Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 4. С. 21—32

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 519.1

Перечислительные проблемы в некоторых матричных кольцах и конечных группах *

Г. П. Егорычев
Сибирский Федеральный Университет

М. Н. Давлетшин
Сибирский Федеральный Университет

Аннотация. В этой заметке найден ряд новых соотношений для комбинаторных чисел, возникших ранее в неявном виде при перечислении идеалов нильпотентного кольца матриц над конечным полем (Г.П. Егорычев и В.М. Левчук, 2001), а также числа пар порождающих проективной специальной линейной группы размерности 2 и группы Судзуки над конечными полями характеристики 2 (Н.М. Сучков и Д.П. Приходько, 2001). Эти результаты получены с помощью метода коэффициентов Егорычева интегрального представления и вычисления комбинаторных сумм (множество правил вывода, лемма о полноте), развитого им к концу 1970 годов.

По ходу изложения поставлено несколько проблемных вопросов, и намечена перспектива дальнейших исследований.

Ключевые слова: комбинаторные суммы; метод коэффициентов; перечислительные проблемы; матричные кольца; конечные группы.

1. Введение

В этой заметке с помощью метода коэффициентов интегральных представлений и вычисления комбинаторных сумм [2, 9] и матричных обращений различного типа [10, 13], найдена явная формула и ряд новых соотношений для комбинаторных чисел, возникших ранее в работах нескольких авторов [11, 6] при решении следующих интересных проблем:

– перечисления идеалов нильпотентного кольца матриц над конечным полем (Г.П. Егорычев и В.М. Левчук, 2001);

– нахождения числа пар порождающих проективной специальной линейной группы размерности 2 (Н.М. Сучков и Д.П. Приходько, 2001).

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 09–01–00717.

В процессе решения получены также несколько новых формул суммирования с биномиальными коэффициентами $\binom{m}{j}$ обычного типа, q–факториалами $[m]_q! := (1-q)^{-n}\prod_{j=1}^{n}\left(1-q^j\right)$, и q-биномиальными коэффициентами $\left[{n \atop k}\right]_q$, где q – фиксированное натуральное число, n, $k = 0, 1, \ldots, n \leqslant k$,

$$\left[{n \atop k}\right]_q := \frac{(q)_n}{(q)_k\,(q)_{n-k}} = \frac{(q^m-1)\,(q^m-q)\ldots\left(q^m-q^{k-1}\right)}{(q^k-1)\,(q^k-q)\ldots(q^k-q^{k-1})}, \tag{1.1}$$

$$\left[{n \atop 0}\right]_q := 1.$$

По ходу изложения выдвинуто несколько новых проблем и намечена перспектива дальнейших исследований.

2. Необходимые сведения о методе коэффициентов

В работах [1, 2, 3, 11] с помощью метода коэффициентов решена серия перечислительных проблем для групп и алгебр лиева типа и проведено перечисление идеалов некоторых матричных колец.

Пусть L – множество формальных степенных рядов Лорана над полем C, содержащих только конечное число членов с отрицательными степенями на полем C. Порядок монома $c_k w^k$ есть k. Порядок ряда $C(w) = \sum_k c_k w^k$ из L есть минимальный порядок монома с ненулевыми коэффициентами. Пусть L_k – множество рядов порядка k, $L = U_{k=-\infty}^{\infty}$ L_k. Два ряда $A(w) = \sum_k a_k w^k$ и $B(w) = \sum_k b_k w^k$ из L равны тогда и только тогда, когда $a_k = b_k$ для всех k. Мы можем ввести в L операции сложения, умножения, подстановки, обращения и дифференцирования. Пусть $f\,(w)\,,\,\psi\,(w) \in L_0$.

Для $C(w) \in L$ определяем формальный вычет как $\mathbf{res}_w C(w) = c_{-1}$. Пусть $A(w) = \sum_k a_k w^k$ производящая функция для последовательности $\{a_k\}$. Тогда

$$a_k = \mathbf{res}_w A(w) w^{-k-1}, k = 0, 1, 2....$$

Например, известное представление для биномиального коэффициента:

$$\binom{n}{k} = \mathbf{res}_w\,(1+w)^n\,w^{-k-1}, k = 0, 1, ..., n. \tag{2.1}$$

Свойства (правила вывода) для оператора **res** приведены в [9]. В этой статье мы приведем, только некоторые из них. Пусть $A(w) = \sum_k a_k w^k$ и $B(w) = \sum_k b_k w^k$ – производящие функции из L.

Правило 1 (линейности). Для α, $\beta \in C$

$$\alpha \mathbf{res}_w A(w) w^{-k-1} + \beta \mathbf{res}_w B(w) w^{-k-1} = \mathbf{res}_w ((\alpha A(w) + \beta B(w)) w^{-k-1}) \tag{2.2}$$

Правило 2 (подстановки). a) Если $f(w) \in L_k$ ($k \geqslant 1$) и $A(w) \in L$, либо b) $A(w)$ – полином и $f(w) \in L$, включая константу

$$\sum_k f(w)^k \mathbf{res}_z \left(A(z) z^{-k-1} \right) = A(f(w)). \tag{2.3}$$

Правило 3 (замены переменных). Если $f(w) \in L_0$, то

$$\mathbf{res}_w \left(A(w) f(w)^k w^{-k-1} \right) = \mathbf{res}_z (\left[A(w)/f(w) h'(w) \right]_{w=\overline{h(z)}} z^{-k-1}), \tag{2.4}$$

где $z = h(w) = wf(w) \in L_1$.

Таблица простейших q-аналогов

q-аналог экспоненциальной функции $e_q(z)$ *и обратная* $1/e_q(z)$

$$e_q(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (z)^k / [k]_q! = \prod\nolimits_{k=0}^{\infty} \left(1 - (1-q) q^k z \right)^{-1},$$

$$(e_q(z))^{-1} = \prod\nolimits_{k=0}^{\infty} \left(1 - (1-q) q^k z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{\binom{k}{2}} (-z)^k / [k]_q!.$$

Экспоненциальный коэффициент

$$1/[n]_q! = \mathbf{res}_x \{ x^{-n-1} e_q(x) \}. \tag{2.5}$$

3. Число всех идеалов алгебры $NT_n(K)$ над конечным полем $K = GF(q)$

3.1. Постановка проблемы

В 2001 году Г.П. Егорычевым и В.М. Левчуком в работе [11, p. 32; Problem 1] были рассмотрена проблема нахождения числа всех идеалов определенного вида лиевой алгебры (кольца) $N(\Phi, K)$ классического типа Φ над конечным полем $K = GF(q)$, и, доказано следующее утверждение ([11, Теорема 4])[1]: *если* $K = GF(q)$, *то число* $\alpha_n(\Phi, q)$ *идеалов алгебры* $NT_n(K)$ *равно*

$$\alpha_n(\Phi, q) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} \binom{n}{m+1} Q(m, q), \tag{3.1}$$

[1] В работе с незначительными изменениями сохранены обозначения и терминология оригинальных работ, используемые по ходу изложения при цитировании.

где $Q\,(0,q) := 1$, *а числа* $Q\,(m,q)\,,\; n = 1,2,\ldots,\; m = 1,2,\ldots,n-1$, *заданы системой линейных рекуррентных соотношений вида*

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}Q(j,q)=\sum_{k=0}^{m}\begin{bmatrix} m\\ k\end{bmatrix}_q .$$

3.2. Первое обращение и явное решение

Из формулы (3.1) и известной пары обратимых матричных соотношений с биномиальными коэффициентами

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k,\;\; n=0,1,2,\ldots,\Longleftrightarrow b_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a_{n-k}, n=0,1,2,\ldots,$$

вытекает

Лемма 1. *Для чисел* $Q(m,q)$, $m = 0,1,\ldots$, *справедлива следующая формула*

$$Q(m,q)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{j}(-1)^j\binom{m}{j}\begin{bmatrix} j\\ k\end{bmatrix}_q . \tag{3.2}$$

Таким образом, согласно формулам (1.1) и (3.2) мы имеем

Теорема 1. *Следующая формула для исходной суммы* $\alpha_n(\Phi,q)$, $n = 1,2,\ldots$, *справедлива*

$$\alpha_n(\Phi,q)=1+\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n-1}\binom{n}{m}\binom{n}{m+1}Q(m,q)=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{j}(-1)^j\binom{n}{m}\binom{n}{m+1}\binom{m}{j}\begin{bmatrix} j\\ k\end{bmatrix}_q . \tag{3.3}$$

3.3. Матричная запись: числа Нарайяна и некоторые упрощения

Введём необходимые матричные обозначения и сокращения, которые будут использованы в этом разделе. Пусть $\alpha_j(\Phi,q) := \alpha_{j-1}$, $Q(m,q) := Q_m$, вектора-столбцы $\overline{\alpha} = (\alpha_0,\alpha_1,\ldots,.\alpha_{n-1})^T$, $\overline{Q} = (Q_0,Q_1,\ldots,.Q_{n-1})^T$, и $\overline{S} = (S_0,S_1,\ldots,S_{n-1})^T$, где положено $\alpha_0 = Q_0 = S_0 = 1$, и $S_j := \sum_{k=0}^{j}\begin{bmatrix} j\\ q\end{bmatrix}_q$. Пусть $D = (d_{nk})\,,\; A = (a_{nk})$ и $A^{(-1)} = \left(a_{nk}^{(-1)}\right)$ есть нижние треугольные матрицы порядка n, члены которых имеют следующий вид

$$d_{nk}=\frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1},\;\; a_{nk}=\binom{n}{k},\;\; a_{nk}^{(-1)}=(-1)^k\binom{n}{k}, \tag{3.4}$$

где числа $d_{nk} = \frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}$ есть известные числа Нарайяна $\mathcal{N}(n,k)$, обладающие рядом замечательных свойств (см., например, [8], [7]).

Если теперь переписать исходные соотношения (3.1) в матричной форме

$$\overline{\alpha} = D\overline{Q},\ A\overline{Q} = \overline{S}, \tag{3.5}$$

то в силу леммы 1 $\overline{Q} = A^{(-1)}\overline{S}$, и $\overline{\alpha} = D\overline{Q} = DA^{(-1)}\overline{S}$, то есть справедлива следующая

Лемма 2. *В принятых обозначениях исходные равенства (3.1) эквивалентны следующему матричному равенству*

$$\overline{\alpha} = B\overline{S},\ \text{где } B = DA^{(-1)}. \tag{3.6}$$

Лемма 3. *Если матрица $B = (b_{nk}) = DA^{(-1)}$, где матрицы D и $A^{(-1)}$ определены в (3.4), то её общий член*

$$b_{nk} = \frac{(-1)^k}{(n+1)!}\binom{n-1}{k}\binom{2n-k}{n-k}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Согласно метода коэффициентов мы имеем

$$b_{nk} = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\binom{n}{s+1}(-1)^k\binom{s}{k} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{(n+1)}\binom{n-1}{k}\sum_{s=0}^{n}\binom{n+1}{n-s}\binom{n-k-1}{s-k} =$$

(замена $\binom{n+1}{n-s} = \mathbf{res}_x\,(1+x)^{n+1}\,x^{-n+s-1}$, $\binom{n-k-1}{s-k} = \mathbf{res}_y\,(1+y)^{n-k-1}\,y^{-s+k-1}$)

$$= \frac{(-1)^k}{(n+1)}\binom{n-1}{k}\sum_{s=0}^{\infty}\mathbf{res}_x\,(1+x)^{n+1}\,x^{-n+s-1}\mathbf{res}_y\,(1+y)^{n-k-1}\,y^{-s+k-1} =$$

(суммирование по s : правило подстановки, замена $y = x$)

$$= \frac{(-1)^k}{(n+1)}\binom{n-1}{k}\mathbf{res}_x\,(1+x)^{n+1}\,x^{-n-1}\,(1+x)^{n-k-1}\,x^k =$$

$$= \frac{(-1)^k}{(n+1)}\binom{n-1}{k}\mathbf{res}_x\,(1+x)^{2n-k}\,x^{-n+k-1} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{(n+1)}\binom{n-1}{k}\binom{2n-k}{n-k},$$

и попутно мы получаем новое доказательство известного тождества с числами Нарайяна [7]

$$\sum_{s=0}^{n}\binom{s}{k}N(n,s) = \frac{1}{(n+1)}\binom{n-1}{k}\binom{2n-k}{n-k}. \tag{3.8}$$

$\square$

Из формул (3.6) и (3.7) вытекает следующая, более простая формула для вычисления исходной суммы $\alpha_n(\Phi, q)$.

Лемма 4.

$$\alpha_n(\Phi, q) = \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \binom{2n-k}{n-k} \{\sum_{l=0}^{k} \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}_q\}. \qquad (3.9)$$

3.4. Интегральное представление

Вычисления с помощью метода коэффициентов мы проводим здесь, как обычно, последовательно находя интегральные представления для сумм, составляющих исходную сумму (3.3).

Лемма 5. *Следующее интегральное представление для суммы (3.2) q-биномиальных коэффициентов справедливо*

$$\sum_{k=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q = [m]_q! \mathbf{res}_z e_q^2(z)\, z^{-m-1}. \qquad (3.10)$$

Доказательство. Формула (3.10) немедленно следует из формулы (2.5) и определения свёртки Коши. □

Лемма 6. *Следующее интегральное представление для чисел $Q(m, q)$, $m = 0, 1, \ldots,$ из (3.2) справедливо*

$$Q(m, q) = (-1)^m\, m! \mathbf{res}_{z,w}\{e^{-zw} g(w)\, e_q^2(z)\, w^{-m-1} z^{-m-1}\}, \qquad (3.11)$$

где $g(w) := \sum_{J=0}^{\infty} \frac{[j]_q!}{j!} w^j$.

Доказательство. Из формул (3.2) и (3.10) мы имеем

$$Q(m, q) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} \left(\sum_{k=0}^{j} (-1)^j \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} [j]_q! \mathbf{res}_z e_q^2(z)\, z^{-j-1} =$$

$$= (-1)^m\, m! \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^{m-j}}{(m-j)!} \frac{[j]_q!}{j!} \mathbf{res}_z e_q^2(z)\, z^{-j-1} =$$

$$= (-1)^m\, m! \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{[m-j]_q!}{(m-j)!} \mathbf{res}_z e_q^2(z)\, z^{-m+j-1}.$$

Полагая в последнем выражении

$$\frac{(-1)^j}{j!} = \mathbf{res}_t e^{-t} t^{-j-1}, \quad \frac{[m-j]_q!}{(m-j)!} = \mathbf{res}_w g\,(w)\, w^{-m+j-1},$$

мы получаем

$$Q(m,q) =$$
$$= (-1)^m\, m! \sum_{j=0}^{m} \mathbf{res}_t e^{-t} t^{-j-1} \times \mathbf{res}_w g\,(w)\, w^{-m+j-1} \times \mathbf{res}_z e_q^2\,(z)\, z^{-m+j-1} =$$
$$= (-1)^m\, m! \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{res}_{t,z,w} e^{-t} g\,(w)\, e_q^2\,(z)\,(w)\, t^{-j-1} w^{-m+j-1} z^{-m+j-1} =$$

(правило линейности и перегруппировка членов)

$$= (-1)^m\, m!\mathbf{res}_{z,w}\{g\,(w)\, e_q^2\,(z)\,[\sum_{j=0}^{\infty}(wz)^j\, \mathbf{res}_t e^{-t} t^{-j-1}] w^{-m-1} z^{-m-1}\} =$$

(суммирование по j : правило подстановки, замена $t = wz$)

$$= (-1)^m\, m!\mathbf{res}_{z,w}\{e^{-zw} g\,(w)\, e_q^2\,(z)\, w^{-m-1} z^{-m-1}\}.$$

□

Лемма 7. *Следующее интегральное представление для исходной суммы $\alpha_n(\Phi,q)$, $n = 1,2,\ldots,$ из (3.3) справедливо*

$$\alpha_n(\Phi,q) = (n-1)!\,(-1)^n \times$$
$$\times \mathbf{res}_{t,z,w}\{\exp\,(-zw/\,(1-t))\, g\,(w)\, e_q^2\,(z)\,(twz)^{-n-1}\}. \tag{3.12}$$

где $g\,(w) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[j]_q!}{j!} w^j$.

Доказательство. Из формул (3.1), (3.3) и (3.11) мы имеем

$$\alpha_n(\Phi,q) =$$
$$= 1 + \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n-1}\binom{n}{m}\binom{n}{m+1} Q\,(m,q) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\binom{n}{m+1} Q\,(m,q) =$$
$$= (n-1)!\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{(n-m)!}\binom{n}{m+1}\mathbf{res}_{z,w}\{e^{-zw} g\,(w)\, e_q^2\,(z)\, w^{-m-1} z^{-m-1}\} =$$
$$= (n-1)!\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{m!}\binom{n}{n-m+1}\mathbf{res}_{z,w}\{e^{-zw} g(w)\, e_q^2(z)\, w^{-n+m-1} z^{-n+m-1}\} =$$

$$= (n-1)!\,(-1)^n \sum_{m=0}^{n} \mathbf{res}_u e^{-u} u^{-m-1} \times \mathbf{res}_t\,(1-t)^{-m}\,t^{-n+m-2}\times$$

$$\times \mathbf{res}_{z,w}\{e^{-zw} g\,(w)\,e_q^2\,(z)\,w^{-n+m-1} z^{-n+m-1}\}$$

(суммирование по j : правило подстановки, замена $u = tzw/\,(1-t)$)

$$= (n-1)!\,(-1)^n\,\mathbf{res}_{t,z,w}\{\exp\,(-zw/\,(1-t))\,g\,(w)\,e_q^2\,(z)\,t^{-n-2}\,(wz)^{-n-1}\}.$$

□

3.5. Производящая функция и процедура расщепления

Вполне возможно, что исходная сумма $\alpha_n(\Phi, q)$ из (3.3) не допускает сколько-нибудь существенного упрощения, кроме приведенных здесь преобразований. Вместе с тем, найденное нами интегральное представление (3.12) этой суммы и последующая процедура "расщепления"(3.13) и (3.14) ее производящей функции вселяет надежду, что в дальнейшем мы сможем найти асимптотику исходной суммы (см. метод расщепления в [2, §5.3, 5.4]; [4] и др.).

Действительно, если положить

$$\alpha_{n,m,l} = \mathbf{res}_{t,z,w}\{\frac{\exp\,(-zw/\,(1-t))\,g\,(w)\,e_q^2\,(z)}{t^{n+1} w^{m+1} z^{l+1}}\}, \tag{3.13}$$

то

$$\alpha_n = \alpha_{n+1,n,n}, n = 1, 2, \ldots, \tag{3.14}$$

и из (3.13) сразу вытекает формула для ее «расщепленной» производящей функции

$$L\,(t, w, z) := \sum_{n,m,l \geqslant 0} \alpha_{n,m,l} t^n w^m z^l = \tag{3.15}$$

$$= \exp\,(-zw/\,(1-t))\,g\,(w)\,e_q^2\,(z)\,. \tag{3.16}$$

Таким образом, исследование асимптотики членов исходной последовательности $\{\alpha_n\}$, $n \to \infty$, сводится к изучению асимптотического поведения диагонали $n = n + 1$, $m = l = n$ коэффициентов ряда (3.15) функции $L(t, w, z)$ из (3.16).

Замечание 1. Нетрудно заметить, что если при выводе интегрального представления для $\alpha_n(\Phi, q)$ изходить из формулы (3.9) (а не из (3.3), как сделано выше), либо воспользоваться аппаратом гиппергеометрических функций, то мы получим интегральное представление для $\alpha_n(\Phi, q)$ той же сложности, что и формула (3.12).

Замечание 2. В работе [11] предложено для рассмотрения несколько новых кратных сумм, с помощью которых решается проблема перечисления различных идеалов алгебры $NT_n(K)$, и структура которых аналогична только что рассмотренной сумме (3.3). Эти проблемы мы намерены изучить в дальнейшем. Вне нашего рассмотрения оказалось также несколько вопросов, требующих дополнительного изучения. Например, если исходить из формулы (3.5), то можно выписать рекуррентную формулу вида $D^{(-1)}\bar{\alpha} = A^{(-1)}\bar{S}(q)$, где $D^{(-1)}$ – матрица, обратная к матрице Нарайяна, оценка вычислительной сложности которой требует дополнительного изучения.

4. Явная формула для числа всех пар порождающих элементов в группах $L_2\left(2^m\right)$ и $Sz\left(2^{2k+1}\right)$

Пусть G – группа, G^n– прямое произведение n экземпляров группы G. В 1999 *С. А. Сыскиным была* поставлена следующая задача (*Коуровская тетрадь*, Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1999, задача 12.86): *для каждой известной простой конечной группы G найти такое максимальное число $n = n\left(G\right)$, что G^n порождается двумя элементами.* В 2004 году Н.М. Сучковым и Д.М. Приходько были доказано следующее утверждение ([6], теоремы 4.5 и 4.6):

(*a*) *Пусть*

$$\varphi\left(m\right) = \frac{1}{m}\left(2^m - 2\right)\left(4^m + 2^m - 1\right), m = 1, 2, \ldots \tag{4.1}$$

Если m - простое число, то $n\left(L_2\left(2^m\right)\right) = \varphi\left(m\right)$. При составном m имеет место рекуррентная формула

$$n\left(L_2\left(2^m\right)\right) = \varphi\left(m\right) - \frac{1}{m}\sum_{1<t<m,\ t|m} tn\left(L_2\left(2^t\right)\right). \tag{4.2}$$

(*b*) . *Пусть*

$$\psi\left(m\right) = \frac{1}{m}\left(2^m - 2\right)\left(16^m + 8^m + 2\times 4^m + 2\times 2^m - 1\right),\ m = 1, 2, \ldots. \tag{4.3}$$

Если m – простое нечётное число, то $n\left(Sz\left(2^m\right)\right) = \psi\left(m\right)$. *При составном m имеет место рекуррентная формула*

$$n(Sz\left(2^{2k+1}\right)) = \psi\left(m\right) - \frac{1}{m}\sum_{1<t<m,\ t|m} tn(Sz\left(2^t\right)). \tag{4.4}$$

Если записать (4.1)-(4.2) в виде

$$m\varphi\left(m\right) = \sum_{t|m} tn\left(L_2\left(2^t\right)\right),$$

то отсюда непосредственно из классической теоретико-числовой формулы обращения Мёбиуса (см., например, [13]) из (4.1) и (4.2)) вытекает следующее утверждение

Лемма 8. *Справедливы следующие явные формулы для чисел* $n\left(L_2\left(2^m\right)\right)$ *и* $m = 1, 2, \ldots$*:*

$$n\left(L_2\left(2^m\right)\right) = \frac{1}{m}\sum_{t|m}\mu\left(m/t\right)t\varphi\left(t\right) = \frac{1}{m}\sum_{t|m}\mu\left(m/t\right)\left(2^t-2\right)\left(4^t+2^t-1\right), \tag{4.5}$$

где через $\mu\left(t\right)$ *обозначена функция Мёбиуса: если* $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_\nu^{\alpha_\nu}$ *есть каноническое разложение натурального числа* n*, то* $\mu\left(n\right) = \left(-1\right)^\nu$*, если* $\alpha_1 = \alpha_1 = ... = \alpha_\nu = 1$*, и* $\mu\left(n\right) = 0$ *в остальных случаях.*

Аналогично из (4.3)–(4.4) вытекает

Лемма 9. *Пусть* $\psi\left(m\right) = \frac{1}{m}\left(2^m-2\right)\left(16^m+8^m+2\times 4^m+2\times 2^m-1\right)$ *для нечетных* m*,* $\psi(m) = 0$*, при четных* m*. Если* m *- простое число, то* $n\left(Sz\left(2^m\right)\right) = \psi\left(m\right)$*. При составном* m *имеет место место явная формула*

$$n\left(Sz\left(2^m\right)\right) = \frac{1}{m}\sum_{t|m}\mu\left(m/t\right)t\psi\left(t\right) =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{t|m}\mu\left(m/t\right)\left(2^t-2\right)\left(16^t+8^t+2\times 4^t+2\times 2^t-1\right).$$

Из формул (4.3) и (4.4) следует, что в каждой из них число $n\left(L_2\left(2^m\right)\right)$ при фиксированном m представимо в виде линейной комбинации сумм $\frac{1}{m}S_m(k)$, $k = 1, 2, 4, 8, 16,$ *или* 32, с постоянными коэффициентами следующего вида

$$S_m(k) := \frac{1}{m}\sum_{t|m}\mu\left(m/t\right)k^t, \text{ где } k = 1, 2, 4, 8, 16, \text{ или } 32. \tag{4.6}$$

Это позволяет поставить следующую проблему.

(*a*) *Найти интегральное представление, представление в замкнутом виде* (*если это возможно*)*, различные оценки, и порядок роста* (см., например, [12]) *при* $m \to \infty$ *сумм* $S_m(k)$ *по делителям вида* (4.6)*, и некоторым линейным комбинациям из них.*

(*b*) *Решить ту же проблему для более широкого класса сумм типа*

$$S_m\left(f\right) := \frac{1}{m}\sum_{t|m}\mu\left(m/t\right)f\left(t\right) \tag{4.7}$$

для различных теоретико-числовых функций $f\left(t\right)$ *, отличных от* k^t*.*

Замечание 3. Одним из путей решения первой задачи является использование дискретного преобразования Меллина, предложенного С.В. Рыко в конце 1970 годов [5]. Вычисление сумм типа (4.7) в замкнутом виде хорошо известны для отдельных случаев арифметических функций. Особенно сложны и актуальны при достаточно большом m проблемы из третьей группы.

Мы выражаем сердечную благодарность своим коллегам А.В. Тимофеенко, Я.Н. Нужину, В.М. Левчуку, и В.И. Половинкину за ряд полезных замечаний при написании этой работы.

Список литературы

1. Егорычев Г. П. Ранги факторов нижнего центрального ряда свободной разрешимой группы / Г. П. Егорычев // Сиб. мат. журн. – 1972. – Т. 13. – С. 708—713. English transl. in Siberian Math. J. 13,1972.
2. Егорычев Г. П. Интегральные представления и вычисление комбинаторных сумм / Г. П. Егорычев. – Новосибирск : Наука, 1977. – 285 с.; English: Transl. of Math. Monographs **59**, *AMS*, 1984, 2-nd Ed. in 1989.
3. Егорычев Г. П. Перечислительные проблемы для групп и алгебр лиева типа / Г. П. Егорычев, В. М. Левчук // Докл. РАН. – 1993. – Т. 330. – С. 464–467.
4. Почекутов Д. Ю. Диагонали рядов Лорана рациональных функций / Д. Ю. Почекутов // Сиб. мат. журн. – 2009. – Т. 50, № 6. – С. 1370–1383.
5. Рыко В. С. Дискретное преобразование Меллина / В. С. Рыко. – Вологда, 1979. – 7 с. – Деп. в ВИНИТИ АН СССР 16.01.79, № 199–79.
6. Сучков Н. М. О числе пар порождающих групп $L_2\left(2^m\right)$ и $Sz\left(2^{2k+1}\right)$, / Н. М. Сучков, Д. М. Приходько // Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42, № 5. – С. 1162–1167.
7. Barry P. On integer-sequence-based constructions of generalized Pascal triangles / P. Barry // Journal of Integer Sequences. – 2006. – Vol. 9, article 06.2.4. – P. 1–34.
8. Bona M. On divisibility of Narayana numbers by primes / M. Bona, B. E. Sagan. – arXiv:math/05055382. – V. 1 [math.CO] 18 May 2005. – P. 1–5.
9. Egorychev G. P. Method coefficients: an algebraic characterization and recent applications / G. P. Egorychev // Advances in combinatorial mathematics : Proceedings of the Waterloo Workshop in computer algebra 2008, devoted to the 70th birthday Georgy Egorychev / eds. I. S. Kotsireas, E. V. Zima. – Springer, 2009. – P. 1–30.
10. Egorychev G. P. Decomposition and Group Theoretic Characterization of pairs of inverse relations of the Riordan type / G. P. Egorychev, E. V. Zima // Acta Applicandae Mathematicae. – 2005. – Vol. 85. – P. 93–109.
11. Egorychev G. P. Enumeration in the Chevalley algebras / G. P. Egorychev, V. M. Levchuk // ACM SIGSAM Bulletin. – 2001. – Vol. 35. – P. 20–34.
12. Erfanian A. On the Growth Sequences of $PSp(2m, q)$, / A. Erfanian, R. Rezaei // Inter. Jornal. – 2007. – Vol. 1. – P. 51–62.
13. Titchmarsh E. C. The theory of the Riemann Zeta-Function / E. C. Titchmarsh. – Oxford, 1951. (Рус. пер.: Е. К. Титчмарш. Теория дзета-функции Римана. ИЛ, 1953).

G. P. Egorychev, M. N. Davletshin

Enumerative problems in some matrix rings and finite groups

Abstract. In this article were obtained several new results for the combinatorial numbers which arised earlier in an implicit kind by an enumeration of ideals of nilpotent ring of matrices over finite ring (G.P. Egorychev, V.M. Levchuk, 2001) and also the numbers of pairs of generating projective special linear groups of dimension 2 and the Suzuki groups over finite fields of the characteristic 2 (N.M. Suchkov and D.P. Prihodko, 2001). These results were obtained by authors with the help of the Egorychev's method of integral representation and computing of combinatorial sums (the set of inference rules and the Completeness Lemma) developed by him to the end 1970.

Some new problems are put and planned prospect of the further researches.

Keywords: combinatorial sums; the method of coefficients; enumerative problems; matrix rings; finite groups.

Егорычев Георгий Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский федеральный университет, Красноярск, тел.: (391)2461609 (anott@scn.ru)

Давлетшин Максим Николаевич, старший преподаватель, Сибирский федеральный университет, Красноярск, тел.: +79029410042 (davmaks@gmail.com)

Egorychev Georgy, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, professor, Phone: (391) 2461609 (anott@scn.ru)

Davletshin Maxim, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, senior lecturer, Phone: +79029410042 (davmaks@gmail.com)