Серия «Математика»
Том 1 (2007), № 1, С. 62—69

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.977

Существование и единственность обобщенного решения одной интегро-дифференциальной системы *

А. В. Букина (annabukina@mail.ru)
Иркутский государственный университет, г. Иркутск

Аннотация. В статье исследуется система интегро-дифференциальных уравнений, в которой одна часть компонент решения подчинена простейшей гиперболической системе дифференциальных уравнений с единичными собственными значениями. Такие системы часто используются в динамических моделях с возрастной структурой. Вторая часть компонент искомого решения связана с первой интегралами по части области определения независимых переменных. Входные параметры задачи, которыми являются вектор-функции правых частей систем и начально-граничных условий, представляют собой измеримые и суммируемые по Лебегу функции. Обобщенное решение строится с помощью метода последовательных приближений на основе интегрального эквивалента исходной системы. Формальная постановка задачи иллюстрируется содержательной моделью.

Ключевые слова: интегро-дифференциальная система, метод последовательных приближений.

Введение

Приложениями исследуемой интегро-дифференциальной системы уравнений служат модели амортизационно-производственных фондов [1], сбора урожая [2], эпидемического контроля [1, 3] и др. Примером популяционной модели, в частности, может быть модель симпатрического видообразования [4, 5]. Так как эти модели часто используются не только для описания соответствующих процессов, но и как управляемые модели, возникает потребность анализа решения в условиях разрыва входных данных. Задачами настоящей работы являются построение обобщенного решения системы, выяснение его свойств и получение оценки роста относительно входных параметров.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 05-01-00187, 06-01-81016).

1. Постановка задачи

Рассматривается интегро-дифференциальная система уравнений

$$\begin{gathered} x_t + x_s = f(x, y, p, s, t), \\ y(p, s, t) = \iint\limits_{PS} g(x(\rho, \xi, t), p, \rho, s, \xi, t) d\rho d\xi \end{gathered} \tag{1.1}$$

с начальными

$$x(p, s, t_0) = x^0(p, s) \tag{1.2}$$

и граничными

$$x(p, s_0, t) = \int\limits_S q(x(p, \xi, t), p, \xi, t) d\xi \tag{1.3}$$

условиями.

Здесь $(p, s, t) \in \Pi = P \times S \times T = [p_0, p_1] \times [s_0, s_1] \times [t_0, t_1]$, $x(p, s, t) \in R^n$, $y(p, s, t) \in R^m$.

Одним из приложений данной задачи может служить следующая модель динамики популяции [5]

$$x_t(p,s,t) + x_s(p,s,t) = -x(p,s,t) \frac{1}{K(d(p,s))} \iint\limits_{PS} C(d(p,s), d(\rho,\xi)) x(\rho,\xi,t) d\rho d\xi,$$

где $x(p, s, t)$ — число особей популяции с наследственным признаком p, имеющих возраст s в момент t. Начальное распределение численности особей определено условием $x(p, s, t_0) = x^0(p, s)$, распределение только что родившихся членов популяции задается уравнением

$$x(p, 0, t) = \int\limits_{\underline{s}}^{\overline{s}} r x(p, \xi, t) d\xi,$$

где $\underline{s}, \overline{s}$ — границы детородного возраста. Особи роджаются с интенсивностью r и умирают с интенсивностью, определяемой конкуренцией $C(d, \tilde{d})$ и ескостью среды $K(d)$. Целью управления моделью является определение параметров распределения ресурсов и интенсивности конкуренции, при которых в фиксированный момент времени численность особей популяции максимально близка к заданному распределению.

Отметим также, что система (1.1)−(1.3) обладает достаточной общностью. Из нее с помощью специального выбора вектор-функции g можно получить в качестве следствия гиперболическую систему дифференциальных уравнений канонического вида, подробно рассмотренную в [6].

2. Обобщенное решение и его свойства

Будем предполагать, что вектор-функции $f(x, y, p, s, t)$, $g(x, p, \rho, s, \xi, t)$, $x^0(p, s)$, $q(x, p, s, t)$ являются гладкими по решениям x и y, измеримыми и суммируемыми по Лебегу со степенью p, p$\geq$ 1 по независимым переменным p, s, t в области их определения.

Дифференциальный оператор в задаче (1.1)−(1.3) имеет одно семейство характеристик, определяемое уравнением $\frac{ds}{dt} = 1$. Поэтому для любой плоскости $p = const$ характеристика, проходящая через точку (s, t) является прямой $\zeta = s - t + \tau$. В случае существования непрерывного и непрерывно-дифференцируемого в Π решения система уравнений (1.1) с условиями (1.2), (1.3) эквивалентна системе интегральных уравнений [7, с. 56]

$$x(p,s,t) = x(p,\check{s}(s,t),\check{t}(s,t)) + \int\limits_{\check{t}(s,t)}^{t} f(x(p,\zeta,\tau), y(p,\zeta,\tau), p, \zeta, \tau)\Big|_{\zeta = s-t+\tau} d\tau,$$
$$y(p,s,t) = \iint\limits_{PS} g(x(\rho,\xi,t), p, \rho, s, \xi, t) d\rho d\xi, \tag{2.1}$$

где $\check{s}(s,t), \check{t}(s,t)$ — точки входа характеристик в область:

$$\check{s}(s,t) = \begin{cases} s - t + t_0, & s - s_0 \geq t - t_0 \\ s_0, & s - s_0 < t - t_0, \end{cases} \quad \check{t}(s,t) = \begin{cases} t_0, & s - s_0 \geq t - t_0 \\ t - s + s_0, & s - s_0 < t - t_0. \end{cases}$$

Определение 1. Под обобщенным решением задачи (1.1)−(1.3) будем понимать измеримые суммируемые вектор-функции x, y, удовлетворяющие почти в каждой точке $(p, s, t) \in \Pi$ системе интегральных уравнений (2.1).

Теорема 1. *Пусть вектор-функция $f(x, y, p, s, t)$ удовлетворяет условию Липшица по переменным x и y, вектор-функции $g(x, p, \rho, s, \xi, t)$, $q(x, p, s, t)$ – по x с константой L. Тогда существует обобщенное решение задачи (1.1)-(1.3).*

Доказательство. Построим методом последовательных приближений решение интегральной системы (2.1). Рассмотрим последовательность функций $\{x^{(k)}\}$, определенных следующим образом

$$x^{(k+1)}(p,s,t) = x(p,\breve{s}(s,t),\breve{t}(s,t)) + \int\limits_{\breve{t}(s,t)}^{t} f(x^{(k)}(p,\zeta,\tau), y^{(k)}(p,\zeta,\tau),p,\zeta,\tau)d\tau,$$

$$y^{(k)}(p,s,t) = \iint\limits_{PS} g(x^{(k)}(\rho,\xi,t),p,\rho,s,\xi,t)d\rho d\xi. \tag{2.2}$$

Пусть $x^{(0)}(p,s,t) = 0$. Покажем, что почти для всех (p,s,t) с неограниченным ростом k последовательность значений $x^{(k)}(p,s,t)$ вектор-функций $x^{(k)}$ стремится к значениям $x(p,s,t)$ предельной вектор-функции x, которая удовлетворяет системе (2.1). Так как

$$x^{(K)}(p,s,t) = \sum_{k=1}^{K}(x^{(k)}(p,s,t) - x^{(k-1)}(p,s,t))$$

для этого достаточно доказать сходимость бесконечного ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\delta^{(k)}(p,s,t)\|, \tag{2.3}$$

где

$$\delta^{(k)}(p,s,t) = \|x^{(k+1)}(p,s,t) - x^{(k)}(p,s,t)\|.$$

Из равенств (2.2) при любых (p,s,t), таких что $s - s_0 \geq t - t_0$, на основании условия Липшица следуют оценки

$$\delta^{(k)}(p,s,t) \leq L\int\limits_{t_0}^{t}\Big(\delta^{(k-1)}(p,s-t+\tau,\tau) + L\iint\limits_{PS}\delta^{(k-1)}(\rho,\xi,\tau)d\rho d\xi\Big)d\tau,$$

$$\delta^{(0)}(p,s,t) = \|x^{(1)}(p,s,t)\| \leq$$

$$\leq \|x^0(p,s-t+t_0)\| + \int\limits_{t_0}^{t}\|f(0,\iint\limits_{PS} g(0,p,\rho,\zeta,\xi,\tau)d\rho d\xi,p,\zeta,\tau)\|d\tau. \tag{2.4}$$

Оценим $\delta^{(k)}(p,s,t)$ через $\delta^{(0)}(p,s,t)$.

$$\delta^{(1)}(p,s,t) \leq L\int\limits_{t_0}^{t}\Big(\delta^{(0)}(p,s-t+\tau,\tau) + L\iint\limits_{PS}\delta^{(0)}(\rho,\xi,\tau)d\rho d\xi\Big)d\tau,$$

$$\delta^{(2)}(p,s,t) \le L \int\limits_{t_0}^{t} \Big(\delta^{(1)}(p,s-t+\tau,\tau) + L \iint\limits_{PS} \delta^{(1)}(\rho,\xi,\tau) d\rho d\xi\Big) d\tau \le$$

$$\le L^2 \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t_0}^{\tau} \Big[\delta^{(0)}(p,s-t+\alpha,\alpha) + L \iint\limits_{PS} \delta^{(0)}(\rho,\xi,\alpha) d\rho d\xi +$$

$$+ L\Big(\iint\limits_{PS} \delta^{(0)}(\rho,\xi-\tau+\alpha,\alpha) + L \iint\limits_{PS} \delta^{(0)}(\rho,\xi,\alpha)\Big) d\rho d\xi\Big] d\alpha d\tau.$$

В виду того, что

$$\int\limits_{t_0}^{\tau} \iint\limits_{PS} \delta^{(0)}(\rho,\xi-\tau+\alpha,\alpha) d\rho d\xi d\alpha \le \int\limits_{t_0}^{\tau} \iint\limits_{PS} \delta^{(0)}(\rho,\xi,\alpha) d\rho d\xi d\alpha,$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t_0}^{\tau} F(\alpha) d\alpha d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} F(\alpha) \int\limits_{\alpha}^{t} d\tau d\alpha = \int\limits_{t_0}^{t} (t-\tau) F(\tau) d\tau$$

получаем

$$\delta^{(2)}(p,s,t) \le L^2 \int\limits_{t_0}^{t} (t-\tau)\Big(\delta^{(0)}(p,s-t+\tau,\tau) +$$

$$+ (L + L(1 + L(p_1-p_0)(s_1-s_0))) \iint\limits_{PS} \delta^{(0)}(\rho,\xi,\tau) d\rho d\xi\Big) d\tau,$$

$$\delta^{(3)}(p,s,t) \le L^3 \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^2}{2}\Big(\delta^{(0)}(p,s-t+\tau,\tau) +$$

$$+ (L + L(1 + L(p_1-p_0)(s_1-s_0)) +$$

$$+ L(1 + L(p_1-p_0)(s_1-s_0))^2) \iint\limits_{PS} \delta^{(0)}(\rho,\xi,\tau) d\rho d\xi\Big) d\tau,$$

$$\dots$$

$$\delta^{(k)}(p,s,t) \le L^k \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\Big(\delta^{(0)}(p,s-t+\tau,\tau) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} L(1 + L(p_1-p_0)(s_1-s_0))^{i-1} \iint\limits_{PS} \delta^{(0)}(\rho,\xi,\tau) d\rho d\xi\Big) d\tau.$$

Подставив оценку (2.4), приходим к выражению

$$\delta^{(k)}(p,s,t) \le L^k \frac{(t-t_0)^k}{k!}\Big[\|x^0(p,s-t+t_0)\|+ \\ + \int\limits_{t_0}^{t} \Big\| f(0, \iint\limits_{PS} g(0,p,\rho,\zeta,\xi,\tau)d\rho d\xi, p,\zeta,\tau)\Big\| d\tau + \\ + \frac{(1+L(p_1-p_0)(s_1-s_0))^k-1}{(p_1-p_0)(s_1-s_0)} \iint\limits_{PS} \Big(\|x^0(p',s')\| + \\ + \int\limits_{t_0}^{t} \Big\| f(0, \iint\limits_{PS} g(0,p',\rho,s',\xi,\tau)d\rho d\xi, p, s',\tau)\Big\| d\tau\Big) dp' ds'\Big].$$

Следовательно, для любых (p,s,t): $s-s_0 \ge t-t_0$ ряд (2.3) удовлетворяет неравенству:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta^{(k)}(p,s,t) \le C_1 \Big(\|x^0(p,s-t+t_0)\| + \\ + \int\limits_{t_0}^{t} \Big\| f(0, \iint\limits_{PS} g(0,p,\rho,\zeta,\xi,\tau)d\rho d\xi, p,\zeta,\tau)\Big\| d\tau\Big) + C_2 \iint\limits_{PS} \Big(\|x^0(p',s')\| + \\ + \int\limits_{t_0}^{t} \Big\| f(0, \iint\limits_{PS} g(0,p',\rho,s',\xi,\tau)d\rho d\xi, p, s',\tau)\Big\| d\tau\Big) dp' ds',$$

где
$C_1 = e^{L(t-t_0)}$,
$C_2 = (e^{L(t-t_0)(1+L(p_1-p_0)(s_1-s_0))} - e^{L(t-t_0)})/(p_1-p_0)(s_1-s_0)$.

В случае $s-s_0 < t-t_0$ приближения строятся по правилу

$$x^{(k+1)}(p,s,t) = \int\limits_{S} q(x^{(k)}(p,\xi,t-s+s_0), p,\xi,t-s+s_0)d\xi + \\ + \int\limits_{t-s+s_0}^{t} f(x^{(k)}(p,\zeta,\tau), y^{(k)}(p,\zeta,\tau), p,\zeta,\tau)d\tau,$$

$$y^{(k)}(p,s,t) = \iint\limits_{PS} g(x^{(k)}(\rho,\xi,t), p,\rho,s,\xi,t)d\rho d\xi,$$

а для нормы их разности справедливо

$$\delta^{(k)}(p,s,t) \le L \int\limits_{t_0}^{t} \Big(\delta^{(k-1)}(p,\zeta,\tau) + (L+1) \iint\limits_{PS} \delta^{(k-1)}(\rho,\xi,\tau)d\rho d\xi \Big) d\tau.$$

По аналогии с предыдущим случаем получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty}\delta^{(k)}(p,s,t)\le C_3\Big(\int\limits_S\|q(0,p,\xi,t-s+s_0)\|d\xi+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\Big\|f(0,\iint\limits_{PS}g(0,p,\rho,\zeta,\xi,\tau)d\rho d\xi,p,\zeta,\tau)\Big\|d\tau\Big)+C_4\iint\limits_{PS}\Big(\int\limits_S\|q(o,p',\xi,t)\|d\xi+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\Big\|f(0,\iint\limits_{PS}g(0,p',\rho,s',\xi,\tau)d\rho d\xi,p,s',\tau)\Big\|d\tau\Big)dp'ds',\quad(2.5)$$

$C_3=e^{L(t-t_0)}$,
$C_4=(e^{L(t-t_0)(1+(L+1)(p_1-p_0)(s_1-s_0))}-e^{L(t-t_0)})/(p_1-p_0)(s_1-s_0)$.

В силу измеримости вектор-функций $f(x,y,p,s,t)$, $x^0(p,s)$, $q(x,p,s,t)$ правые части неравенств (2.5), (2.6) ограничены почти всюду в Π. Таким образом, ряд (2.3) сходится почти всюду в Π. Следовательно, сходится последовательность $x^{(k)}(p,s,t)$, $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}(p,s,t)=x(p,s,t)$, почти для всех $(p,s,t)\in\Pi$.

Предельный переход в равенстве (2.2) показывает, что построенная методом последовательных приближений измеримая и суммируемая функция $x(p,s,t)$ удовлетворяет интегральной системе (2.1). $\square$

Из оценки

$$\|x^{(k)}(p,s,t)\|\le\sum_{i=1}^{\infty}\|\delta^{(k)}(p,s,t)\|$$

и выражений (2.5), (2.6) следует единственность решения $x(p,s,t)$.

Построенное обобщенное решение принадлежит пространству L_p, $p\ \ge\ 1$ и является абсолютно непрерывным вдоль характеристик $\zeta=s-t+\tau,\ (s,t)\in S\times T$.

Частные производные решения могут не существовать. Поэтому вместо левой части системы (1.1) будем использовать следующий дифференциальный оператор

$$Dx=(Dx_1,Dx_2,\dots,Dx_n).$$

В виду абсолютной непрерывности обобщенного решения вдоль характеристик справедлива формула интегрирования по частям [8, с. 30]:

$$\iiint\limits_{\Pi}\langle\psi(p,s,t),D\Delta x(p,s,t)\rangle dpdsdt=\iint\limits_{PS}\langle\psi(p,s,t_1),D\Delta x(p,s,t_1)\rangle dpds+$$

$$+\iint\limits_{PT}\left(\langle\psi(p,s_1,t),D\Delta x(p,s_1,t)\rangle-\langle\psi(p,s_0,t),D\Delta x(p,s_0,t)\rangle\right)dpdt-$$

$$-\iiint\limits_{\Pi} \langle D\psi(p,s,t), \Delta x(p,s,t)\rangle dpdsdt.$$

Список литературы

1. *Feichtinger G., Tragler G., Veliov V.M.* Optimality conditions for age-structured control systems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2003. — Т. 288, № 1. — С. 47–68.
2. *Gurtin M.E., Murphy L.F.* On the optimal harvesting of age-structured populations: some simple models // Journal of Mathematical Biosciences. — 1981. — № 55. — С. 115–136.
3. *Muller J.* Optimal vaccination patterns in age-structured population // SIAM journal of applied mathematics. — 1999. — Т. 59, № 1. — С. 222–241.
4. *Dieckmann U., Doebeli M.* On the origin of species by sympatric speciation // Nature. — 1999. — № 400. — С. 354–357.
5. *Семовский С.В., Букин Ю.С., Щербаков Д.Ю* Видообразование в одномерной популяции: адаптивная динамика и нейтральная эволюция [http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/125.pdf]: Исследовано в России. — 2002.
6. *Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А.* Методы оптимизации и их приложения. Ч.2.// Оптимальное управление. — Новосибирск: Наука, 1990. — 151 с.
7. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978. — 688 с.
8. *Терлецкий В.А.* Обобщенное решение гиперболических систем одномерных полулинейных дифференциальных уравнений.— Иркутский государственный университет. Серия: Оптимизация и управление. Вып.11. — Иркутск, 2004. — 48 с.

A. V. Bukina

The existence and uniqueness of generalized solution of some integro-differential system

Abstract. Integro-differential system in which one part of solution components submit to elementary hyperbolical differential equations with unit eiqenvalues is investigated. Such systems are often used in dynamical age-structured models. The second part of required solution components is connected with the fist one by integrals over the part of independent variables region. Input parameters such as vector-functions of right sides in systems and in initial-boundary conditions present measurable and summable functions. Generalized solution is constructed by method of successive approximations on the base of integral equivalent of considered system. Formal problem definition is illustrated by conceptual model.