Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 4. С. 80—87

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.716

О некоторых интервалах в решетке клонов частичных ультрафункций

В. И. Пантелеев, С. Ю. Халтанова
Восточно-Сибирская государственная академия образования

Аннотация. В решетке клонов частичных ультрафункций рассматриваются интервалы между клоном функций, сохраняющих нуль (единицу), и клоном всех частичных ультрафункций. Показано, что такие интервалы содержит 20 клонов.

Ключевые слова: клон, мультиклон, решетка, суперпозиция, замкнутое множество, мультифункция, ультрафункция

Введение

В теории функций наряду со всюду определенными рассматриваются и функции, определенные не на всех наборах, при этом особое внимание уделяется конечным множествам. Для таких функций имеются различные уточнения понятия неопределенности и соответствующие определения суперпозиции.

Операция суперпозиции естественным образом приводит к вопросу описания замкнутых множеств и построения решетки этих множеств, упорядоченных по включению.

Пусть, как обычно, $|A|$ — мощность множества A, 2^A — множество всех подмножеств A и $E_2 = \{0, 1\}$. Определим следующие множества функций:

$P_n^{*\sim} = \{f \mid f : E_2^n \to 2^{E_2}\}$, $P^{*\sim} = \bigcup\limits_n P_n^{*\sim}$,

$P_n^{\sim} = \{f \mid f \in P_n^{*\sim}$ и $|f(\tilde{\alpha})| \geq 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in E_2^n\}$, $P^{\sim} = \bigcup\limits_n P_n^{\sim}$,

$P_n^{*} = \{f \mid f \in P_n^{*\sim}$ и $|f(\tilde{\alpha})| \leq 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in E_2^n\}$, $P^{*} = \bigcup\limits_n P_n^{*}$,

$P_n = \{f \mid f \in P_n^{*\sim}$ и $|f(\tilde{\alpha})| = 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in E_2^n\}$, $P = \bigcup\limits_n P_n$

Функции из P называют булевыми, из P^* — частичными, из $P^{\sim}$ — ультрафункциями, из $P^{*\sim}$ — частичными ультрафункциями.

Очевидно, что выполняются следующие включения: $P \subseteq P^* \subseteq P^{*\sim}$ и $P \subseteq P^{\sim} \subseteq P^{*\sim}$.

Суперпозиция частичных ультрафункций

$$f(f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_n(x_1,\dots,x_m))$$

определяет функцию $g(x_1,\dots,x_m)$ из $P_2^{*\sim}$, следующим образом [2]:

$$g(\alpha_1,\dots,\alpha_m)=\begin{cases}\varnothing, \text{если существует } i\ (1\le i\le n) \text{ такое, что}\\ \quad f_i(\alpha_1,\dots,\alpha_m)=\varnothing;\\ \bigcap\limits_{\beta_i\in f_i(\alpha_1,\dots,\alpha_m)} f(\beta_1,\dots,\beta_n), \text{если это пересечение}\\ \quad \text{не равно } \varnothing;\\ \bigcup\limits_{\beta_i\in f_i(\alpha_1,\dots,\alpha_m)} f(\beta_1,\dots,\beta_n),\ \text{иначе.}\end{cases}$$

Функции $f:(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\to\{\alpha_i\}$ называются селекторными.

Клон — множество функций, замкнутое относительно суперпозиции и содержащее все селекторные функции.

Интервалом $\Im(A,B)$ называется частично упорядоченное по включению множество всех клонов, содержащих клон A и являющихся подмножествами клона B.

Интервалы представляются в виде диаграмм, где клоны изображаются точками и точка, представляющая клон A_1, расположена выше и соединена отрезком с точкой представляющей клон B_1, если множество A_1 непосредственно содержит B_1.

Если A — множество функций, то через $[A]$ обозначим пересечение клонов, содержащих A.

Пусть K — клон и K_1 — его подклон, K_1 называется максимальным подклоном в K тогда и только тогда, когда $[K_1\cup\{f\}]=K$ для любой $f\in K\setminus K_1$.

Известно, что клоны $T_{0,0}=\{f\mid f\in P \text{ и } f(0,\dots,0)=\{0\}\}$ и $T_{1,1}=\{f\mid f\in P \text{ и } f(1,\dots,1)=\{1\}\}$ являются максимальными в P [4]. В [1] описаны все клоны из P_2^*, содержащие $T_{0,0}$ ($T_{1,1}$). Доказано, что для каждого из таких клонов существуют ровно 9, содержащих их, клонов.

В данной работе исследуются клоны, содержащие $T_{0,0}$ ($T_{1,1}$) в $P_2^{*\sim}$. Показано, что в $P_2^{*\sim}$ существуют ровно 20 клонов содержащих $T_{0,0}$ и, соответственно, 20 клонов, содержащих $T_{1,1}$.

В дальнейшем для удобства изложения будем использовать следующую кодировку: $\{0\}\to 0$, $\{1\}\to 1$, $\varnothing\to *$, $\{0,1\}\to\sim$. Функции будем задавать и в виде вектора-строки и в виде вектора-столбца значений на всех наборах, при этом длина строки или столбца для функции с n аргументами равна 2^n.

1. Основной результат

Обозначим через P_* множество частичных ультрафункций, которые на всех наборах принимают значение $*$, тогда очевидной является следующая лемма.

Лемма 1. *Если A — клон в $P^{*\sim}$, то $A \cup P_*$ — клон.*

Замечание 1. С учетом леммы 1 можно рассматривать только такие клоны, которые содержат множество P_*.

Замечание 2. В дальнейшем под $P^{\sim}$, P, $T_{0,0}$ будем понимать $P^{\sim} \cup P_*$ и, соответственно, $P \cup P_*$ и $T_{0,0} \cup P_*$.

Определим следующие множества частичных ультрафункций:

$T^{*}_{0,0} = \{f \mid f \in P^{*}$ и $f(0,\dots,0) = 0\} \cup P_*$;
$T^{\sim}_{0,0} = \{f \mid f \in P^{\sim}$ и $f(0,\dots,0) = 0\} \cup P_*$;
$T^{*\sim}_{0,0} = \{f \mid f \in P^{*\sim}$ и $f(0,\dots,0) = 0\} \cup P_*$;
$T^{*}_{0,*} = \{f \mid f \in P^{*}2$ и $f(0,\dots,0) = *\}$;
$T^{*\sim}_{0,*} = \{f \mid f \in P^{*\sim}$ и $f(0,\dots,0) = *\}$;
$T^{*}_{0,0*} = \{f \mid f \in P^{*}$ и $f(0,\dots,0) \in \{0,*\}\}$;
$T^{*\sim}_{0,0*} = \{f \mid f \in P^{*\sim}$ и $f(0,\dots,0) \in \{0,*\}\}$;
$T_{0,0} \cup T^{*}_{0,*}$; $T_{0,0} \cup T^{*\sim}_{0,*}$; $T^{*}_{0,0} \cup T^{*\sim}_{0,*}$; $T^{\sim}_{0,0} \cup T^{*\sim}_{0,*}$.

Легко показать, что эти множества являются клонами.

Теорема 1. *Следующие клоны различны и вложены друг в друга так, как показано на рис. 1.*

Доказательство. Клоны $T_{0,0}$, $T^{*}_{0,0}$, $T_{0,0} \cup T^{*}_{0,*}$, $T^{*}_{0,0*}$, принадлежащие P и P^{*}, рассмотрены в [1].

Рассмотрим функции, принадлежащие $P^{\sim}$, $P^{*\sim}$.

Докажем, что выполняется равенство $[T^{*}_{0,0} \cup \{f\}] = T^{*\sim}_{0,0}$, где $f \in T^{*\sim}_{0,0} \setminus T^{*}_{0,0}$. Доказательство включения $[T^{*}_{0,0} \cup \{f\}] \subseteq T^{*\sim}_{0,0}$ очевидно. Покажем, что выполняется $T^{*\sim}_{0,0} \subseteq [T^{*}_{0,0} \cup \{f\}]$.

Пусть дана функция $g(x_1,\dots,x_m) \in T^{*\sim}_{0,0}$. Пусть $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \dots, \widetilde{\alpha}_r$ — это наборы, на которых значение функции g равно 0; $\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \dots, \widetilde{\beta}_s$ — наборы, на которых значение функции равно 1; $\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2, \dots, \widetilde{\gamma}_t$ — наборы, на которых значение функции равно $\sim$; $\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2, \dots, \widetilde{\sigma}_q$ — наборы, на которых значение функции равно $*$.

Функция $f(x_1,\dots,x_n) \in T^{*\sim}_{0,0} \setminus T^{*}_{0,0}$, поэтому $f(0,\dots,0) = 0$ и найдется такой набор $\widetilde{\delta} = (\delta_1,\dots,\delta_n)$, что $f(\delta_1,\dots,\delta_n) = \sim$. Одноместные функции $(0, \delta_i)$ принадлежат $T_{0,0}$. Суперпозиция $f\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \delta_1 & \dots & \delta_n \end{pmatrix}$ определяет функцию $h(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sim \end{pmatrix}$.

Теперь сможем получить функцию

$$h_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sim \\ \sim \\ \vdots \\ \sim \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sim \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

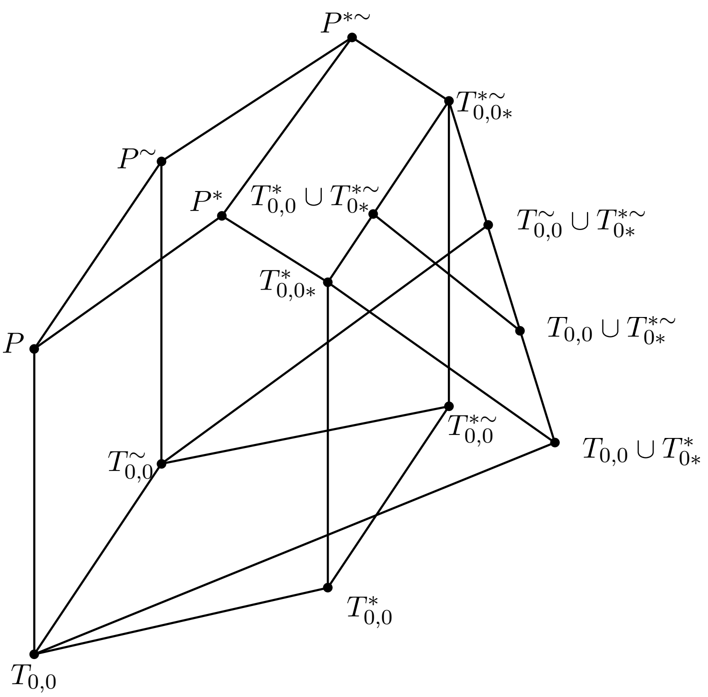

Рис. 1. *Решетка клонов, содержащих клон* $T_{0,0}$

Возьмем функцию $\varphi(x_1, \dots, x_m, y) \in T^*_{0,0}$ такую, что

$$\begin{gathered}\varphi(0, \dots, 0, 0) = 0,\ \varphi(\widetilde{\alpha}_i, 0) = 0,\ \varphi(\widetilde{\beta}_j, 0) = 1,\ \varphi(\widetilde{\gamma}_k, 0) = 0,\ \varphi(\widetilde{\sigma}_l, 0) = *, \\ \varphi(0, \dots, 0, 1) = 0;\ \varphi(\widetilde{\alpha}_i, 1) = 0,\ \varphi(\widetilde{\beta}_j, 1) = 1,\ \varphi(\widetilde{\gamma}_k, 1) = 1,\ \varphi(\widetilde{\sigma}_l, 1) = *, \\ 1 \le i \le r; \quad 1 \le j \le s; \quad 1 \le k \le t; \quad 1 \le l \le q.\end{gathered}$$

Рассмотрим суперпозицию

$$\varphi(x_1, \dots, x_m, h_1(x_1, \dots, x_m)) = h_2(x_1, \dots, x_m).$$

Покажем, что $h_2(x_1,\dots,x_m)=g(x_1,\dots,x_m)$.

Действительно,
$h_2(0,\dots,0)=\varphi(0,\dots,0,h_1(0,\dots,0))=\varphi(0,\dots,0,0)=0$,
$h_2(\widetilde{\alpha}_i)=\varphi(\widetilde{\alpha}_i,h_1(\widetilde{\alpha}_i,))=\varphi(\widetilde{\alpha}_i,\sim)=\{\varphi(\widetilde{\alpha}_i,0),\varphi(\widetilde{\alpha}_i,1)\}=0$,
$h_2(\widetilde{\beta}_i)=\varphi(\widetilde{\beta}_i,h_1(\widetilde{\beta}_i))=\varphi(\widetilde{\beta}_i,\sim)=\{\varphi(\widetilde{\beta}_i,0),\varphi(\widetilde{\beta}_i,1)\}=1$,
$h_2(\widetilde{\gamma}_i)=\varphi(\widetilde{\gamma}_i,h_1(\widetilde{\gamma}_i))=\varphi(\widetilde{\gamma}_i,\sim)=\{\varphi(\widetilde{\gamma}_i,0),\varphi(\widetilde{\gamma}_i,1)\}=\sim$.

Отсюда следует, что $g(x_1,\dots,x_m)\in[T^*_{0,0}\cup\{f\}]$, т.е. выполняется включение $T^{*\sim}_{0,0}\subseteq[T^*_{0,0}\cup\{f\}]$. Таким образом, доказали справедливость равенства $[T^*_{0,0}\cup\{f\}]=T^{*\sim}_{0,0}$.

Аналогичным образом доказываются равенства: $[T_{0,0}\cup\{f\}]=T^{\sim}_{0,0}$; $[(T^*_{0,0}\cup T^{*\sim}_{0,*})\cup\{f\}]=T^{*\sim}_{0,0*}$, где $f\in T^{*\sim}_{0,0*}\setminus(T^*_{0,0}\cup T^{*\sim}_{0,*})$; $[(T_{0,0}\cup T^{*\sim}_{0,*})\cup\{f\}]=T^{\sim}_{0,0}\cup T^{*\sim}_{0,*}$, где $f\in T^{\sim}_{0,0}\setminus T_{0,0}$.

Теперь покажем, что

$$[T^{\sim}_{0,0}\cup\{f\}]=T^{*\sim}_{0,0},\ \text{если } f\in T^{*\sim}_{0,0}\setminus T^{\sim}_{0,0}.$$

Пусть функция $g(x_1,\dots,x_m)\in T^{*\sim}_{0,0}$. Так как $g(x_1,\dots,x_m)\in T^{*\sim}_{0,0}$, то $g(0,\dots,0)=0$ и пусть на наборах $\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\dots,\widetilde{\alpha}_r$ значение функции g равно 0; на наборах $\widetilde{\beta}_1,\widetilde{\beta}_2,\dots,\widetilde{\beta}_s$, значение функции g равно 1; на наборах $\widetilde{\gamma}_1,\widetilde{\gamma}_2,\dots,\widetilde{\gamma}_t$ значение функции g равно $*$; на наборах $\widetilde{\sigma}_1,\widetilde{\sigma}_2,\dots,\widetilde{\sigma}_q$ значение функции g равно $\sim$.

Так как $f(x_1,\dots,x_n)\in T^{*\sim}_{0,0}\setminus T^{\sim}_{0,0}$, то $f(0,\dots,0)=0$ и существует набор $\widetilde{\delta}$ такой, что $f(\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_n)=*$. Суперпозиция $f\begin{pmatrix}0&\dots&0\\ \delta_1&\dots&\delta_n\end{pmatrix}$ определяет функцию $h(x)=\begin{pmatrix}0\\ *\end{pmatrix}$.

Из функции $h_1(x_1,\dots,x_m)=\begin{pmatrix}0\\ *\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ *\\ *\\ \vdots\\ *\end{pmatrix}$ получим функцию $h_2(x_1,\dots,x_m)$ такую, что $h_2(\widetilde{\gamma}_i)=*$ $(1\leqslant i\leqslant t)$, на остальных наборах функция h_2 принимает значение 0.

Возьмем функцию $\varphi(x_1,\dots,x_m,y)\in T^{\sim}_{0,0}$:

$$\begin{array}{lllll}\varphi(0,0,\dots,0)=0, & \varphi(\widetilde{\alpha}_i,0)=0, & \varphi(\widetilde{\beta}_j,0)=1, & \varphi(\widetilde{\gamma}_k,0)=0, & \varphi(\widetilde{\sigma}_l,0)=\sim,\\ \varphi(0,\dots,0,1)=0; & \varphi(\widetilde{\alpha}_i,1)=0, & \varphi(\widetilde{\beta}_j,1)=1, & \varphi(\widetilde{\gamma}_k,1)=0, & \varphi(\widetilde{\sigma}_l,1)=\sim,\\ & 1\le i\le r; & 1\le j\le s; & 1\le k\le t; & 1\le l\le q.\end{array}$$

Суперпозиция $\varphi(x_1,\dots,x_m,h_2(x_1,\dots,x_m))$ определяет функцию g.

Отсюда следует, что $g(x_1,\dots,x_m)\in[T^{\sim}_{0,0}\cup\{f\}]$, т.е. $T^{*\sim}_{0,0}\subseteq[T^{\sim}_{0,0}\cup\{f\}]$. Таким образом, доказали $[T^{\sim}_{0,0}\cup\{f\}]=T^{*\sim}_{0,0}$.

Аналогичным образом доказываются равенства $[(T^{\sim}_{0,0} \cup T^{*\sim}_{0,*}) \cup \{f\}] = T^{*\sim}_{0,0*}$, где $f \in T^{*\sim}_{0,0*} \setminus (T^{\sim}_{0,0} \cup T^{*\sim}_{0,*})$; $[(T_{0,0} \cup T^{*\sim}_{0,*}) \cup \{f\}] = T^{*}_{0,0} \cup T^{*\sim}_{0,*}$, где $f \in T^{*}_{0,0} \setminus T_{0,0}$.

Докажем, что $[T^{*\sim}_{0,0} \cup \{f\}] = T^{*\sim}_{0,0*}$, где $f(x_1, \ldots, x_n) \in T^{*\sim}_{0,0*} \setminus T^{*\sim}_{0,0}$.

Пусть $g(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in T^{*\sim}_{0,0*}$ и $g(0, \ldots, 0) = *$.

Повторяя рассуждения, аналогичные вышеприведенным, можно получить последовательно функции $(*b)$, $(*b \ldots b)$ где $b \in \{0, 1, \sim\}$, а затем построить необходимую суперпозицию для g.

Докажем, что выполняется равенство $[T^{*}_{0,*} \cup \{f\}] = T^{*\sim}_{0,*}$, где функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in T^{*\sim}_{0,*} \setminus T^{*}_{0,*}$.

Пусть $g(x_1, \ldots, x_m) \in T^{*\sim}_{0,*}$, тогда $g(0, \ldots, 0) = *$. Наборы $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_r$; $\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_s$; $\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2, \ldots, \widetilde{\gamma}_t$; $\widetilde{t}_1, \widetilde{t}_2, \ldots, \widetilde{t}_q$ это наборы, на которых значение $g(x_1, \ldots, x_m)$ равно 0, 1, $*$, $\sim$, соответственно.

Функция $f \in T^{*\sim}_{0,*} \setminus T^{*}_{0,*}$, поэтому $f(0, \ldots, 0) = *$. Существует набор $\widetilde{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ такой, что $f(\delta_1, \ldots, \delta_n) =\sim$. Суперпозиция $f\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \delta_1 & \ldots & \delta_n \end{pmatrix}$ определяет функцию $h(x) = \begin{pmatrix} * \\ \sim \end{pmatrix}$, с помощью которой можно получить функцию $h_1(x_1, \ldots, x_m) = (* \sim ... \sim)$.

Возьмем функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_m, y) \in T^{*}_{0,*}$:

$$\begin{gathered}
\varphi(0,0,\ldots,0) = *,\ \varphi(\widetilde{\alpha}_i, 0) = 0,\ \varphi(\widetilde{\beta}_j, 0) = 1,\ \varphi(\widetilde{\gamma}_k, 0) = *,\ \varphi(\widetilde{t}_l, 0) = 0,\\
\varphi(0,0,\ldots,1) = *,\ \varphi(\widetilde{\alpha}_i, 1) = 0,\ \varphi(\widetilde{\beta}_j, 1) = 1,\ \varphi(\widetilde{\gamma}_k, 1) = *,\ \varphi(\widetilde{t}_l, 1) = 1,\\
1 \le i \le r; \quad 1 \le j \le s; \quad 1 \le k \le t; \quad 1 \le l \le q.
\end{gathered}$$

Суперпозицию $\varphi(x_1, \ldots, x_m, h_1(x_1, \ldots, x_m))$ определяет функцию $g(x_1, \ldots, x_m)$.

Отсюда следует, что $g(x_1, \ldots, x_m) \in [T^{*}_{0,*} \cup \{f\}]$, т.е. $T^{*\sim}_{0*} \subseteq [T^{*}_{0,*} \cup \{f\}]$. Таким образом, доказали $[T^{*}_{0,*} \cup \{f\}] = T^{*\sim}_{0,*}$.

Аналогично доказывается справедливость равенств

$$[(T_{0,0} \cup T^{*}_{0,*}) \cup \{f\}] = T_{0,0} \cup T^{*\sim}_{0,*},\ \text{где } f \in T_{0,0} \cup T^{*\sim}_{0,*},\ \text{но } f \notin T_{0,0} \cup T^{*}_{0,*};$$

$$[T^{*}_{0,0*} \cup \{f\}] = T^{*}_{0,0} \cup T^{*\sim}_{0,*}, f \in T^{*}_{0,0} \cup T^{*\sim}_{0,*},\ \text{но } f \notin T^{*}_{0,0*}.$$

Теперь докажем, что $[T^{*\sim}_{0,0*} \cup \{f\}] = P^{*\sim}_2$, где $f \in P^{*\sim}_2 \setminus T^{*\sim}_{0,0*}$.

Так как $f(x_1, \ldots, x_n) \notin T^{*\sim}_{0,0*}$, то $f(0, \ldots, 0) = 1$ или $f(0, 0, \ldots, 0) =\sim$.

Если $f(0, \ldots, 0) = 1$, то доказательство очевидно.

Если $f(0, \ldots, 0) =\sim$, то, рассматривая соответствующую суперпозицию, получим функцию $h(x) \equiv\sim$.

Дальнейшие рассуждения очевидны.

Аналогично доказывается равенство $[T^{\sim}_{0,0} \cup \{f\}] = P^{\sim}_2$, где $f \in P^{\sim}_2$, но $f \notin T^{\sim}_{0,0}$.

$\square$

Теорема 2. *В множестве $P^{*\sim}$ существует ровно 14 клонов, содержащих P_* и $T_{0,0}$, а именно, клоны, представленные на рис. 1.*

Доказательство. Пусть A — клон в $P_2^{*\sim}$ такой, что $T_{0,0} \subseteq A$.

Пусть в A есть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ такая, что $f(0, \dots, 0) = 1$. Тогда, очевидно, функция-константа 1 принадлежит A. Известно, что $[T_{0,0} \cup \{1\}] = P_2$. Поэтому $P_2 \subseteq [T_{0,0} \cup \{1\}] \subseteq A$. Отсюда $A = P_2$ или P_2^*, или $P_2^{\sim}$, или $P_2^{*\sim}$.

То, что нет клонов между P_2 и P_2^* показано в [3]; между P_2 и $P_2^{\sim}$ — в [2]. Аналогично прведенным выше доказательствам показывается то, что нет клонов между P_2^* и $P_2^{*\sim}$, $P_2^{\sim}$ и $P_2^{*\sim}$.

Пусть теперь в A все функции принадлежат $T_{0,0*}^{*\sim}$, т.е. $A \subseteq T_{0,0*}^{*\sim}$. Если $A \setminus T_{0,0} = \varnothing$, то $A = T_{0,0}$. В противном случае выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) существует функция $f(x_1, \dots, x_n) \in A$ такая, что $f(0, \dots, 0) = 0$ и существует набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ такой, что $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = *$. В этом случае $T_{0,0}^* \subseteq A$.
2) существует функция $f(x_1, \dots, x_n) \in A$ такая, что $f(0, \dots, 0) = 0$ и существует набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ такой, что $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) =\sim$. Тогда $T_{0,0}^{\sim} \subseteq A$.
3) существует функция $f(x_1, \dots, x_n) \in A$ такая, что $f(0, \dots, 0) = 0$ и наборы $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ такие, что $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) =\sim$, $f(\beta_1, \dots, \beta_n) = *$. Тогда $T_{0,0}^{*\sim} \subseteq A$.
4) существует функция $f(x_1, \dots, x_n) \in A$ такая, что $f(0, \dots, 0) = *$ и существует набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ такой, что $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq *$ и не существует набора $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ такого, что $f(\beta_1, \dots, \beta_n) =\sim$. Получим $T_{0,0} \cup T_{0*}^* \subseteq A$.
5) существует функция $f(x_1, \dots, x_n) \in A$ такая, что $f(0, \dots, 0) = *$ и такие наборы $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, что $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = *$, $f(\beta_1, \dots, \beta_n) =\sim$. Получим $T_{0,0} \cup T_{0*}^{*\sim} \subseteq A$.

Если выполняются условия 1) и 4), то $T_{0,0}^* \subseteq A$ и $T_{0*}^* \subseteq A$. Тогда $T_{0,0*}^* \subseteq A$.

Если выполняются условия 1) и 5), то $T_{0,0}^* \subseteq A$ и $T_{0*}^{*\sim} \subseteq A$. Тогда $T_{0,0}^* \cup T_{0*}^{*\sim} \subseteq A$.

Если выполняются условия 2) и 4), то $T_{0,0}^{\sim} \subseteq A$ и $T_{0*}^{*\sim} \subseteq A$. Тогда $T_{0,0}^{\sim} \cup T_{0*}^{*\sim} \subseteq A$.

Если выполняются $T_{0,0}^{*\sim} \subseteq A$ и $T_{0*}^{*\sim} \subseteq A$, то $T_{0,0*}^{*\sim} \subseteq A$. Поскольку мы рассматривали случай $A \subseteq T_{0,0*}^{*\sim}$, получим $A = T_{0,0*}^{*\sim}$. □

Если рассматривать клоны, не обязательно содержащие множество P_*, то к описанным 14 клонам необходимо добавить еще 6 клонов, содержащих клон $T_{0,0} = \{f \mid f \in P \text{ и } f(0, \dots, 0) = \{0\}\}$.

Таким образом получаем окончательный результат.

Теорема 3. *Интервал* $\Im(T_{0,0}, P^{*\sim})$ *содержит 20 элементов:* P; $P \cup P_*$; $P^\sim$; $P^\sim \cup P_*$; P^*; $P^{*\sim}$; $T_{0,0}$; $T_{0,0} \cup P_*$; $T^*_{0,0}$; $T^*_{0,0} \cup P_*$; $T^\sim_{0,0}$; $T^\sim_{0,0} \cup P_*$; $T^{*\sim}_{0,0}$; $T^{*\sim}_{0,0} \cup P_*$; $T^*_{0,0*}$; $T^{*\sim}_{0,0*}$; $T_{0,0} \cup T^*_{0,*}$; $T_{0,0} \cup T^{*\sim}_{0,*}$; $T^*_{0,0} \cup T^{*\sim}_{0,*}$; $T^\sim_{0,0} \cup T^{*\sim}_{0,*}$.

Заменив в описании клонов из интервала $\Im(T_{0,0}, P^{*\sim})$ нуль на единицу, двойственным образом получим следующий результат для клона $T_{1,1} = \{f \mid f \in P \text{ и } f(1, \dots, 1) = \{1\}\}$.

Теорема 4. *Интервал* $\Im(T_{1,1}, P^{*\sim})$ *содержит 20 элементов:* P; $P \cup P_*$; $P^\sim$; $P^\sim \cup P_*$; P^*; $P^{*\sim}$; $T_{1,1}$; $T_{1,1} \cup P_*$; $T^*_{1,1}$; $T^*_{1,1} \cup P_*$; $T^\sim_{1,1}$; $T^\sim_{1,1} \cup P_*$; $T^{*\sim}_{1,1}$; $T^{*\sim}_{1,1} \cup P_*$; $T^*_{1,1*}$; $T^{*\sim}_{1,1*}$; $T_{1,1} \cup T^*_{1,*}$; $T_{1,1} \cup T^{*\sim}_{1,*}$; $T^*_{1,1} \cup T^{*\sim}_{1,*}$; $T^\sim_{1,1} \cup T^{*\sim}_{1,*}$.

Список литературы

1. Алексеев В. Б. О некоторых замкнутых классах в частичной двузначной логике / В. Б. Алексеев, А. А. Вороненко // Дискретная математика. – 1994. – Т. 6, вып. 4. – С. 58–79.
2. Пантелеев В. И. Критерий полноты для доопределяемых булевых функций / В. И. Пантелеев // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. – 2009. – № 2 (68). – С. 60–79.
3. Фрейвалд Р. В. О полноте частичных функций алгебры логики / Р. В. Фрейвалд // ДАН СССР. – 1966. – Т. 167, № 6. – С. 1249–1250.
4. Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic / E. L. Post // Annals of Math. Studies. – Princeton: Univ. Press, 1941. – Vol. 5. – 122 p.

V. I. Panteleyev, S. Yu. Haltanova

About some intervals in the lattic of clones of partial ultrafunctions.

Abstract. The intervals between the clone of function, saving 0 (1) and the clone of all partial ultrafunctions are considered in the lattic of clones of partial ultrafunctions. It‘s showing that such intervals contain 20 clones.

Keywords: clon; multiclon; lattic; superposition; closed set; ultrafunctions; multifunctions

Пантелеев Владимир Иннокентьевич, доктор физико-математических наук, Восточно-Сибирская государственная академия образования, 664011, Иркутск, ул. Н. Набережная, 6, тел.: (3952) 240435 (`v_panteleyev@mail.ru`)

Халтанова Соелма Юрьевна, аспирант, Восточно-Сибирская государственная академия образования, 664011, Иркутск, ул. Н. Набережная, 6, тел.: (3952) 240435 (`soelabad@mail.ru`)

Panteleyev Vladimir, East Siberian State Education Academy, 6, N. Naberezhnaya St., Irkutsk, 664011, (`v_panteleyev@mail.ru`)

Haltanova Soelma, East Siberian State Education Academy, 6, N. Naberezhnaya St., Irkutsk, 664011, (`soelabad@mail.ru`)