Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 4. С. 58—64

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 518.5

Вычислимые семейства конечнозначных общерекурсивных функций

Ю. Д. Корольков
Иркутский государственный университет

Аннотация. Доказана представимость индексных множеств всех вычислимых семейств общерекурсивных функций индексными множествами вычислимых семейств конечнозначных неубывающих общерекурсивных функций

Ключевые слова: индексное множество; общерекурсивная функция

Целью работы является поиск достаточно простых семейств общерекурсивных функций, но тем не менее представляющих структуру индексных множеств всех вычислимых семейств общерекурсивных функций. Здесь мы их ищем среди семейств неубывающих конечнозначных функций. Такие функции почти везде постоянны.

Одним из подходов к классификации семейств общерекурсивных функций (о.р.ф.) является исследование индексных множеств этих семейств относительно клиниевской (главной вычислимой) нумерации κ: $N \to R$ семейства всех одноместных частично-рекурсивных функций (ч.р.ф.). На классе R также рассматривается стандартная топология, базис открытых множеств которой порождается конечными функциями.

Ю. Л. Ершов [1, 4] рассматривает исследования индексных множеств как важные в теории нумераций. В работе [2] получены некоторые классификационные результаты для сложности индексных множеств вычислимых семейств общерекурсивных функций (о.р.ф.) в арифметической иерархии. В частности, установлены верхние и нижние границы сложности индексных множеств вычислимых семейств о.р.ф. Выявлено влияние внешних общерекурсивных предельных точек на сложность индексных множеств вычислимых семейств о.р.ф. При исследовании индексных множеств возможны и другие подходы, например, [3].

Нумерация α: $N \to A$ семейства конечных множеств A называется сильно вычислимой, если функция $f(i) =$«число элементов множества αi» общерекурсивна.

Вычислимое семейство A называется эффективно дискретным, если существует такая сильно вычислимая последовательность конечных множеств $T_0, T_1, ...$, что:

а) для всякого $X \in A$ найдется $T_i \subseteq X$;

б) $T_i \subseteq T_j \Rightarrow T_i = T_j$;

в) если $T_i \subseteq X_j \in A$ и $T_i \subseteq X_k \in A$, то $X_j = X_k$.

Вычислимое семейство A называется дискретным, если существует вычислимая последовательность конечных множеств с теми же свойствами. Дискретность невычислимых семейств определяется чисто топологическим путем.

Теорема 1. *Для каждого вычислимого семейства о.р.ф. B существует вычислимое дискретное семейство неубывающих конечнозначных о.р.ф. A такое, что их индексные множества изоморфны.*

Доказательство. Зафиксируем семейство B и его однозначную вычислимую нумерацию β, и будем строить по шагам искомое дискретное семейство A через построение его вычислимой нумерации α.

Зафиксируем некоторое вычислимое перечисление κ_i^s нумерации κ (равномерное по i и s) конечными функциями, где $\kappa_i^s \subseteq \kappa_i^{s+1}$ и $\kappa i = \cup \kappa_i^s$.

Для достижения сводимости $\kappa^{-1}(B)$ к $\kappa^{-1}(A)$ построим вычислимую нумерацию γ некоторого семейства ч.р.ф. такую, что $\kappa n \in B \Leftrightarrow \gamma n \in A$.

Рекурсивный оператор F для сведения индексного множества $\kappa^{-1}(A)$ к индексному множеству $\kappa^{-1}(B)$ будем задавать парой сильно вычислимых нумераций σ, τ начальных отрезков о.р.ф., таких, что выполнено условие: $\sigma(z, j) \subseteq \sigma(m, i) \Rightarrow \tau(z, j) \subseteq \tau(m, i)$.

Определим $F(\kappa q) = \cup(\tau(i, j) : \sigma(i, j) \subseteq \kappa q)$. Если при этом выполняется $\kappa q \in A \Leftrightarrow F(\kappa q) \in B$, то $\kappa^{-1}(A)$ сводится к $\kappa^{-1}(B)$.

Одновременно для подтверждения дискретности семейства A будем строить вычислимую нумерацию δ конечных функций, изолирующих элементы A.

Дадим сначала неформальное описание процедуры построения.

Во-первых, при построении нумерации γ отрезок γ_n^t на каждом шаге t будет определяться как начальный отрезок g_n^z некоторой ступенчатой функции g_n, принимающей значения $n, n+1, n+2$, и т.д., причем z не превосходит длины максимального начального отрезка, содержащегося в κ_n^t. Из этого будет следовать, в частности, что если κn — не о.р.ф., то γn — конечная функция. С другой стороны, γ_n^t будет увеличиваться в длине, если на шаге t нет противоречия с некоторой гипотезой $\kappa n = \beta k$. Возможно, на одном из следующих шагов u выяснится, что $\kappa n \neq \beta k$, но нет противоречия с новой гипотезой $\kappa n = \beta l$. Тогда γ_n^u также будет расти. Таким образом, γn будет о.р.ф., если $\kappa n \in B$ или κn есть о.р.ф. — внешняя предельная точка для B. В первом случае число перемен гипотез $\kappa n = \beta k$ конечно, тогда γn будет равна некоторой αm и поэтому попадет в A. Во втором случае — бесконечно, из-за этого γn будет бесконечнозначной и поэтому не будет принадлежать семейству A.

Во-вторых, каждая αm, будучи введена на некотором шаге начальным отрезком ступенчатой функции γn, в дальнейшем стабилизируется на последнем значении как константа. Каждая функция αm, чтобы заведомо стать о.р.ф., будет расширять свою область определения на каждом шаге построения при всех случаях.

В-третьих, пара сильно вычислимых нумераций σ, τ будет строиться из начальных отрезков функций семейств A и B соответственно следующим образом. При введении функции αm она связывается с некоторой функцией βk, в дальнейшем эта связь не прерывается. Конечные начальные отрезки $\sigma(m, i)$ являются начальными отрезками функции αm длины i, а отрезки $\tau(m, i)$ являются начальными отрезками функции βk длины i.

Перейдем к описанию конструкции. Будем обозначать через $[\kappa_n^p]$ максимальный начальный отрезок функции, содержащийся в κ_n^p.

Шаг t. Пусть $t = c(n, p)$.

Случай 1. $p = 0$ или $[\kappa_n^p] = [\kappa_n^{p-1}]$.

Оставим все функции в нумерации γ неизменными.

Возьмем наименьшее число m такое, что αm еще не определена, и для $i = 0, ..., m-1$ сделаем следующее.

Доопределим функции αi на одно значение, равное предыдущему. Определим $\sigma(i, t) = \alpha_i^t, \tau(i, t) = \beta_{n(i)}^t$, где $n(i)$ — номер в нумерации β, связанный с первым номером i в нумерации τ, $i = 0, ..., m-1$. Переходим к следующему шагу.

Случай 2. Не имеет места случай 1 и с номером n никогда ранее не было связано гипотезы вида $\kappa n = \beta k$. Проверяем $\kappa_n^p \subseteq \beta 0$, ..., $\kappa_n^p \subseteq \beta t$.

Вариант а) $\kappa_n^p \subseteq \beta k, k \leqslant t$, где k — наименьшее такое число. Вводим гипотезу $\kappa n = \beta k$.

До этого шага γn была не определена. Пусть размер $[\kappa_n^p]$ равен s. Определяем $\gamma_n(0) = ... = \gamma_n(s-1) = n$.

Возьмем наименьшее число m такое, что αm еще не определена, и положим $\alpha_m(0) = ... = \alpha_m(t) = n$. Свяжем номер m в нумерации α с номером n в нумерации γ. Свяжем первый номер m в нумерации τ с номером k в нумерации β. Зададим $\delta_m^t = \alpha_m^t$. Определим $\sigma(m, t) = \alpha_m^t, \tau(m, t) = \beta_k^t$.

Доопределим имеющиеся функции αi на одно значение, равное предыдущему, оставим все другие функции нумерации γ неизменными, определим $\sigma(i, t), \tau(i, t), i = 1, ..., m-1$, как в случае 1, и переходим к следующему шагу.

Вариант б) κ_n^p не содержится ни в одном $\beta 0$, ..., βt.

Поступаем как в случае 1 и переходим к следующему шагу.

Случай 3. Не выполняются предыдущие случаи и после шага $c(n, p-1)$ нет гипотезы с участием κn. Проверяем $\kappa_n^p \subseteq \beta 0$, ..., $\kappa_n^p \subseteq \beta t$.

Вариант а) $\kappa_n^p \subseteq \beta k, k \leqslant t$, где k - наименьшее такое число. Вводим гипотезу $\kappa n = \beta k$.

Пусть размер $[\kappa_n^p]$ равен s, а размер γ_n^p равен $r, 0 \leq r \leq s$. Определяем $\gamma_n(r) = ... = \gamma_n(s-1) = \gamma_n(r-1)$.

Возьмем наименьшее m такое, что αm не определена. Положим $\alpha_m^t = \gamma_n^t$. Свяжем номер m в нумерации α с номером n в нумерации γ. Определим $\delta_m^t = \alpha_m^t$. Определим $\sigma(m,t) = \alpha_m^t, \tau(m,t) = \beta_k^t$.

Оставим все другие функции в нумерации γ неизменными. Доопределим имеющиеся функции αi на одно значение, равное предыдущему, определим $\sigma(i,t), \tau(i,t), i = 1, ..., m-1$, как в случае 1, и переходим к следующему шагу.

Вариант б) κ_n^p не содержится ни в одном $\beta 0$, ..., βt.

Поступаем как в случае 1 и переходим к следующему шагу.

Случай 4. Не выполняются случаи 1 и 2. Кроме того, после шага $c(n, p-1)$ имеет место гипотеза $\kappa n = \beta k$ и $\kappa_n^p \subseteq \beta k$. Другими словами, хотя отрезок $[\kappa_n^p]$ увеличился по сравнению с предыдущим шагом, но имевшаяся гипотеза не опровергается новыми данными.

Пусть размер $[\kappa_n^p]$ равен s, а размер γ_n^p равен $r, 0 \leq r \leq s$. Определяем $\gamma_n(r) = ... = \gamma_n(s-1) = \gamma_n(r-1)$.

Доопределяем все до того определенные αi на одно значение, равное предыдущему, определяем $\sigma(i,t), \tau(i,t)$ как в случае 1, и переходим к следующему шагу.

Случай 5. Не выполняются предыдущие случаи, то есть начальный отрезок $[\kappa_n^p]$ возрос и имевшаяся после шага $c(n, p-1)$ гипотеза $\kappa n = \beta k$ опровергается на шаге $t : \kappa_n^p \not\subseteq \beta k$.

Уничтожаем гипотезу $\kappa n = \beta k$. Уничтожаем единственную имеющуюся на данный момент связь номера n в нумерации γ с некоторым номером m в нумерации α.

Пусть размер $[\kappa_n^p]$ равен s, а размер γ_n^p равен $r, 0 \leq r \leq s$. Определяем $\gamma_n(r) = ... = \gamma_n(s-1) = \gamma_n(r-1) + 1$. Доопределяем αm предыдущими значениями до размера t. Таким образом, γn становится отличной от αm.

Определяем $\delta_m^t = \alpha_m^{s+1}$. Заметим, что δ_m^t теперь не содержится в γn.

Поступаем далее, как в случае 1 и переходим к следующему шагу.

Описание конструкции закончено. Докажем объявленные ранее свойства построенных объектов.

Лемма 1. *Нумерация α есть вычислимая нумерация бесконечного семейства неубывающих конечнозначных о.р.ф. A.*

Доказательство. Вычислимость α следует из эффективности построения. Далее, так как случаев 2 и 3 с вариантами а) встречается бесконечно много, то все αm определяются на некотором шаге и далее автоматически доопределяются на шагах всех типов, то есть все αm - о.р.ф. Функция αm, определенная на шаге $c(n,p)$, начинается со значения n. Ввиду бесконечности таких шагов различных функций в A тоже бесконечно много. Наконец, все αm определяются на некотором шаге как неубывающий конечнозначный начальный отрезок γn, и далее значения αm стабилизируются на шагах всех типов. Поскольку семейство A определяется как семейство всех функций αm, то все функции из A будут неубывающими конечнозначными о.р.ф. □

Лемма 2. *Семейство $A = \alpha N$ дискретно.*

Доказательство. Функции αm_1 и αm_2 определялись либо в случае 2a, либо в случае 3a обязательно через связь с некоторыми n_1 и n_2 соответственно. Если $n_1 \neq n_2$, то уже $\alpha m_1(0) = n_1 \neq \alpha m_2(0) = n_2$.

Если же $n_1 = n_2 = n$, то это означает, что m_1 была раньше связана с n, затем эта связь была уничтожена на шаге t по случаю 5, а на более позднем шаге q по случаю 3a возникла связь n с m_2. Но в случае 5 отрезок δm_1 содержится в αm_1 и не содержится в γn, а γ_n^t содержится в αm_2. Таким образом, при произвольном m_1 отрезок δm_1 отделяет αm_1 от всех других αm_2.

Отметим, что отрезки δm всегда конечны, поскольку они могут вырасти лишь однажды в случае 5, когда уничтожается связь m с n. А если m потеряло связь, то повторно уже не обретет. Как в случае 2a, так и в случае 3a новые связи заключаются только с еще не определенными αm. □

Лемма 3. *Если $\kappa n \in B$, то $\gamma n \in A$.*

Доказательство. Пусть $\kappa n = \beta k$ и число p столь велико, что $\kappa_n^p \not\subset \beta 0, ..., \kappa_n^p \not\subset \beta(k-1)$. Тогда на шаге $c(n, p+1)$ будет связь n с некоторым m, которая никогда не будет уничтожена, так как гипотеза $\kappa n = \beta k$ никогда уже не будет отклонена. Поэтому на всех оставшихся шагах $c(n, p+2), c(n, p+3), ...,$ будут выполняться случаи 1 или 4, а так как κn — о.р.ф., то случаев 4 будет бесконечно много. Поэтому $\gamma n = \alpha m$. □

Лемма 4. *Если $\kappa n \notin B$, то $\gamma n \notin A$.*

Доказательство. Если для κn в процессе построения случаи 4 встретятся лишь конечное число раз, то γn — конечная функция, так как γn доопределяется лишь в случае 4. Так будет для κn, не являющихся о.р.ф. или не являющихся внешними предельными точками для семейства B.

Если κn — о.р.ф. и случай 4 встречается для нее бесконечно часто, то γn будет о.р.ф. Но так как $\kappa n \notin B$, то все возникающие гипотезы $\kappa n = \beta k_1$, $\kappa n = \beta k_2$, ... будут уничтожаться через конечное число шагов каждая по случаю 5. При этом обязательно уничтожаются связи с m_1, m_2, ... и функции αm_1, αm_2, ... будут отличными от γn.

Таким образом, если m не было связано с n, то $\alpha_m(0) \neq \gamma_n(0)$. Если же m было связано с n, то эта связь будет уничтожена и αm отлична от γn. $\square$

Лемма 5. *Для всех $i, j, m, z \in N$ выполнено условие*

$$\sigma(z,j) \subseteq \sigma(m,i) \Rightarrow \tau(z,j) \subseteq \tau(m,i).$$

Доказательство. Если $z = m$, то условие выполняется по построению. Если же $\sigma(z,j) \subseteq \sigma(m,i)$ и $z \neq m$, то $z < m, j \leq i$. Такая ситуация возможна, только если номера z, m в нумерации α были связаны с одним и тем же номером n в нумерации γ на разных шагах u, v соответственно, где $u < v$. При этом на шагах u, v имели место разные гипотезы $\kappa n = \beta x$ и $\kappa n = \beta y$ при $x \neq y$. Следовательно, на некотором промежуточном шаге $t, u < t < v$, произошел случай 5, где связь z с n была разорвана.

Воспользуемся обозначениями случая 5 конструкции. Дополнительно через $[f]_r$ будем обозначать начальный отрезок функции f длины r.

К шагу t имела место гипотеза вида $\kappa n = \beta k$, поскольку ранее было выполнено условие $\kappa_n^{p-1} \subseteq \beta k$ при установлении этой гипотезы. К шагу t длина построенного начального отрезка γn составляла r. Следовательно, справедливо $[\kappa n]_r \subseteq \beta k$ (см. случаи 2(a), 3(a) и 4). Поэтому отрезки $\tau(z,l)$ с длиной, не превосходящей r, содержатся в $[\kappa n]_r$ и тем самым в $\tau(m,i)$.

Но в случае 5 шага t произошло доопределение функции γn в точке $r+1$, отличающее γn от функции αz. Поэтому длина отрезка $\sigma(z,j)$, а с ней и длина отрезка $\tau(z,j)$ не могут быть больше r, поскольку $[\gamma n]_{r+1} \subseteq \sigma(m,i)$ по случаю 3(a) , который должен был произойти после случая 5 шага t для установления связи n с m. $\square$

Лемма 6. *Если $\kappa q \in A$, то $F(\kappa q) \in B$.*

Доказательство. Пусть $\kappa q = \alpha m$. Тогда $\alpha m = \cup\sigma(m,i)$ и $F(\kappa q) = \cup\tau(m,i) = \beta k$, где номер k нумерации β был изначально связан с первым номером m нумерации τ и эта связь никогда не разрывалась. Размер же $\tau(m,i)$ возрастал с ростом i на каждом шаге. С другой стороны, если какой-то другой начальный отрезок $\sigma(z,j)$ содержится в αm, то при достаточно большом i будет иметь место $\sigma(z,j) \subseteq \sigma(m,i)$. По лемме 5 получим $\tau(z,j) \subseteq \tau(m,i)$ и $\tau(z,j) \subseteq \beta k$. $\square$

Лемма 7. *Если $\kappa q \notin A$, то $F(\kappa q) \notin B$.*

Доказательство. Если κq не является о.р.ф., то и $F(\kappa q)$ не о.р.ф.

Если κq о.р.ф., но не предельная для семейства A, то для некоторого достаточно большого t начальный отрезок κ_q^t не содержится ни в одной αm и, следовательно, κq не содержит достаточно больших $\sigma(m, i)$. Поэтому $F(\kappa q)$ конечна.

Пусть κq является внешней предельной о.р.ф. для семейства A и содержит бесконечно много начальных отрезков вида $\sigma(m_j, i)$ при разных m_j. Но тогда по случаю 5 начальные отрезки $\tau(m_j, i)$ при разных m_j связаны с разными βk_j. Поэтому κq не равна ни одной из βk_j. □

Лемма 7 и вместе с ней теорема доказаны. □

Введенные вычислимые семейства неубывающих конечнозначных о.р.ф. будут в дальнейшем использованы для получения новых классификационных результатов для индексных множеств семейств о.р.ф.

Список литературы

1. Ершов Ю. Л. Теория нумераций / Ю. Л. Ершов. – М.: Наука, 1977.
2. Корольков Ю.Д. Оценка сложности индексных множеств семейств общерекурсивных функций в арифметической иерархии / Ю. Д. Корольков // Алгебра и логика. – 2002. – Т. 41, № 2. – С. 155–165.
3. Селиванов В. Л. Тонкие иерархии арифметических множеств и определимые индексные множества / В. Л. Селиванов // Математическая логика и алгоритмические вопросы. – 1989. – Т. 12. – С. 165–185.
4. Ershov Yu. L. Theory of numberings / Yu. L. Ershov // Preprint 18. – Novosibirsk, 1996.

Yu. D. Korolkov
Computable families of finite-valued computable functions.

Abstract. We prove that the index sets of all computable families of computable functions are presentable by the index sets of computable families of finite-valued computable functions.

Keywords: index set; computable function

Корольков Юрий Дмитриевич, доктор физ.-мат. наук, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)242228 (`korol@math.isu.ru`)

Yuri Korolkov, Irkutsk State University, 1 K. Marks St., Irkutsk 664003. Phone: (3952)242228 (`korol@math.isu.ru`)