Серия «Математика»
Том 1 (2007), № 1, С. 113—117

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 532.5.013, 517.948

О существовании непрерывных решений в одной модельной задаче теории пограничного слоя *

А. И. Дрегля (adreglea@gmail.com)
Иркутский государственный университет

Аннотация. Доказана теорема существования непрерывных решений краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка, возникающего в теории пограничного слоя.

Ключевые слова: краевая задача, нелинейные дифференциальные уравнения, принцип Шаудера, компактность.

Рассмотрим краевую задачу

$$x'''(t) + M(x(t), t)x''(t) = 0, \ \alpha < t < \beta, \tag{1}$$

$$x(\alpha) = a, \ x'(\alpha) = b, \ x(\beta) = c. \tag{2}$$

К такой задаче сводятся некоторые задачи теории пограничного слоя в гидромеханике [5], [9] и теории полимеров [1].
Пусть
A. Функция $M(x,t)$ определена и непрерывна в области

$$D = \{x, t| \ \ |x| \leq |a| + |b|\,|\beta| + |c - a - b\beta|\,, \ \alpha \leq t \leq \beta\}\,,$$

$$m = \min_{x,t \in D} M(x,t) \ \ M = \max\left\{\max_{x,t \in D} M(x,t), 0\right\}.$$

В частном случае ($M(x,t) = x, \ \alpha = 0, \ \beta = 1$) в книге В. А. Треногина ([12] стр. $412 - 413$) было доказано существование решения этой задачи. В этой заметке доказано существование решения краевой задачи (1), (2) на конечном отрезке $[\alpha, \beta]$ в общем случае, когда функция $M(x,t)$ любая непрерывная функция, удовлетворяющая условию A.

* Работа частично поддержана Kluber Lubrication KG и Дублинским технологическим университетом.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие А. Тогда краевая задача (1), (2) на конечном отрезке* $[\alpha, \beta]$ *имеет в классе* $C^{(3)}_{[\alpha,\beta]}$ *решение.*

Доказательство:
Сведем задачу (1), (2) к нелинейному интегральному уравнению (6). Для этого введем обозначение $u = x''$ и перепишем уравнение (1) в виде

$$u' + M(x,t)u = 0$$

с условием

$$u(\alpha) = x''(\alpha),$$

где $x''(\alpha)$ определим позже. Тогда

$$x''(t) = x''(\alpha)e^{-\int\limits_{\alpha}^{t} M(x(s),s)ds}. \tag{3}$$

Путем интегрирования (3) от α до t с учетом условия $x'(\alpha) = b$ получим

$$x'(t) = b + x''(\alpha)\int\limits_{\alpha}^{t} e^{-\int\limits_{\alpha}^{\sigma} M(x(s),s)ds} d\sigma. \tag{4}$$

Интегрируя (4) с учетом условия $x(\alpha) = a$ получим

$$x(t) = a + bt + x''(\alpha)\int\limits_{\alpha}^{t}\int\limits_{\alpha}^{\eta} e^{-\int\limits_{\alpha}^{\sigma} M(x(s),s)ds} d\sigma d\eta. \tag{5}$$

Полагая в (5) $t = \beta$ и используя условие $x(\alpha) = a$ найдем

$$x''(\alpha) = \frac{c - a - b\beta}{\int\limits_{\alpha}^{\beta}\int\limits_{\alpha}^{\eta} e^{-\int\limits_{\alpha}^{\sigma} M(x(s),s)ds} d\sigma d\eta}.$$

Итак, интегральное уравнение эквивалентное задаче (1), (2) имеет вид

$$x(t) = a + bt + (c - a - b\beta)\frac{\int\limits_{\alpha}^{t}\int\limits_{\alpha}^{\eta} e^{-\int\limits_{\alpha}^{\sigma} M(x(s),s)ds} d\sigma d\eta}{\int\limits_{\alpha}^{\beta}\int\limits_{\alpha}^{\eta} e^{-\int\limits_{\alpha}^{\sigma} M(x(s),s)ds} d\sigma d\eta}. \tag{6}$$

Введем обозначение

$$F_x(\eta) = \int\limits_{\alpha}^{\eta} e^{-\int\limits_{\alpha}^{\sigma} M(x(s),s)ds} d\sigma,\ \alpha < \eta < \beta. \tag{7}$$

Очевидно, функция $F_x(\eta)$ положительная при $\eta > \alpha$. С учетом обозначения (7) интегральное уравнение (6) принимает вид

$$x(t) = a + bt + (c - a - b\beta)\frac{\int\limits_{\alpha}^{t} F_x(\eta)d\eta}{\int\limits_{\alpha}^{\beta} F_x(\eta)d\eta} \equiv P_t(x), \quad \alpha < t < \beta. \tag{8}$$

При $\alpha \le t \le \beta$ и $\forall x \in C_{[\alpha,\beta]}$ имеем неравенство

$$0 \le \frac{\int_{\alpha}^{t} F_x(\eta)d\eta}{\int_{\alpha}^{\beta} F_x(\eta)d\eta} \le 1$$

Следовательно, для $\forall x \in C_{[\alpha,\beta]}$

$$||P_t(x)|| \le |a| + |b||\beta| + |c - a - b\beta| = r. \tag{9}$$

Тем более, при $||x|| \le r$

$$||P_t(x)|| \le r,$$

т.е. интегральный оператор $P_t : C_{[\alpha,\beta]} \to C_{[\alpha,\beta]}$ переводит шар $||x|| \le r$ самого в себя.

Докажем, что оператор P_t вполне непрерывен. Для этого воспользуемся теоремой Арцелла ([12] стр. 207 – 209) о предкомпактности множеств в $C_{[\alpha,\beta]}$. Ввиду оценки (9) образ множества $||x|| \le r$ при отображении $P_t(x)$ равномерно ограничен постоянной r.

Далее

$$|P_{t_1}(x) - P_{t_2}(x)| \le |b||t_1 - t_2| + \frac{|c - a - b\beta|}{|\int\limits_{\alpha}^{\beta} F_x(\eta)d\eta|}|\int\limits_{t_1}^{t_2} F_x(\eta)d\eta|. \tag{10}$$

Отметим, что так как функция $F_x(t)$ положительна, то

$$\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} F_x(\eta)d\eta\right| = \int\limits_{t_1}^{t_2} F_x(\eta)d\eta, \quad t_1 < t_2.$$

Рассмотрим два случая:
Случай I: $(M > 0)$

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} F_x(\eta)d\eta \ge \int\limits_{\alpha}^{\beta}\int\limits_{\alpha}^{\eta} e^{-M(\sigma-\alpha)}d\sigma d\eta = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{M\alpha}}{-M}(e^{-M\eta} - e^{-M\alpha})d\eta =$$

$$-\frac{e^{M\alpha}}{M}\left[-\frac{1}{M}e^{-M\beta} + \frac{1}{M}e^{-M\alpha}\right] + \frac{1}{M}(\beta - \alpha)$$

$$\frac{1}{M^2}\{M(\beta-\alpha)+e^{-M(\beta-\alpha)}-1\}>0, \ \forall M>0.$$

Случай II: $(M=0)$

$$\int\limits_\alpha^\beta F_x(\eta)d\eta \geq \int\limits_\alpha^\beta\int\limits_\alpha^\eta d\sigma d\eta = \int\limits_\alpha^\beta(\eta-\alpha)d\eta =$$

$$= \frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)-\alpha(\beta-\alpha) = (\beta-\alpha)\frac{(\beta+\alpha-2\alpha)}{2} = \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}$$

Следовательно, существует const $C_1>0$ такая, что при $\forall x\in D$, справедливо неравенство

$$\int\limits_\alpha^\beta F_x(\eta)d\eta \geq C_1 > 0. \tag{11}$$

С другой стороны,

$$F_x(\eta)d\eta \leq \int\limits_\alpha^\eta e^{-m(\sigma-\alpha)}d\sigma \leq \int\limits_\alpha^\beta e^{-m(\sigma-\alpha)}d\sigma =$$

$$= \begin{cases} \beta-\alpha, & m=0 \\ \frac{1-e^{-m(\beta-\alpha)}}{m}, & m>0 \\ \frac{e^{m\alpha}}{|m|}(e^{|m|\beta}-e^{|m|\alpha}), & m<0. \end{cases}$$

Следовательно, существует const $C_2>0$ такая, что при $\forall x,t\in D$, справедливо неравенство

$$0 < F_x(\eta) \leq C_2. \tag{12}$$

В итоге неравенства (11), (12) дают такое уточнение оценки (10):

$$|P_{t_1}(x)-P_t(x)| \leq |b||t_1-t_2| + \frac{|c-a-b\beta|}{C_1}C_2|t_1-t_2| = l|t_1-t_2|,$$

где $l = \frac{|b|+|c-a-b\beta|}{C_1}C_2$. Итак, существует константа l такая, что при $\forall(x,t_1,t_2)\in D$

$$|P_{t_1}(x)-P_{t_2}(x)| \leq l|t_1-t_2|.$$

При этом константа l не зависит от x, t_1, t_2 из D. Мы доказали, что образ $P_t(x)$ шара $S(0,r)$ равноограничен и равностепенно непрерывен в $C_{[\alpha,\beta]}$ и следовательно, на основании теоремы Арцелла предкомпактен в $C_{[\alpha,\beta]}$.

Следовательно, оператор P вполне непрерывен. Итак, мы доказали, что оператор P удовлетворяет условиям теоремы Шаудера [12]. Поэтому интегральное уравнение (6) имеет в $C_{[\alpha,\beta]}$ решение.

Отметим, что ввиду структуры оператора P производные

$$\frac{d^iP}{dt^i},\ i = 0, 1, 2, 3\,\forall x \in C_{[\alpha,\beta]}$$

при $\forall x(t) \in C_{[\alpha,\beta]}$ будут непрерывны. Поэтому решение уравнения (6) будет три раза непрерывно дифференцируемо. Примеры численного решения подобных краевых задач теории погранслоя были рассмотрены нами в работах [8], [3], [1], [2].

Автор благодарит проф. Д. Гильберт и проф. Н. А. Сидорова за полезные советы и внимание.

Список литературы

1. *Aliona Dreglea, Some analytical solutions in the theory of modeling polymers.* Reports in Mathematics, School of Math. Sc., Dublin Inst. of Tech., No. 2, 2007, available online: `http://www.maths.dit.ie/preprints/2007_4_1.html`.
2. *Aliona Dreglea*, *Model of melt spinning process.* Ph.D. thesis. Dublin Inst. of Tech., Dublin.- 2007, 150 p.
3. *Дрегля А.И., Пимшина Л.П.*, *О применении сеток Шишкина в одной сингулярной задаче с малым параметром,* Труда 3ей межвузовской занальной конференции, посвященной памяти проф. Б.А.Бельтюкова - Иркутск: Изд-во Иркут. гос. пед. ун-та, 2007.- С.43–46.
4. *Glauert M.B., Lighthill M.J.*, *The axisymmetric boundary layer on a long thin cylinder,* Proc. R. Soc. London, 1955, 320.- P. 188–203.
5. *Schlichting H. Boundary Layer Theory,* 7 th edition, McGraw Hill.- 1951.
6. *Farrel P. A., Hegarty A. F., Miller J. J. H., O'Riordan E., Shishkin G. I.*, *Robust Computational Techniques for Boundary Layers,* Chapman and hall CRC, Florida, USA.- 2000.
7. *Петровский Г.И. Лекции об уравнениях с частными производными* М: Наука.- 1966.
8. *Dreglea A.I., Shishkin G.I. Robust numerical method for a singularly perturbed equation with unboundedly growing convective term at infinity,* Proceedings of International Conference on Computational Mathematics, 2004, June, 21-25, Novosibirsk.- 2004.- p. 83–87.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика,* Глава 4, М: Наука.- 1988.
10. *Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости,* М. Мир.- 1981.
11. *Дрегля А.И. Об одной нелинейной задаче, возникающей в плоской модели полимеров,* Труды 13ой Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и приложения", ИСЭМ СО РАН, Иркутск. т.3.- 2005.
12. *Треногин В. А. Функциональный анализ,* М: Наука.- 1980, стр. 408-418.

A. I. Dreglea

Continuous solutions in boundary layer problem

Abstract. Existence theorem for nonlinear ordinary differential equation with boundary conditions is proved. Such equations appear in boundary layer theory applied to melt spinning process.