единице, то подстановкой $(\psi(y,\tau))^{1-s} = \Omega(y,\tau)$ оно приводится к известному уравнению теплопроводности

$$\Omega_\tau = \Omega\,\Omega_{yy},$$

которое обладает богатым набором симметрий. В свою очередь, это соотношение с помощью анзатца $\Omega(y,\tau) = \exp\left(T(y,\tau)\right)$ преобразуется к уравнению нелинейной теплопроводности с экспоненциальной зависимостью, т.е. справедливо

Утверждение 3. *Обобщенное преобразование годографа*

$$u(x,t) = x^s\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,t),\ t=\tau,\ y=\varphi(x,t),\ x=\exp\left(\frac{1}{1-s}T(y,\tau)\right)$$

связывает решения $u(x,t)$ *уравнения нелинейного тепломассопереноса вида*

$$u_t = x^s\left(xu^{-2}u_x\right)_x, \ \ s \in \mathbb{R}\setminus\{1\},$$

с решениями $T(y,\tau)$ *нелинейного уравнения теплопроводности*

$$T_\tau = \left(e^T T_y\right)_y.$$

Напомним, что после того, как было получено уравнение (4), мы остановились на случае, когда показатель степени коэффициента теплопроводности $p = -2$.

Теперь для произвольных значений параметра $p \in \mathbb{R}$ перейдем к рассмотрению других нетривиальных редукций уравнения (4). Так, при выполнении равенства $q + (p+1)s = 1$ выражение (4) примет вид

$$\psi_\tau = \psi(\psi_y)^{-p-2}\psi_{yy} - s(\psi_y)^{-p}.$$

Это соотношение при $s = 0,\ q = 1,\ p = -3$ сводится к любопытному уравнению

$$\psi_\tau = \psi\psi_y\psi_{yy},$$

причем соответствующее ему уравнение нелинейного тепломассопереноса имеет вид

$$u_t = \left(xu^{-3}u_x\right)_x.$$

Если параметры $s,\ p$ связаны соотношением $s(1+p) = 1,\ p \neq -1$, а параметр q равен нулю, тогда из (4) получим

$$(1+p)\,\psi_\tau + \left(\psi\,(\psi_y)^{-(1+p)}\right)_y = 0.$$

Данное уравнение уже не является уравнением типа нелинейной теплопроводности, однако оно посредством преобразования (3) связано с квазилинейным неавтономным уравнением теплопроводности вида

$$x^{1+p}\,u_t = \left(u^p u_x\right)_x,$$

некоторые точные автомодельные решения которого известны.

Таким образом, подводя некоторые итоги этого раздела, заключаем, что приведенное выше преобразование годографа и его обобщения позволяют строить точные решения уравнения нелинейного тепломассопереноса через решения известных, более простых уравнений, в некоторых случаях, даже линейных.

2. Уравнение нелинейной диффузии третьего порядка

В этом разделе мы приведем некоторые классы эквивалентности уравнения (2), с произвольной достаточно гладкой функцией $f(u)$, относительно преобразования годографа. Интерес к данному вопросу обусловлен хотя бы тем, что указанное уравнение с функцией $f(u) = u^{-3/2}$ (уравнение Гарри–Дима) является родственным к уравнению Кортевега де-Фриза. Основным результатом этого раздела является следующая

Теорема 1. *Уравнение (2) эквивалентно уравнению нелинейной диффузии третьего порядка следующего вида:*

$$\tilde{u}_t = \left(\frac{1}{\tilde{u}^3} f\left(\frac{1}{\tilde{u}}\right)\tilde{u}_{\hat{x}}\right)_{\hat{x}\hat{x}}, \quad \tilde{u} = \tilde{u}(\hat{x}, t). \tag{7}$$

Доказательство. Введем новую функцию $\varphi = \varphi(x,t)$ по формуле

$$u(x,t) = \varphi_x(x,t), \tag{8}$$

а затем проинтегрируем уравнение (2) по переменной x. В результате придем к соотношению

$$\varphi_t = (f(\varphi_x)\varphi_{xx})_x \equiv f(\varphi_x)\varphi_{xxx} + f'(\varphi_x)\varphi_{xx}^2. \tag{9}$$

Здесь штрих означает производную по аргументу. Применим к последнему уравнению преобразование годографа

$$\hat{x} = \varphi(x,t), \quad x = \psi(\hat{x},t) \tag{10}$$

и вычислим необходимые частные производные, входящие в уравнение (9):

$$\varphi_t = -\frac{\psi_t}{\psi_{\hat{x}}}, \quad \varphi_x = \frac{1}{\psi_{\hat{x}}}, \quad \varphi_{xx} = -\frac{\psi_{\hat{x}\hat{x}}}{\psi_{\hat{x}}^3}, \quad \varphi_{xxx} = 3\frac{\psi_{\hat{x}\hat{x}}^2}{\psi_{\hat{x}}^5} - \frac{\psi_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}}}{\psi_{\hat{x}}^4}.$$

С учетом этих выражений уравнение (9) преобразуется к виду

$$\psi_t = \left(\frac{1}{\psi_{\hat{x}}^3} f\left(\frac{1}{\psi_{\hat{x}}}\right)\psi_{\hat{x}\hat{x}}\right)_{\hat{x}}.$$

В свою очередь, это соотношение заменой

$$\tilde{u}(\hat{x},t) = \psi_{\hat{x}}(\hat{x},t) \tag{11}$$

приводится к уравнению (7), что и требовалось доказать. □

Таким образом, теорема 1 говорит о том, что нелинейные уравнения вида (2) с коэффициентами

$$f(u) \ \text{ и } \ \hat{f}(u) = \frac{1}{u^3} f\left(\frac{1}{u}\right)$$

эквивалентны. Это значит, что из любого нетривиального решения уравнения (2) посредством формул (8), (10), (11) можно найти решение уравнения (7) и наоборот.

Теперь сформулируем одно очень интересное следствие, вытекающее из теоремы 1.

Следствие 1. *Уравнение нелинейной диффузии третьего порядка со степенным коэффициентом*

$$u_t = (u^{m_1} u_x)_{xx} \tag{12}$$

эквивалентно уравнению

$$\tilde{u}_t = (\tilde{u}^{m_2} \tilde{u}_{\hat{x}})_{\hat{x}\hat{x}}, \tag{13}$$

причем имеет место соотношение

$$m_1 + m_2 = -3. \tag{14}$$

Справедливость данного предложения следует непосредственно из теоремы 1 при $f(u) = u^m$. В этом случае $\hat{f}(u) = u^{-(m+3)}$.

Если $m_1 = 0$ ($m_2 = 0$), то в соответствие с формулой (14) имеем $m_2 = -3$ ($m_1 = -3$) и, следовательно, приходим к выводу, что уравнение нелинейной диффузии

$$u_t = \left(u^{-3}u_x\right)_{xx} \tag{15}$$

линеаризуется, т.е. посредством преобразования (8), (10), (11) оно приводится к линейному уравнению в частных производных третьего порядка

$$\tilde{u}_t = \tilde{u}_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}}.$$

По-видимому, впервые этот факт отмечен в работе [7].

Особенность уравнения (15) характеризуется еще тем фактом, что если мы будем отыскивать решения типа «бегущей волны», т.е. в виде $u(x,t) = W^{-1/3}(\eta)$, где $\eta = x - \gamma t$, $\gamma = \text{const}$, то соответствующее ему обыкновенное дифференциальное уравнение

$$W^2W''' - WW'W'' + \frac{4}{9}W'^3 + \gamma WW' = 0$$

с помощью преобразования

$$W(\eta) = V^{-1}(\mu), \;\; \mu = \int \frac{d\eta}{W(\eta)}$$

сводится к аналогичному обыкновенному дифференциальному уравнению на функцию $V(\mu)$.

Если $m_1 = -3/2$, то из соотношения (14) следует, что и $m_2 = -3/2$, т.е. уравнения (12), (13) совпадают. При этом напомним, что уравнение

$$u_t = \left(u^{-3/2}u_x\right)_{xx} \quad \text{или} \quad u_t + 2\left(u^{-1/2}\right)_{xxx} = 0,$$

есть ни что иное, как одна из разновидностей интегрируемого уравнения Гарри–Дима. Таким образом, формулы (8), (10), (11) являются автопреобразованием для уравнения Гарри–Дима и, следовательно, их можно использовать для процедуры размножения решений.

В конце этого раздела приведем автомодельные решения уравнения (12), которые будем отыскивать в следующем виде:

$$u(x,t) = \left(t^\alpha f(\xi)\right)^{\frac{1}{m_1}}, \;\; \xi = x\, t^{-\frac{1+\alpha}{3}}, \;\; \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \tag{16}$$

где функция $f(\xi)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка

$$f^2f''' + \frac{3}{m_1}ff'f'' + \frac{1}{m_1}\left(\frac{1}{m_1} - 1\right)f'^3 + \frac{1}{3}(1+\alpha)\xi ff' - \alpha f^2 = 0.$$

Это уравнение обладает следующими частными решениями:

$$f(\xi) = -\frac{m_1^2}{3(m_1+3)(2m_1+3)}\,\xi^3;\;\; m_1 \neq -\frac{3}{2};\;\; m_1 \neq -3.$$

$$f(\xi) = C\xi^{\frac{m_1}{m_1+1}};\;\; \alpha = \frac{m_1}{2m_1+3};\;\; m_1 \neq -\frac{3}{2};\;\; m_1 \neq -1;\;\; C - \mathrm{const}.$$

$$f(\xi) = C\xi^{\frac{2m_1}{m_1+1}};\;\; \alpha = \frac{2m_1}{2m_1+3};\;\; m_1 \neq -\frac{3}{2};\;\; m_1 \neq -1;\;\; C - \mathrm{const}.$$

$$f(\xi) = -\frac{1}{60}\,\xi^3 + C\xi^{1/2};\;\; m_1 = 1;\;\; \alpha = -\frac{1}{16};\;\; C - \mathrm{const}.$$

$$f(\xi) = -\frac{1}{60}\,\xi^3 + C_1\xi + C_2;\;\; m_1 = 1;\;\; \alpha = -\frac{1}{10};\;\; C_1,\; C_2 - \mathrm{const}.$$

Функция $u(x,t)$ определяемая формулой (16) является точным автомодельным решением уравнения (13) с показателем степени m_1. В силу следствия 1, используя формулы преобразования (8), (10), (11) из выражения (16) нетрудно получить решение уравнения (14) с показателем степени $m_2 = -3 - m_1$.

Список литературы

1. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 256 с.
2. *Березовский А.А.* Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики. Часть II. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. — 292 с.
3. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 280 с.
4. *Burgan J.R., Munier A., Feix M.R., Fijalkow E.* Homology and the nonlinear heat differential equation // SIAM J. Appl. Math. — 1984. — V. 44. — P. 11–18.
5. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987. — 480 с.
6. *Bluman G., Kumei S.* On the remarkable nonlinear diffusion equation $(\partial/\partial x)[a(u+b)^{-2}(\partial u/\partial x)] - (\partial u/\partial t) = 0$ // J. Math. Phys. — 1980. — V. 21. — P. 1019–1023.
7. *Euler N., Gandarias M.L., Euler M. and Lindblom O.* Auto-hodograph transformations for a hierarchy of nonlinear evolution equations // J. Math. Anal. Appl. — 2001. — V. 257. — P. 21–28.
8. *Gandarias M.L., Medina E., Muriel C.* New symmetry reductions for some ordinary equations // J. of Nonlinear Math. Phys. — 2002. — V. 9. — P. 47–58.
9. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир, 1987. — 479 с.

E. I. Semenov

The hodograph transformation and nonlinear equations of mathematical physics

Abstract. We consider hodograph transformation for two nonlinear equations of mathematical physics: nonautonomous nonlinear heat-transfer equation and nonlinear diffusion equation of third order. We present the classes of equivalence and we distinguish nonlinear heat-transfer equations which are redused to the linear PDE.