Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 4. С. 48—57

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 512.54

Стабильные элементы в свободных нильпотентных группах ранга два

А. И. Ковыршина
Восточно-Сибирская государственная академия образования

Аннотация. Настоящая работа посвящена нахождению всех стабильных элементов с однородным вхождением образующих в свободных нильпотентных группах ранга 2 и ступени 12.

Ключевые слова: нильпотентные группы, автоморфизмы, неподвижные элементы.

Стабильными элементами называются элементы группы, которые неподвижны при всех ее автоморфизмах. Вопрос о существовании стабильных элементов в свободных нильпотентных группах был поставлен А. Мясниковым в электронном проекте MAGNUS[1] (вопрос N1):

Пусть G — свободная нильпотентная группа конечного ранга r. Пусть элемент $g \in G$ неподвижен относительно всех автоморфизмов группы G. Верно ли, что $g = 1$?

В 1998 году отрицательный ответ на этот вопрос получен В.В. Блудовым в работе [1], в которой доказано, что в свободных нильпотентных группах ранга 2, ступени $4k$, $k \geqslant 2$ существуют нетривиальные стабильные элементы. В 2001 году А. Папистас [6] и Е. Форманек [5] привели общую классификацию свободных нильпотентных групп, в которых существуют нетривиальные стабильные элементы. Конкретные примеры стабильных элементов в свободных нильпотентных группах ранга 2 представлены в работах [1] и [2].

1. Обозначения и предварительные сведения

В основном мы используем стандартные обозначения (см. книги [3, 4]). Элементы, неподвижные относительно внутренних автоморфизмов образуют центр группы, поэтому все рассматриваемые нами элементы

[1] http://www.grouptheory.org/group-theory.org/projects-and-problems

лежат в центре. В связи с этим, для умножения элементов используем знак $+$, даже если умножение некоммутативно. Определение базисных коммутаторов можно найти в [4].

F_2 — обозначает свободную группу ранга 2, $F_{2,12}$ — свободную нильпотентную группу ранга 2 ступени нильпотентности 12, $AutF_2$ — группу всех автоморфизмов F_2, $IA(F_2)$ — группу всех IA-автоморфизмов, т.е. автоморфизмов, которые действуют тождественно на фактор-группе $F_2/[F_2, F_2]$.

В нашей работе рассматривается группа $F_{2,12}$ со свободными образующими a, b. Так как $Aut(F_2)/IA(F_2) \backsimeq Aut(F_2/[F_2, F_2]) \backsimeq SL_2(\mathbb{Z})$, то можно ввести обозначения для следующих автоморфизмов группы $F_{2,12}$:

$$\begin{array}{l} \varphi_{12} : a \to a + b,\ b \to b; \\ \varphi_{21} : a \to a,\ b \to a + b; \end{array} \tag{1.1}$$

Чтобы проверить является ли элемент $g \in F_{2,12}$ стабильным, необходимо и достаточно проверить, что g неподвижен относительно автоморфизмов φ_{12} и φ_{21}.

В группе $F_{2,12}$ все базисные коммутаторы веса 12 порождают центр. Все такие базисные элементы разобьем на классы коммутаторов одного и того же вида.

Введем обозначения для расположения скобок в базисных коммутаторах (видах коммутаторов). Считаем по определению, что все левонормированные базисные коммутаторы $[x_1, \dots, x_m]$ веса m, где $x_1, \dots, x_m \in \{a, b\}$, имеют вид (m). Пусть u_i — коммутатор вида (k_i), $i = 1, \dots, s$. Тогда считаем, что коммутатор $[u_1, \dots, u_s]$ имеет вид $(k_1, \dots, k_s)$. Через M_1 обозначим множество базисных коммутаторов вида (12), M_2 — множество базисных коммутаторов видов (k_1, k_2), где $k_1 + k_2 = 12$ и $k_1 > k_2 > 1$. Далее, рассмотрим следующие виды коммутаторов:

$\delta_1 = (8, 2, 2)$; $\delta_2 = (5, 2, 5)$; $\delta_3 = (7, 2, 3)$; $\delta_4 = (6, 2, 4)$;
$\delta_5 = (6, 3, 3)$; $\delta_6 = (3, 3, 6)$; $\delta_7 = (4, 2, 6)$; $\delta_8 = (4, 4, 4)$;
$\delta_9 = (6, 2, 2, 2)$; $\delta_{10} = (4, 2, 2, 2, 2)$; $\delta_{11} = (4, 3, 5)$; $\delta_{12} = (3, 2, 2, 5)$;
$\delta_{13} = (5, 2, 2, 3)$; $\delta_{14} = (3, 2, 2, 2, 3)$; $\delta_{15} = (5, 3, 4)$; $\delta_{16} = (3, 2, 3, 4)$;
$\delta_{17} = (4, 2, 3, 3)$; $\delta_{18} = (3, 3, 3, 3)$; $\delta_{19} = (4, 2, 2, 4)$;
$\delta_{20} = ((4, 2), (4, 2))$; $\delta_{21} = ((6, 1), (3, 2))$; $\delta_{22} = ((4, 3), (3, 2))$;
$\delta_{23} = ((5, 2), (3, 2))$; $\delta_{24} = ((3, 3), (4, 2))$; $\delta_{25} = ((3, 3), (3, 3))$;
$\delta_{26} = ((3, 2, 2), (3, 2))$.

Через Δ_j обозначим множество базисных коммутаторов вида δ_j.

Таким образом, все базисные коммутаторы разбиты на 28 множеств, два из которых мы обозначили через M_1 и M_2, остальные через Δ_j, $j = 1, \dots, 26$.

Количество элементов в множестве Δ_j обозначим через r_j. Введем обозначения для линейной комбинации элементов $u_i^{(j)}$ из Δ_j. Зафиксируем набор $\hat{m}^{(j)} = (m_1^{(j)}, \ldots, m_{r_j}^{(j)})$ целочисленных коэффициентов и через $U_j(\hat{m}^{(j)})$ обозначим линейную комбинацию всех коммутаторов $u_i^{(j)}$, принадлежащих Δ_j, взятых с коэффициентами из последовательности $\hat{m}^{(j)}$, то есть:

$$U_j(\hat{m}^{(j)}) = \sum_{i=1}^{r_j} m_i^{(j)} u_i^{(j)}, \text{ где } u_i^{(j)} \in \Delta_j,\ j = 1, \ldots, 26. \tag{1.2}$$

2. Общая схема нахождения стабильных элементов

Рассмотрим автоморфизм φ_{12}, действующий на группе $F_{2,12}$. Под действием φ_{12}, базисный коммутатор u переходит в сумму $u+w_1+w_2+w_3+w_4+w_5+w_6$, где w_k $(k = 1, \ldots, 6)$ — линейная комбинация коммутаторов, полученных из u, заменой k вхождений образующего a на b. Коммутаторы v_j, входящие в линейную комбинацию w_1, могут потерять базисный вид, поэтому их необходимо преобразовать в базисные $v_j = \tilde{v}_{j,1}+\tilde{v}_{j,2}$, где $\tilde{v}_{j,1}$ — линейная комбинация базисных коммутаторов такого же вида что и у коммутатора u, а $\tilde{v}_{j,2}$ — линейная комбинация остальных базисных коммутаторов на которые раскладывается v_j. Тогда,

$$u^{\varphi_{21}} = u + \sum_j \tilde{v}_{j,1} + \sum_j \tilde{v}_{j,2} + \sum_{s=2}^{6} w_s \tag{2.1}$$

Если $U = \sum m_i u_i$ — линейная комбинация базисных коммутаторов одного вида, то подставляя в (2.1) $u = u_i$ и суммируя с коэффициентами m_i получим, что

$$U^{\varphi_{21}} = U + \sum_{i,j} m_i \tilde{v}_{i,j,1} + \sum_{i,j} m_i \tilde{v}_{i,j,2} + \sum_{i,s} m_i w_{i,s} \tag{2.2}$$

Второе слагаемое запишем в виде

$$\sum_{i,j} m_i \tilde{v}_{i,j,1} = \sum \tilde{m}_k v_k,$$

приведя подобные. Таким образом, $\tilde{m}_k$ являются линейными формами от m_i. Аналогичные формулы получаем для автоморфизма φ_{21}.

Множества коммутаторов, входящих во 2-е и 3-е слагаемые в (2.2), определены базисными коммутаторами разного вида, а значит, не пересекаются. Необходимым условием стабильности элемента является равенство нулю второго слагаемого, т.е. все коэффициенты $\tilde{m}_k$ равны нулю. Если система уравнений $\tilde{m}_k = 0$ относительно неизвестных m_i имеет единственное нулевое решение, то элемент U является тривиальным. Если $m_i \neq 0$, то подставим их значения в третье слагаемое в (2.2). Если в результате подстановки это слагаемое обратится в ноль, то U является кандидатом на стабильный элемент. В противном случае, к U необходимо добавить линейную комбинацию всех базисных коммутаторов того же вида, что и у коммутаторов, входящих в $\tilde{v}_{i,j,2}$ и повторить описанную процедуру.

Заменив в базисном коммутаторе u одно вхождение какого-либо образующего на другой, мы получим сумму базисных коммутаторов различных видов, определяемых коммутатором u. Рассмотрев все возможные варианты базисных коммутаторов из Δ_j $(j = 1, \ldots, 26)$, получаем, что элементы из Δ_j в результате одной замены какого-либо образующего на другой переходят в сумму коммутаторов из Δ_i, где i зависит от j. Так, например, элементы из Δ_1 переходят в сумму коммутаторов из Δ_i, $j = 1, 9, 12, 13, 19, 20, 23$, что записываем в виде

$$\Delta_1 \to \Delta_1 + \Delta_9 + \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{19} + \Delta_{20} + \Delta_{23}.$$

Далее устанавливаем такие же связи для остальных Δ_j, $i = 2, \ldots, 26$:

$$\begin{gathered}
\Delta_2 \to \Delta_2 + \Delta_{12} + \Delta_{23}; \\
\Delta_3 \to \Delta_3 + \Delta_{13} + \Delta_{16} + \Delta_{17} + \Delta_{22} + \Delta_{24}; \\
\Delta_4 \to \Delta_4 + \Delta_{16} + \Delta_{19}; \quad \Delta_5 \to \Delta_5 + \Delta_6 + \Delta_{17} + \Delta_{18} + \Delta_{25}; \\
\Delta_6 \to \Delta_6 + \Delta_{24} + \Delta_{25}; \quad \Delta_7 \to \Delta_7 + \Delta_{20} + \Delta_{24}; \\
\Delta_8 \to \Delta_8; \quad \Delta_9 \to \Delta_9 + \Delta_{10} + \Delta_{14} + \Delta_{26}; \quad \Delta_{10} \to \Delta_{10}; \\
\Delta_{11} \to \Delta_{11} + \Delta_{22}; \quad \Delta_{12} \to \Delta_{12} + \Delta_{26}; \quad \Delta_{13} \to \Delta_{13} + \Delta_{14}; \\
\Delta_{14} \to \Delta_{14} + \Delta_{27}; \quad \Delta_{15} \to \Delta_{15} + \Delta_{16}; \quad \Delta_{16} \to \Delta_{16}; \\
\Delta_{17} \to \Delta_{17} + \Delta_{24}; \quad \Delta_{18} \to \Delta_{18} + \Delta_{25}; \quad \Delta_{19} \to \Delta_{19}; \\
\Delta_{20} \to \Delta_{20}; \quad \Delta_{21} \to \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{23}; \quad \Delta_{22} \to \Delta_{22}; \\
\Delta_{23} \to \Delta_{23} + \Delta_{26}; \quad \Delta_{24} \to \Delta_{24}; \quad \Delta_{25} \to \Delta_{25}; \quad \Delta_{26} \to \Delta_{26}.
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Ниже (в теореме 1) будет показано что среди комбинаций коммутаторов из Δ_k, $k = 1, 3 \ldots, 10, 13, 18, 20, 21, 25$ нет стабильных элементов. Остальные множества Δ_s, $s = 2, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 19, 22, 23, 24, 26$ разобьем на группы в зависимости от того, какой вид базисных коммутаторов получается после замены одного вхождения образующего на другой. Каждую такую группу представим в виде ориентированного графа, вершинами которого являются множества базисных коммутаторов. Ребро $\overrightarrow{ij}$ с концами i, j принадлежит графу, если Δ_j входит в правую часть (т.е. после стрелки) в выражение для Δ_i в (2.3). Таким образом, получим:

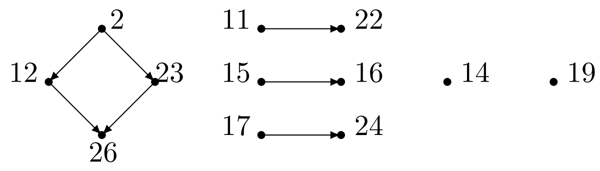

Рис.1.

Одно из достаточных условий нестабильности элемента приведено в следующей лемме.

Лемма 1. *Если в представление элемента $V \in F_{2,12}$ входит линейная комбинация элементов из M_1 или M_2, то существует автоморфизм φ, под действием которого $V^{\varphi} \neq V$.*

Для классификации стабильных элементов полезна

Теорема 1. *Пусть $K = \{1, 3, \dots, 10, 13, 18, 20, 21, 25\}$. Тогда для любой последовательности целых чисел $\hat{m}^{(k)}$ и любой нетривиальной комбинации базисных коммутаторов $U_k(\hat{m}^{(k)})$, $k \in K$, существует автоморфизм φ, под действием которого $(U_k(\hat{m}^{(k)}))^{\varphi} \neq U_k(\hat{m}^{(k)})$.*

Доказательство. Рассмотрим множество Δ_1. Базисным коммутатором с однородным вхождением образующих является единственный элемент $u_1^{(1)} = ((abbbbaaa)(ab)(ab))$. Легко понять, что $u_1^{(1)}$ — не является стабильным, так как применив к нему автоморфизм φ_{12} получим, что в разложение $(u_1^{(1)})^{\varphi_{12}}$ входит элемент $((abbbbbaa)(ab)(ab))$ с коэффициентом $3m_1^{(1)} \neq 0$. Подобным образом доказательство проводится и для остальных $k \in K$. □

Теперь приведем условия, при которых существуют стабильные элементы.

Утверждение 1. *Пусть $K = \{2, 12, 23, 26\}$. Тогда существуют последовательности целых чисел $\hat{m}^{(k)}$, $k \in K$, такие что элемент*

$$g = \sum_{k \in K} U_k(\hat{m}^{(k)}) \tag{2.4}$$

является нетривиальным стабильным элементом группы $F_{2,12}$.

Доказательство. Рассмотрим множество Δ_2. Определим все базисные коммутаторы $u_i^{(2)}$ вида $(f^{(5)} f^{(2)} f^{(5)})$, имеющие по 6 вхождений образующих a и b:

$$u_1^{(2)} = ((abbbb)(ab)(abaaa)), \; u_2^{(2)} = ((abbba)(ab)(abbaa)),$$
$$u_3^{(2)} = ((abbaa)(ab)(abbba)), \; u_4^{(2)} = ((abaaa)(ab)(abbbb)).$$

Применим к элементу $U_2(\hat{m}^{(2)}) = \sum\limits_{i=1}^{4} m_i^{(2)} u_i^{(2)}$ автоморфизм φ_{12}. Рассмотрим линейную комбинацию всех базисных коммутаторов, полученных из $u_i^{(2)}$ заменой одного вхождения образующего a на b:

$$(2m_1^{(2)} + m_2^{(2)})((abbbb)(ab)(abbaa)) + (2m_2^{(2)} + 2m_3^{(2)})((abbba)(ab)(abbba)) +$$

$$+ (m_3^{(2)} + 3m_4^{(2)})((abbaa)(ab)(abbbb)) + m_3^{(2)}((abb)(ab)(ab)(abbba)) +$$

$$+ m_4^{(2)}((aba)(ab)(ab)(abbbb)) + m_1^{(2)}(((abbbb)(ab))((aba)(ab))) +$$

$$+ m_2^{(2)}(((abbba)(ab))((abb)(ab))).$$

В данную сумму входят коммутаторы из Δ_2, Δ_{12} и Δ_{23}. Запишем условия при которых линейная комбинация коммутаторов из Δ_2 равна нулю:

$$\begin{array}{l} 2m_1^{(2)} + m_2^{(2)} = 0,\ 2m_2^{(2)} + 2m_3^{(2)} = 0, \\ m_3^{(2)} + 3m_4^{(2)} = 0. \end{array} \tag{2.5}$$

Добавим к $U_2(\hat{m}^{(2)})$ комбинации $U_s(\hat{m}^{(s)})$, $s = 12, 23$.

Пусть $s = 12$. Все базисные коммутаторы из Δ_{12}, имеющие по 6 вхождений образующих a, b имеют вид:

$$u_1^{(12)} = ((abb)(ab)(ab)(abbaa)),\ u_2^{(12)} = ((aba)(ab)(ab)(abbba)).$$

Подействуем φ_{12} на элемент $U_{12}(\hat{m}^{(12)}) = m_1^{(12)} u_1^{(12)} + m_2^{(12)} u_2^{(12)}$.

Линейная комбинация всех коммутаторов, полученных из $u_j^{(12)}$ заменой одного вхождения образующего a на b равна:

$$(2m_1^{(12)} + m_2^{(12)})((abb)(ab)(ab)(abbba)) + m_2^{(12)}((aba)(ab)(ab)(abbbb)) +$$

$$+ m_1^{(12)}(((abb)(ab)(ab))((abb)(ab))).$$

В данную сумму входят коммутаторы из Δ_{12} и Δ_{26}. Запишем условия на коэффициенты $m_j^{(12)}$, при которых линейная комбинация базисных коммутаторов из Δ_{12} в разложении $(U_2(\hat{m}^{(2)}) + U_{12}(\hat{m}^{(12)}))^{\varphi_{12}}$ равна нулю:

$$m_3^{(2)} + 2m_1^{(12)} + m_2^{(12)} = 0,\ m_4^{(2)} + m_2^{(12)} = 0. \tag{2.6}$$

Добавим к $U_2(\hat{m}^{(2)}) + U_{12}(\hat{m}^{(12)})$ линейную комбинацию $U_{23}(\hat{m}^{(23)})$ всех коммутаторов из Δ_{23}, имеющих по 6 вхождений каждого из образующих a, b:

$$u_1^{(23)} = (((abbba)(ab))((aba)(ab))),\ u_2^{(23)} = (((abbaa)(ab))((abb)(ab))).$$

Подействуем φ_{12} на элемент $U_{23}(\hat{m}^{(23)}) = m_1^{(23)}u_1^{(23)} + m_2^{(23)}u_2^{(23)}$.

Линейная комбинация всех коммутаторов, полученных из $u_j^{(23)}$ заменой одного вхождения образующего a на b равна:

$$m_1^{(23)}(((abbbb)(ab))((aba)(ab)))+(m_1^{(23)}+2m_2^{(23)})(((abbba)(ab))((abb)(ab)))+$$
$$+m_2^{(23)}(((abb)(ab)(ab))((abb)(ab))).$$

В данную сумму входят коммутаторы из Δ_{23} и Δ_{26}.

Для того чтобы линейная комбинация базисных коммутаторов из Δ_{23} в разложении $(U_2(\hat{m}^{(2)}) + U_{12}(\hat{m}^{(12)}) + U_{23}(\hat{m}^{(23)}))^{\varphi_{12}}$ была равна нулю, достаточно чтобы коэффициенты $m_j^{(23)}$ удовлетворяли условиям:

$$m_1^{(2)} + m_1^{(23)} = 0,\ m_2^{(2)} + m_1^{(23)} + 2m_2^{(23)} = 0. \tag{2.7}$$

Добавим к $U_2(\hat{m}^{(2)}) + U_{15}(\hat{m}^{(12)}) + U_{23}(\hat{m}^{(23)})$ линейную комбинацию всех коммутаторов из Δ_{26}, имеющих по 6 вхождения каждого из образующих a, b:

$$u_1^{(26)} = (((aba)(ab)(ab))((abb)(ab))),\ u_2^{(26)} = (((abb)(ab)(ab))((aba)(ab))).$$

Линейная комбинация всех коммутаторов, полученных из $u_j^{(26)}$ заменой одного вхождения образующего a на b равна:

$$(m_1^{(26)} + m_2^{(26)})(((abb)(ab)(ab))((abb)(ab))).$$

Запишем условие при котором линейная комбинация коммутаторов из Δ_{26} в разложении $(U_2(\hat{m}^{(2)}) + U_{12}(\hat{m}^{(12)}) + U_{23}(\hat{m}^{(23)}) + U_{26}(\hat{m}^{(26)}))^{\varphi_{12}}$ равна нулю:

$$m_1^{(12)} + m_2^{(23)} + m_1^{(26)} + m_2^{(26)} = 0. \tag{2.8}$$

Для определения всех $\hat{m}^{(k)}$, $k = 2, 12, 23, 26$ найдем общее решение объединенной системы (2.5)–(2.8):

$$\begin{array}{llll} m_1^{(2)} = t_1, & m_2^{(2)} = -3t_1, & m_3^{(2)} = 3t_1, & m_4^{(2)} = -t_1, \\ m_1^{(12)} = -2t_1, & m_2^{(12)} = t_1, & & \\ m_1^{(23)} = -t_1, & m_2^{(23)} = 2t_1, & & \\ m_1^{(26)} = t_2, & m_2^{(26)} = -t_2. & & \end{array} \tag{2.9}$$

Используя полученные формулы для коэффициентов $m_i^{(k)}$, $k \in K$, при любых целых, отличных от нуля t_1, t_2 составляем последовательности $\hat{m}^{(k)}$, для которых элемент (2.4) становится кандидатом на стабильный элемент, так как равны нулю все линейные комбинации коммутаторов, полученных из коммутаторов, входящих в элемент g, заменой одного вхождения образующего a на b. Далее проверяем, что линейные комбинации коммутаторов, полученных заменой более одного вхождения a на b также равны нулю.

Применим к g автоморфизм φ_{21} и запишем линейную комбинацию коммутаторов, полученных из коммутаторов, входящих в элемент g, заменой одного вхождения b на a :

$$(3m_1^{(2)}+m_2^{(2)})((abbba)(ab)(abaaa))+(2m_2^{(2)}+2m_3^{(2)})((abbaa)(ab)(abbaa))+$$
$$+(m_3^{(2)}+3m_4^{(2)})((abaaa)(ab)(abbba))+2m_1^{(2)}((abb)(ab)(ab)(abaaa))+$$
$$+2m_4^{(2)}(((abaaa)(ab))((abb)(ab)))+m_1^{(12)}((abb)(ab)(ab)(abaaa))+$$
$$+(m_1^{(12)}+2m_2^{(12)})((aba)(ab)(ab)(abbaa))+(2m_1^{(23)}+m_2^{(23)})\times$$
$$\times(((abbaa)(ab))((aba)(ab)))+m_2^{(23)}(((abaaa)(ab))((abb)(ab)))+$$
$$+(m_1^{(26)}+m_2^{(26)})(((aba)(ab)(ab))((aba)(ab))).$$

После приведения подобных и подстановки вместо $m_i^{(k)}$, $k \in K$ их выражений через t_1, t_2 согласно формулам (2.9) получаем, что данная линейная комбинация равна нулю.

Далее проверяем, что линейные комбинации коммутаторов, полученных заменой более одного вхождения b на a также равны нулю. Таким образом, g — стабильный элемент и утверждение доказано. □

Утверждение 2. *Пусть $K = \{11, 14, 15, 16, 17, 19, 22, 24\}$. Тогда существуют последовательности целых чисел $\hat{m}^{(k)}$, $k \in K$, такие что элемент $g = \sum_{k\in K} U_k(\hat{m}^{(k)})$ является нетривиальным стабильным элементом группы $F_{2,12}$.*

Доказательство. Проводится аналогично доказательству утверждения 1. Опуская вычисления, мы запишем все найденные базисные коммутаторы из Δ_k, $k \in K$, входящие в представление стабильного элемента и укажем коэффициенты, с которыми они входят в это представление.

Δ_{11}:
$u_1^{(11)} = ((abbb)(abb)(abaaa))$, $u_2^{(11)} = ((abbb)(aba)(abbaa))$,
$u_3^{(11)} = ((abba)(abb)(abbaa))$, $u_4^{(11)} = ((abba)(aba)(abbba))$,
$u_5^{(11)} = ((abaa)(abb)(abbba))$, $u_6^{(11)} = ((abaa)(aba)(abbbb))$.
$m_1^{(11)} = t_3$, $m_2^{(11)} = -t_3$, $m_3^{(11)} = -2t_3$,
$m_4^{(11)} = 2t_3$, $m_5^{(11)} = t_3$, $m_6^{(11)} = -t_3$.

Δ_{14}:
$u_1^{(14)} = ((abb)(ab)(ab)(ab)(aba))$, $u_2^{(14)} = ((aba)(ab)(ab)(ab)(abb))$.
$m_1^{(14)} = t_4$, $m_2^{(14)} = -t_4$.

Δ_{15}:
$u_1^{(15)} = ((abbbb)(aba)(abaa)),\ u_2^{(15)} = ((abbba)(abb)(abaa)),$
$u_3^{(15)} = ((abbba)(abb)(abba)),\ u_4^{(15)} = ((abbaa)(abb)(abba)),$
$u_5^{(15)} = ((abbaa)(aba)(abbb)),\ u_6^{(15)} = ((abaaa)(abb)(abbb)).$
$m_1^{(15)} = t_5,\quad m_2^{(15)} = -t_5,\ m_3^{(15)} = -2t_5,$
$m_4^{(15)} = 2t_5,\ m_5^{(15)} = t_5,\quad m_6^{(15)} = -t_5.$

Δ_{16}:
$u_1^{(16)} = ((abb)(ab)(abb)(abaa)),\ u_2^{(16)} = ((abb)(ab)(aba)(abba)),$
$u_3^{(16)} = ((aba)(ab)(abb)(abba)),\ u_4^{(16)} = ((aba)(ab)(aba)(abbb)).$
$m_1^{(16)} = t_6,\ m_2^{(16)} = -2t_5 - t_6,\ m_3^{(16)} = -t_6,\ m_4^{(16)} = t_5 + t_6.$

Δ_{17}:
$u_1^{(17)} = ((abbb)(ab)(aba)(aba)),\ u_2^{(17)} = ((abba)(ab)(abb)(aba)),$
$u_3^{(17)} = ((abaa)(ab)(abb)(abb)).$
$m_1^{(17)} = t_7,\ m_2^{(17)} = -2t_7,\ m_3^{(17)} = t_7.$

Δ_{19}:
$u_1^{(19)} = ((abbb)(ab)(ab)(abaa)),\ u_2^{(19)} = ((abba)(ab)(ab)(abba)),$
$u_3^{(19)} = ((abaa)(ab)(ab)(abbb)).$
$m_1^{(19)} = t_8,\ m_2^{(19)} = -2t_8,\ m_3^{(19)} = t_8.$

Δ_{22}:
$u_1^{(22)} = (((abbb)(aba))((aba)(ab))),\ u_2^{(22)} = (((abba)(abb))((aba)(ab))),$
$u_3^{(22)} = (((abba)(aba))((abb)(ab))),\ u_4^{(22)} = (((abaa)(abb))((abb)(ab))).$
$m_1^{(22)} = t_9,\ m_2^{(22)} = -t_3 - t_9,\ m_3^{(22)} = t_3 - t_9,\ m_4^{(22)} = t_3 + t_9.$

Δ_{24}:
$u_1^{(24)} = (((aba)(abb))((abba)(ab))),\ m_1^{(24)} = t_7.$

□

Из утверждений 1 и 2 следует основной результат работы.

Теорема 2. *Существует подгруппа H ранга 9, любой элемент которой является стабильным элементом группы $F_{2,12}$.*

Автор благодарен своему научному руководителю профессору Блудову В.В. за постановку вопросов и внимание к работе.

Список литературы

1. Блудов В. В. Неподвижные точки относительно всех автоморфизмов в свободных нильпотентных группах / В. В. Блудов // Третий Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике : тез. докл. – Новосибирск, 1998. – Ч. 5.
2. Ковыршина А. И. Неподвижные элементы в свободных нильпотетных группах ранга три / А. И. Ковыршина // Вестн. НГУ. Сер.: Математика, механика, информатика. – 2008. – Т. 8, вып. 2. – С. 85–91.
3. Линдон Р. Комбинаторная теория групп / Р. Линдон, П. Шупп. – М. : Мир, 1980. – 477 с.
4. Магнус В. Комбинаторная теория групп / В. Магнус, А. Каррас, Д.Солитэр. – М. : Наука, 1974. – 455 с.
5. Formanek E. Fixed points and centers of automorphism groups of free nilpotent groups / E. Formanek // Communications in algebra. – 2002. – Vol. 30. – P. 1033–1038.
6. Papistas A. A note on fixed points of certain relatively free nilpotent groups / A. Papistas // Communications in algebra. – 2001. – Vol. 29. – P. 4693–4699.

A. I. Kovyrshina

Stable elements of free nilpotent class 12 groups with 2 generators

Abstract. This paper contains the full description of fixed elements by all automorphisms of free nilpotent class 12 groups with two generators.

Ковыршина Анна Ивановна, старший преподаватель, Восточно-Сибирская государственная академия образования, 664011, Иркутск, Нижняя набережная, 6, тел.: (3952)460956 (annkow@mail.ru)

Kovyrshina Anna, East Siberian State Academy of Education, 664011, Irkutsk, Lower Quay str., 6 (annkow@mail.ru)