Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 4. С. 44—47

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 519.71

Формула замкнутого вида оценки Шонхема для случая L(p+k,k,k-1) *

К. Д. Кириченко
Восточно-Сибирская государственная академия образования

Аннотация. В статье приводится формула замкнутого вида для частного случая оценки Шонхема $L(p+k,k,k-1)$, где p простое число.

Ключевые слова: булевы функции; полиномиальные нормальные формы; задача Турана; оценка Шонхема.

Одной из задач экстремального комбинаторного анализа является задача Турана [5], имеющая эквивалентное описание в виде задачи о покрытии t-подмножеств k-подмножествами[3]. Эта задача формулируется следующим образом. Пусть задано некоторое v-элементное множество A. Найти набор подмножеств $A_1,\ldots,A_s$, каждое из которых имеет мощность k, такой что для всякого $B\subset A$ мощности t найдется i, такое что $B\subset A_i$. За $C(v,k,t)$ обозначим минимально возможное количество таких подмножеств. При этом $t<k\leqslant v$.

Данная задача возникает в ряде приложений, в том числе при изучении сложности представления булевых функций полиномами [1].

Определение 1. *Полиномиальной нормальной формой (ПНФ) булевой функции $f(x_1,\ldots x_n)$ называется ее представление в виде формулы вида*

$$f(z_1,\ldots,z_n)=\sum_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{n}t_j^i$$

где t_j^i либо x_j, либо $\bar{x}_j$, либо 1. Количество слагаемых s называется сложностью ПНФ.

Определение 2. *Сложностью булевой функции L(f) в классе ПНФ будем называть минимум из сложностей ПНФ, представляющих данную функцию.*

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 09–01–00476.

Определение 3. *Функцией Шеннона сложности булевых функций в классе ПНФ $L_{пнф}(n)$ называется функция сопостовляющая каждому натуральному числу n сложность самой сложной функции от n переменных.*

В работе [1] было доказано, что

$$L_{\text{пнф}}(n) \leqslant 2^n \frac{2(log_2 n + 1)}{n}.$$

Данная верхняя оценка ассимптотически меньше средней сложности булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм, из чего, в частности, следует, что для случайной булевой функции ее представление в виде ПНФ будет существенно короче представления в виде ДНФ.

Следует отметить, что доказанная верхняя оценка для $L_{\text{пнф}}(n)$ ассимптотически больше соответсвующей нижней оценки. Таким образом, возможно, верхняя оценка может быть уточнена. Одним из способов улучшения верхней оценки может быть доказанное в работе [3] сведение задачи о нахождении ПНФ для произвольной булевой функции к задаче о покрытии t-подмножеств $t+1$ подмножествами.

В частности, доказано, что

$$L_{\text{пнф}}(v) \leqslant \sum_{i=1}^{v} C(v, i, i-1).$$

Таким образом, изучение комбинаторных чисел $C(v, k, k-1)$ имеет большое значение, в том числе, для изучения сложности представлений булевых функций.

Обзор результатов, по задаче Турана и задаче о покрытии t-подмножеств k-подмножествами можно найти в справочнике по комбинаторному дизайну [2].

Естественной оценкой снизу числа $C(v, k, t)$ является оценка Шонхема [3] $L(v, k, t)$, определяемая следующими рекуррентными соотношениями $L(v, k, 0) = 1$, $L(v+1, k+1, t+1) = \left\lceil \frac{(v+1)L(v,k,t)}{k+1} \right\rceil$. В интерактивном справочнике числовых последовательностей Н. Слоана[4] данная последовательность имеет идентификатор $A036838$

В следующей теореме доказывается представление оценки Шонхема в виде формулы замкнутого вида для случая $L(p+k, k, k-1)$, при условии, что p является простым числом.

Теорема 1. *Пусть p — простое число, тогда*

$$L(p+k, k, k-1) = \frac{\binom{p+k}{p} - \left\lfloor \frac{p+k}{p} \right\rfloor}{p}.$$

Доказательство. В первую очередь докажем, что для любого $k \geqslant 0$ и простого p имеет место сравнение

$$\binom{p+k}{p} - \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor \equiv 1 \pmod{p}.$$

Обозначим $r = \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor$. Тогда $k = rp + w$, где $0 \leqslant w < p$. Тогда

$$\binom{p+k}{p} = \frac{(ra+p+w)\cdots(rp+p)\cdots(rp+w+1)}{p(p-1)!} =$$
$$= (r+1)\frac{(rp+p+w)\cdots(rp+p+1)(rp+p-1)\cdots(rp+w+1)}{(p-1)!}.$$

При переходе в поле Z_p числитель и знаменатель дроби совпадут, что и дает требуемое утверждение.

Теперь докажем основное утверждение теоремы индукцией по k.

При $k = 1$ имеем

$$L(p+1,1,0) = \frac{\binom{p+1}{p} - \left\lfloor \frac{1}{p} \right\rfloor - 1}{p} = \frac{p+1-p}{p} = 1$$

Проверим шаг индукции. Пусть для $k = n$ утверждение имеет место. Тогда

$$L(p+n+1, n+1, n) = \left\lceil \frac{(p+n+1)L(p+n,n,n-1)}{n+1} \right\rceil =$$
$$= \left\lceil \frac{\frac{p+n+1}{n+1}\left(\binom{p+n}{p} - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - 1\right)}{p} \right\rceil = \left\lceil \frac{\binom{p+n+1}{p} - \frac{p+n+1}{n+1}\left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1\right)}{p} \right\rceil.$$

Рассмотрим слагаемое $\frac{p+n+1}{n+1}(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor+1)$ Представим n в виде $n = rp+w$, где $0 \leqslant w < p$. Тогда

$$\frac{p+n+1}{n+1}(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1) = r + 1 + \frac{pr+p}{pr+w+1}.$$

При $w = p-1$ получаем

$$r+1+\frac{pr+p}{pr+w+1} = r+2 = \frac{(pr+p)}{p} + 1 = \frac{n+1}{p} + 1 = \left\lfloor \frac{n+1}{p} \right\rfloor + 1.$$

Рассмотрим $w < p-1$. Введем обозначение $\epsilon = \frac{pr+p}{pr+w+1}$, очевидно $0 < \epsilon < 1$. Тогда получим

$$r+1+\frac{pr+p}{pr+w+1} = r+1+\epsilon = \frac{rp}{p} + 1 + \epsilon = \left\lfloor \frac{n+1}{p} \right\rfloor + 1 + \epsilon.$$

Таким образом, в исходной формуле получаем

$$L(p+n+1, n+1, n) = \left\lceil \frac{\binom{p+n+1}{p} - \left\lfloor \frac{n+1}{p} \right\rfloor - 1 - \epsilon}{p} \right\rceil.$$

Из доказанного ранее утверждения $\frac{\binom{p+n+1}{p} - \left\lfloor \frac{n+1}{p} \right\rfloor - 1}{p}$ является целым числом, при этом $0 \leqslant \epsilon < 1$, следовательно, при округлении вверх ϵ отбрасывается, что дает требуемую формулу. □

Список литературы

1. Кириченко К. Д. Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций / К. Д. Кириченко // Дискретная математика. – 2005. – Т. 17, № 3. – С. 81–88.
2. Gordon D. M. Coverings / D. M. Gordon, R. S. Douglas // Handbook of Combinatorial Designs. – Taylor and Francis Group, 2007. – P. 365–373.
3. Schoenheim J. On Covering / J. Schoenheim // Pacific Journal of Mathematics. – 1964. – Vol. 14. – P. 1405–1411.
4. Sloane N. On-Line Encyclopedia of Integer Sequences /N. Sloane. URL: http://www.research.att.com/ njas/sequences.
5. Turan P. Reseach Problems / P. Turan // Magyar Tud. Acad. Mat. Kutato Int. Kozl. – 1961. – Vol. 6. – P. 417–423.

K.D. Kirichenko

The closed form expression for Schoenheim bound in case $L(p+k, k, k-1)$

Abstract. In this paper we derive the closed form expression for Schoenheim bound in case $L(p+k, k, k-1)$, where p is prime.

Keywords: boolean function, ESOP, Turan problem, covering design, Schoenheim bound

Кириченко Константин Дмитриевич, кандидат физико-математических наук, Восточно-Сибирская государственная академия образования, 664011, Иркутск, ул. Нижняя набережная 6,тел.: (3952)241097 (constkir@gmail.com)

Konstantin Kirichenko, East Siberian State Academy of Education, 6, Nignyya Naberegnaya, Irkutsk, 664011 Phone: (3952)241097 (constkir@gmail.com)