Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 4. С. 114—120

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 510.67

О предельных моделях над типом в классе ω-стабильных теорий *

С. В. Судоплатов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный технический университет

Аннотация. Доказывается существование всех возможных значений числа предельных моделей над типом в классе ω-стабильных теорий.

Ключевые слова: предельная модель, ω-стабильная теория.

В работе [3] (см. также, [4, Глава 5]) показано, что любая счётная модель малой теории проста над некоторым кортежем или *предельна*, т. е. не проста ни над каким кортежем и представляется в виде объединения элементарной цепи простых над кортежами моделей. Там же описаны распределения предельных моделей малых теорий относительно предпорядков Рудин — Кейслера на множествах типов изоморфизма простых моделей над конечными множествами. Основные построения реализаций этих распределений проведены в классе теорий, у которых некоторые типы имеют бесконечный собственный вес и, в частности, такие теории не ω-стабильны.

Известно [7, 9], что для ω-стабильных теорий число попарно неизоморфных счётных моделей исчерпывается следующими значениями: 1, ω, 2^ω. При этом бесконечное число счётных моделей обеспечивается счётными предпорядками Рудин — Кейслера. Вместе с тем неизвестно, существует ли ω-стабильная теория, обладающая свойством *l-эренфойхтовости*, т. е. имеющая конечное, но большее единицы число предельных моделей.

В связи с указанной проблемой в настоящей работе строятся примеры ω-стабильных теорий, обладающих любым наперёд заданным числом $\lambda \in \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$ предельных моделей над некоторым типом (предельная модель $\mathcal{M}$ теории T называется *предельной над типом* $p \in S(T)$,

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 09-01-00336-а, а также Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ, проект НШ-3669.2010.1.

если $\mathcal{M}$ представляется в виде объединения элементарной цепи простых моделей $\mathcal{M}_{\bar{a}_n}$ над кортежами $\bar{a}_n$, $n \in \omega$, каждый из которых реализует тип p). Тем самым, доказывается следующая теорема (где через $\mathrm{IL}(T, p)$ обозначается число попарно неизоморфных моделей теории T, каждая из которых предельна над типом p).

Теорема 1. *Для любого кардинала* $\lambda \in \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$ *существует* ω-*стабильная теория* T *с некоторым типом* $p(x) \in S^1(T)$, *собственный вес которого равен* 1 *и* $\mathrm{IL}(T, p) = \lambda$.

Мы будем пользоваться без пояснений терминологией из книг [4, 5, 6]. За основу конструкции мы возьмём свободную ориентированную псевдоплоскость с 1-несущественной упорядоченной раскраской, построенную независимо А. Пилаем [8] и автором [2] для реализации свойства несимметричности отношения полуизолированности в классе ω-стабильных теорий. Также будет использоваться ω-стабильная модификация этой конструкции, представленная в [4, Пример 1.2.3] для получения 2^ω попарно неизоморфных предельных моделей над типом $p_\infty(x)$ элементов бесконечного цвета. Наконец, мы воспользуемся описанным в [3, 4] сведением получения заданного числа предельных моделей к построению факторизаций множества числовых последовательностей по системам словарных тождеств.

Напомним несколько понятий из теории стабильности, относящихся к классу простых теорий [1, 10, 11]. Говорят, что формула $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ в теории T *копируется над множеством* A, если существуют натуральное число m и кортежи $\bar{a}^n$, $n \in \omega$, для которых выполняются условия:

1) $\mathrm{tp}(\bar{a}/A) = \mathrm{tp}(\bar{a}^n/A)$, $n \in \omega$;

2) множество формул $\{\varphi(\bar{x}, \bar{a}^n) \mid n \in \omega\}$ m-*несовместно*, т. е. для любого множества $w \subset \omega$ мощности m формула $\bigwedge\limits_{n \in w} \varphi(\bar{x}, \bar{a}^n)$ не совместна в T.

Кортежи $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *зависимыми над* A, если найдётся формула $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ в теории T, которая копируется над A и удовлетворяет условию $\models \varphi(\bar{b}, \bar{a})$. Если кортежи $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не являются зависимыми над A, то они называются *независимыми над* A. Кортежи, зависимые (независимые) над $\varnothing$, называются просто *зависимыми* (*независимыми*). Последовательность кортежей называется *независимой*, если каждый кортеж этой последовательности независим с любым кортежем, составленным из координат остальных элементов последовательности.

Говорят, что тип $p(\bar{x}) \in S(\varnothing)$ *имеет собственный вес* не меньше λ (λ — некоторый кардинал) и пишут $w(p) \geqslant \lambda$, если существует реализация $\bar{a}$ типа $p(\bar{x})$ и независимая последовательность $(\bar{a}_i)_{i<\lambda}$ реализаций типа $p(\bar{x})$ такая, что кортежи $\bar{a}$ и $\bar{a}_i$ зависимы для любого $i < \lambda$. Полагаем $w(p) \rightleftharpoons \lambda$, если $w(p) \geqslant \lambda$ и не имеет места $w(p) \geqslant \mu$ для всех $\mu > \lambda$.

Напомним [4], что *свободной ориентированной псевдоплоскостью* называется счётная модель $\mathcal{M}_0$ связного бесконтурного ациклического графа $\langle M_0; Q\rangle$, в котором каждый элемент имеет бесконечное число образов и бесконечное число прообразов.

Обогатим структуру $\mathcal{M}_0$ 1-несущественной Q-упорядоченной раскраской $\mathrm{Col} : M_0 \to \omega \cup \{\infty\}$ так, чтобы каждый элемент цвета n имел:

1) для любого $\mu \geqslant n$ (включая ∞) бесконечное число образов цвета μ как по отношению Q;

2) для любого $m \leqslant n$ бесконечное число прообразов цвета m как по отношению Q.

Положим $\mathrm{Col}_n \rightleftharpoons \{a \mid \mathrm{Col}(a) = n\}$, $n \in \omega$.

Теория $T_0 \rightleftharpoons \mathrm{Th}(\langle M_0; Q, \mathrm{Col}_n\rangle)_{n\in\omega}$ ω-стабильна в силу её Δ-базируемости (вытекающей в свою очередь из ацикличности структуры), где Δ — наименьшее замкнутое относительно подстановок переменных множество формул, имеющих не более двух свободных переменных, содержащее формулу $(x \approx y)$ и удовлетворяющее следующему условию: если $\varphi(x, y) \in \Delta$, то $\exists z\, (\varphi(x, z) \wedge Q^{\delta_1}(z, y) \wedge \mathrm{Col}_n^{\delta_2}(z)) \in \Delta$, где $\delta_1, \in \{-1, 1\}$, $\delta_2 \in \{0, 1\}$, $Q^1(x, y) = Q(x, y)$, $Q^{-1}(x, y) = Q(y, x)$, $\mathrm{Col}_n^1(z) = \mathrm{Col}_n(z)$, $\mathrm{Col}_n^0(z) = \neg\mathrm{Col}_n(z)$. При этом счётность числа 1-типов над любым счётным множеством A обеспечивается счётным числом вариантов распределения расстояний от элементов из A до реализаций типов.

Отметим, что $I(T_0, \omega) = 2^\omega$. Действительно, для любого элемента a бесконечного цвета количество элементов b, для которых $\models Q(b, a)$ и $\mathrm{Col}(b) = \infty$, может варьироваться от 0 до ω произвольным образом. Тем самым, имеется континуальное число попарно неизоморфных счётных моделей, содержащих последовательность $(a_n)_{n\in\omega}$ элементов бесконечного цвета, связанных условиями $\models Q(a_{n+1}, a_n)$, $n \in \omega$, и имеющих разное число реализаций типов $q(x, a_n) \rightleftharpoons p_\infty(x) \cup \{Q(x, a_n)\}$, $n \in \omega$. При этом $\mathrm{IL}(T_0, p_\infty) = 1$, так как имеется лишь одна возможность для элементарного расширения модели $\mathcal{M}_{a_n}$ до модели $\mathcal{M}_{a_{n+1}}$ (любые пары вида $(\mathcal{M}_{a_{n+1}}, \mathcal{M}_{a_n})$, где $\models p_\infty(a_{n+1}) \cup \{Q(a_{n+1}, a_n)\}$, изоморфны) и любая предельная модель над типом p_∞ представляется в виде объединения элементарной цепи некоторых моделей $\mathcal{M}_{a_n}$, где $\models Q(a_{n+1}, a_n)$, $n \in \omega$.

Заменим теперь предикат Q на новые двухместные предикаты Q_m, $m \in \omega$, образующие разбиение предиката Q со следующими условиями:

1) для любого элемента $a \in M_0$ существует бесконечное число образов каждого цвета $\mu \geqslant \mathrm{Col}(a)$ по каждому из отношений Q_m;

2) для любого элемента $a \in M_0$ существует бесконечное число прообразов каждого цвета $\mu \leqslant \mathrm{Col}(a)$ по каждому из отношений Q_m.

Обозначим полученную структуру через $\mathcal{M}_{2^\omega}$. Теория $T_{2^\omega} \rightleftharpoons \mathrm{Th}(\mathcal{M}_{2^\omega})$ снова ω-стабильна в силу ацикличности структуры с раскрашенными вершинами и дугами. Однако на этот раз число предельных моделей над типом p_∞ континуально ($\mathrm{IL}(T_{2^\omega}, p_\infty) = 2^\omega$), так как предельные модели $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}_{a_n}$ над p_∞ (где $\models p_\infty(a_{n+1}) \cup \{Q(a_{n+1}, a_n)\}$, $n \in \omega$) задаются последовательностями $(m_n)_{n\in\omega}$ цветов дуг $(a_{n+1}, a_n) \in Q_{m_n}$, $n \in \omega$, а число таких последовательностей континуально. Из зависимости любых двух реализаций типа p_∞, лежащих в одной компоненте связности, а также из независимости любых двух реализаций типа p_∞, лежащих в разных компонентах связности, следует, что не существует двух независимых реализаций этого типа, зависящих от какой-то другой реализации типа p_∞. Таким образом, собственный вес типа p_∞ равен 1.

Поскольку ω-стабильные теории T с $\mathrm{IL}(T, p) = 0$ и $w(p) = 1$, очевидно, существуют (например, годится теория пустой сигнатуры с единственным 1-типом p), для завершения доказательства теоремы осталось рассмотреть случаи $\mathrm{IL}(T, p) = \lambda$, где $\lambda \in (\omega \setminus \{0\}) \cup \{\omega\}$.

Пусть $\mathcal{M}'$ — структура сигнатуры $\langle \mathrm{Col}_n^{(1)}, R_k^{(2)} \rangle_{n,k\in\omega}$ с раскраской $\mathrm{Col} : M' \to \omega \cup \{\infty\}$, имеющей бесконечно много элементов каждого цвета, и с двухместными симметричными иррефлексивными отношениями R_k, $k \in \omega$, по каждому из которых каждый элемент имеет бесконечно много образов, каждая компонента связности которых состоит из одноцветных элементов, а объединение отношений R_k образует ациклический граф.

Отметим, что из ацикличности теории $T' \rightleftharpoons \mathrm{Th}(\mathcal{M}')$ следует её базируемость формулами, описывающими цвета элементов, а также попарную взаимосвязь элементов с помощью кратчайших маршрутов. Из этой базируемости вытекает ω-стабильность теории T' и равенство $w(p_\infty) = 1$. Кроме того, для любых реализаций a', b' типа p_∞ теории T' таких, что $\mathcal{M}_{a'} \prec \mathcal{M}_{b'}$ существует главная формула $\varphi(a', y)$ с условием $\models \varphi(a', b')$. Таким образом, некоторая простая модель над элементом a' совпадает с некоторой простой моделью над элементом b' и предельных над типом p_∞ в теории T' не существует.

Покажем, что для каждого ненулевого кардинала $\lambda \in \omega \cup \{\omega\}$ некоторое слияние T_λ теорий T_{2^ω} и T' (определение слияния теорий см. в [4, § 2.6]) образует ω-стабильную теорию с условием $\mathrm{IL}(T_\lambda, p_\infty) = \lambda$.

Для построения искомых слияний T_λ заметим, что для любых реализаций a, b типа p_∞ теории T_{2^ω} таких, что $\mathcal{M}_a \prec \mathcal{M}_b$ и не существует главной формулы $\varphi(a, y)$ с условием $\models \varphi(a, b)$, найдётся слово $w = n_1 n_2 \ldots n_m$ алфавита ω и реализации $a_0, a_1, \ldots, a_m$ типа p_∞, для которых выполняется $\mathcal{M}_{a_0} = \mathcal{M}_a$, $\mathcal{M}_{a_m} = \mathcal{M}_b$ и $\models Q_{n_i}(a_i, a_{i-1})$, $i = 1, \ldots, m$. При этом модель $\mathcal{M}_b$ называется *w-расширением* модели $\mathcal{M}_a$. По определению каждое $n_1 n_2 \ldots n_m$-расширение $\mathcal{M}_b$ модели $\mathcal{M}_a$ представляется в виде набора $(\mathcal{M}_{a_0}, \ldots, \mathcal{M}_{a_m})$, где $\mathcal{M}_{a_0} = \mathcal{M}_a$, $\mathcal{M}_{a_m} = \mathcal{M}_b$ и каждая модель $\mathcal{M}_{a_i}$ является n_i-расширением модели $\mathcal{M}_{a_{i-1}}$, $i =$

$1, \ldots, m$. Элементарная цепь $(\mathcal{M}_s)_{s\in\omega}$ называется *f-цепью* (где $f \in \omega^\omega$), если $\mathcal{M}_{s+1}$ — $f(s)$-расширение модели $\mathcal{M}_s$ для любого $s \in \omega$.

Некоторое слияние теорий T_{2^ω} и T' позволяет свести существование изоморфизма объединений f_0- и f_1-цепей к существованию слов $w_0^m, w_1^m \in \omega^{<\omega}$, $l(w_0^m) = l(w_1^m)$, $m \in \omega$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) последовательность f_i “подобна” счётной конкатенации слов $w_i^0, w_i^1, \ldots, w_i^m, \ldots$, $i = 0, 1$;

б) любое w_0^m-расширение является w_1^m-расширением и наоборот, $m \in \omega$.

С этой целью рассматривается генерическая конструкция, с помощью которой для любых двух реализаций a_0, a_1 типа p_∞, связанных $\bigcup\limits_{k\in\omega} R_k$-маршрутом, для любой модели $\mathcal{M}_{a_0} = \mathcal{M}_{a_1}$ и любой модели $\mathcal{M}_{b_1}$ и $\mathcal{M}_{b_2}$, где $\mathcal{M}_{b_0}$ — w_i^0-расширение модели $\mathcal{M}_{a_0}$, найдётся элемент b_1, связанный с b_0 некоторым $\bigcup\limits_{k\in\omega} R_k$-маршрутом и такой, что некоторая модель $\mathcal{M}_{b_1}$ является w_i^1-расширением модели $\mathcal{M}_{a_0}$. На основе стандартных рассуждений доказывается насыщенность генерической модели, а также базируемость генерической теории (формулами, описывающими цвета элементов, а также взаимосвязь элементов с помощью кратчайших маршрутов), из которой вытекает её ω-стабильность.

Таким образом, проблема построения теорий T_λ, как и проблема построения заданного числа предельных моделей над последовательностью типов $\mathbf{q}$ (см. [3] и [4]), сводится к проблеме нахождения такой факторизации множества ω^ω отождествлениями $w_0^m \approx w_1^m$ слов w_0^m и w_1^m, чтобы результат факторизации содержал ровно λ классов.

Для достижения $n \in \omega \setminus \{0\}$ предельных моделей над типом p_∞ достаточно использовать следующую систему тождеств из доказательства теоремы 5.6.5 [4]:

- $n - 1 \approx m,\ \ m \geqslant n$,
- $n_0 n_1 \ldots n_s \approx \underbrace{n_s \ldots n_s}_{s+1 \text{ раз}},\ \ \max\{n_0, n_1, \ldots, n_{s-1}\} < n_s$,

сводящую все последовательности из ω^ω к n константным последовательностям.

Рассмотрение системы тождеств из доказательства теоремы 5.6.5 [4]:

- $n_0 n_1 \ldots n_s \approx \underbrace{n_s \ldots n_s}_{s+1 \text{ раз}},\ \ \max\{n_0, n_1, \ldots, n_{s-1}\} < n_s$,
- $n_0 n_1 \ldots n_s \approx n_0(n_0+1)\ldots(n_0+s),\ \ n_0 + s \leqslant n_s$,
- $n_0 n_1 \ldots n_s \ \approx\ n_0(n_0+1)\ldots(n_0+t)\,\underbrace{(n_0+t)\ldots(n_0+t)}_{s-t \text{ раз}},\ \ n_0+t = n_s$,

$t > 0$, $s > t$,

приводит к построению теории T_ω с ω предельными моделями над p_∞, для которой все последовательности из ω^ω сводятся к ω константным или диагональной последовательностям.

Как и для теории T_{2^ω}, в теориях T_n и T_ω имеет место равенство $w(p_\infty) = 1$. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Справочная* книга по математической логике / под ред. Дж. Барвайса. – М. : Наука, 1982. – Ч. 1 : Теория моделей. – 392 с.
2. *Судоплатов С. В.* О мощных типах в малых теориях / С. В. Судоплатов // Сиб. мат. журн. – 1990. – Т. 31, № 4. – С. 118–128.
3. *Судоплатов С. В.* Гиперграфы простых моделей и распределения счётных моделей малых теорий / С. В. Судоплатов // Фундаментальная и прикладная математика. – 2009. – Т. 15, № 7. – С. 179–203.
4. *Судоплатов С. В.* Проблема Лахлана / С. В. Судоплатов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009. – 336 с.
5. *Судоплатов С. В.* Дискретная математика : учебник / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010. – 280 с.
6. *Судоплатов С. В.* Математическая логика и теория алгоритмов : учебник / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010. – 256 с.
7. *Lachlan A. H.* On the number of countable models of a countable superstable theory / A. H. Lachlan // Proc. Int. Cong. Logic, Methodology and Philosophy of Science. – Amsterdam : North-Holland, 1973. – P. 45–56.
8. *Pillay A.* A note on one-based theories / A. Pillay. – Notre Dame : University of Notre Dame, 1989. – 5 p. – (Preprint).
9. *Shelah S.* A proof of Vaught's conjecture for ω-stable theories / S. Shelah, L. Harrington, M. Makkai // Israel J. Math. – 1984. – Vol. 49, N 1–3. – P. 259–280.
10. *Shelah S.* Classification theory and the number of non-isomorphic models / S. Shelah. – Amsterdam : North-Holland, 1990. – 705 p.
11. *Wagner F. O.* Simple theories / F. O. Wagner. – Dordrecht ; Boston ; London : Kluwer Academic Publishers, 2000. – 260 p.

S. V. Sudoplatov

On limit models over types in the class of ω-stable theories

Abstract. An existence of all possible numbers of limit models over types in the class of ω-stable theories is proved.

Keywords: limit model, ω-stable theory

Судоплатов Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4, тел.: (383)3634674; профессор кафедры алгебры и математической логики, Новосибирский государственный технический университет, 630092, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, тел. (383)3461166 (sudoplat@math.nsc.ru)

Sudoplatov Sergey, Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, 4, Academician Koptyug Avenue, Novosibirsk, 630090, leading researcher, Phone (383)3634674; Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx Avenue, Novosibirsk, 630092, professor, Phone: (383)3461166
(sudoplat@math.nsc.ru)