Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 3. С. 51—58

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 519.8

Задача о поставках *

Л. Т. Ащепков
Институт прикладной математики ДВО РАН

Е. А. Колобов
Дальневосточный государственный университет

Аннотация. Представлены результаты аналитического исследования параметрической задачи линейного программирования о поставке продукции: критерий разрешимости, точные верхние оценки целевой функции и аналитическое представление решений через исходные данные. Показано, что в общем случае оптимальные поставки продукции не единственны.

Ключевые слова: параметрическое линейное программирование, критерий разрешимости, точные оценки, аналитическое решение.

Введение

В работе рассматривается параметрическая модель формирования контракта на поставку товарной продукции ассоциацией участников-товаропроизводителей. Модель отражает заинтересованность участников в максимальных поставках при наличии интервальной неопределенности в размерах контракта и самих поставок. С формальной математической точки зрения речь идет о специальной параметрической задаче линейного программирования [2, 3] — максимизации минимальной координаты допустимых точек, лежащих в общей части многомерного параллелепипеда и пространственной полосы между двумя параллельными плоскостями. Аналогичная задача с другим целевым условием рассматривалась в работе [1].

Установлен критерий разрешимости задачи, приведены формулы для нахождения оптимального решения. Показано, что в общем случае задача имеет множество решений.

* Работа выполнена при финансовой поддержке ДВО РАН, проект № 09–01–ОМН–04.

1. Содержательная и формальная постановка задачи

Ассоциация из n участников-товаропроизводителей намерена заключить контракт на поставку не менее A и не более B единиц однородной продукции. Поставка каждого i-го участника ассоциации может составить не менее a_i и не более b_i единиц этой продукции. Требуется определить поставки так, чтобы условия контракта были выполнены и наименьшая из поставок была максимальной.

Положим $I = \{1, \ldots, n\}$. Обозначим через x_i искомую поставку участника $i \in I$. Тогда условия задачи примут вид

$$\lambda \to \max; \lambda \leq x_i, i \in I; a_i \leq x_i \leq b_i, i \in I; A \leq \sum_{i \in I} x_i \leq B. \tag{1.1}$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$ векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ неравенства (1.1) определяют соответственно конус K_λ с вершиной в точке $\lambda e, e = (1, \ldots, 1)$, брус (прямоугольный параллелепипед) P и полосу Γ, ограниченную двумя параллельными плоскостями. В этих обозначениях задачу (1.1) можно переписать в эквивалентной форме

$$\lambda \to \max, x \in K_\lambda \cap P \cap \Gamma, \tag{1.2}$$

которая удобна для геометрической интерпретации и выяснения условий совместности ограничений.

2. Критерий разрешимости задачи

При решении задачи в форме (1.1) или (1.2) будем считать выполненными следующие условия:

$$a_1 \leq \ldots \leq a_n; \tag{2.1}$$

$$0 < a_i < b_i < \infty, i \in I; \tag{2.2}$$

$$\max\{\alpha, A\} \leq \min\{\beta, B\}, \tag{2.3}$$

$$\alpha = \sum_{i \in I} a_i, \beta = \sum_{i \in I} b_i. \tag{2.4}$$

Условие (2.1) не является ограничительным и может быть обеспечено изменением нумерации участников ассоциации. Условие (2.2) отвечает смыслу задачи и исключает однозначность поставок продукции.

Лемма 1. *Условия $P \cap \Gamma \neq \varnothing$ и (2.3) равносильны.*

Доказательство. Если $P \cap \Gamma \neq \varnothing$, то существует вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий неравенствам

$$a_i \leq x_i \leq b_i, i \in I; A \leq \sum_{i \in I} x_i \leq B.$$

Отсюда в обозначениях (2.4) получим

$$\alpha \leq \sum_{i \in I} x_i \leq \beta.$$

Вместе с предыдущим неравенством это означает

$$\max\{\alpha, A\} \leq \sum_{i \in I} x_i \leq \min\{\beta, B\}.$$

Значит, условие (2.3) выполняется. Обратно, пусть неравенство (2.3) имеет место; представим его в эквивалентном виде

$$\max\{0, \mu_1\} \leq \min\{1, \mu_2\},$$
$$\mu_1 = \frac{A - \alpha}{\beta - \alpha}, \mu_2 = \frac{B - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

Отсюда вытекает существование числа μ, отвечающего одновременно двум неравенствам: $0 \leq \mu \leq 1, \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$. Тогда точка

$$y = a + \mu(b - a),$$

$$a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n)$$

лежит в брусе P и полосе Γ, т. е. $P \cap \Gamma \neq \varnothing$. □

Следствие 1. *Условие (2.3) необходимо и достаточно для разрешимости задачи о поставках.*

Действительно, если неравенство (2.3) справедливо, то по лемме 1 множество $P \cap \Gamma$ не пусто. Поскольку в пространстве $\mathbb{R}^n$ множество $P \cap \Gamma$ компактно, то по теореме Вейерштрасса непрерывная функция $x \to \min_i x_i$ достигает на нем максимума. Значит, задача о поставках разрешима. Верно и обратное: разрешимость задачи влечет непустоту множества $P \cap \Gamma$ и по лемме 1 – выполнение условия (2.3).

Решение задачи о поставках зависит от взаимного расположения луча

$$L = \{x = \lambda e : \lambda \geq 0\}$$

и бруса P. Разберем подробно далее два основных случая:

$$L \cap P \neq \varnothing \Leftrightarrow a_n \leq b_m, \tag{2.5}$$
$$L \cap P = \varnothing \Leftrightarrow a_n > b_m, \tag{2.6}$$

где по определению $b_m = \min_{i\in I} b_i$ – наименьшая из координат вектора b.

3. Решение задачи в случае (2.5)

Лемма 2. *Справедливы следующие две импликации:*

$$\max\{a_n, \frac{A}{n}\} \le \lambda \le \min\{b_m, \frac{B}{n}\} \Rightarrow K_\lambda \cap P \cap \Gamma \neq \varnothing; \tag{3.1}$$

$$\lambda > \min\{b_m, \frac{B}{n}\} \Rightarrow K_\lambda \cap P \cap \Gamma = \varnothing. \tag{3.2}$$

Доказательство. Проверим импликацию (3.1). Если посылка (3.1) верна, то одновременно $a_n \le \lambda \le b_m$ и $\frac{A}{n} \le \lambda \le \frac{B}{n}$. Отсюда следует $\lambda e \in P$ и $\lambda e \in \Gamma$. Поскольку $\lambda e \in K_\lambda$, то $K_\lambda \cap P \cap \Gamma \neq \varnothing$. Импликацию (3.2) докажем методом от противного. Предположим, посылка (3.2) истинна, но $K_\lambda \cap P \cap \Gamma \neq \varnothing$. Тогда существует вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ со свойствами

$$\lambda \le x_i, i \in I; a_i \le x_i \le b_i, i \in I; A \le \sum_{i\in I} x_i \le B. \tag{3.3}$$

Отсюда получим

$$\lambda \le x_i \le b_i, i \in I; n\lambda \le \sum_{i\in I} x_i \le B.$$

Следовательно, $\lambda \le b_m, \lambda \le \frac{B}{n}$, т. е. $\lambda \le \min\{b_m, \frac{B}{n}\}$, что противоречит посылке (3.2). Значит, $K_\lambda \cap P \cap \Gamma \neq \varnothing$. Утверждение доказано. □

Согласно лемме 2 в случае (2.5) точная верхняя оценка минимальной поставки равна

$$\lambda^* = \min\{b_m, \frac{B}{n}\}. \tag{3.4}$$

Найдем соответствующие оптимальные поставки $x_1^*, \dots, x_n^*$. Обозначим через $|I^*|$ мощность (количество элементов) множества

$$I^* = \{i \in I : b_i = b_m\}.$$

Полагая в условиях (3.3) $\lambda = \lambda^* = b_m \le \frac{B}{n}$, находим

$$x_i^* = b_m, i \in I^*; b_m \le x_i^* \le b_i, i \in I \setminus I^*;$$

$$A - b_m|I^*| \le \sum_{i\in I\setminus I^*} x_i^* \le B - b_m|I^*|. \tag{3.5}$$

При $\lambda = \lambda^* = \frac{B}{n} \leq b_m$ условиям (3.3) удовлетворяет единственное решение

$$x_i^* = \frac{B}{n}, i \in I. \tag{3.6}$$

Итак, в случае (2.5) решение задачи о поставках дается формулами (3.4)–(3.6).

4. Решение задачи в случае (2.6)

Примем предположения (2.1)–(2.3) и (2.6). Для определенности будем считать

$$\alpha < A \leq B < \beta. \tag{4.1}$$

Тогда параметры A, B в критерии (2.3) существенны. В остальных случаях решение задачи не существует, тривиально или находится по аналогии с изложенным ниже способом. Определим вектор

$$z(\lambda) = (z_1(\lambda), \ldots, z_n(\lambda)),$$

$$z_i(\lambda) = \max\{a_i, \lambda\}, a_1 \leq \lambda \leq \beta, i \in I.$$

Функции $z_i(\lambda)$ кусочно линейны, непрерывны, не убывают и имеют следующие очевидные свойства:

$$\lambda \leq z_i(\lambda), a_1 \leq \lambda \leq \beta, i \in I; \tag{4.2}$$

$$a_i \leq z_i(\lambda) = \max\{a_i, \lambda\} \leq \max\{a_i, b_m\} \leq \max\{a_i, b_i\} = b_i,$$
$$a_1 \leq \lambda \leq b_m, i \in I. \tag{4.3}$$

Функция

$$\gamma(\lambda) = \sum_{i \in I} z_i(\lambda) = \sum_{i \in I} \max\{a_i, \lambda\}, a_1 \leq \lambda \leq \beta \tag{4.4}$$

как сумма функций $z_i(\lambda)$ кусочно линейна, непрерывна, не убывает и в силу (4.1) удовлетворяет неравенствам

$$\gamma(a_1) = \alpha < A, \gamma(\beta) = n\beta > A;$$
$$\gamma(a_1) = \alpha < B, \gamma(\beta) = n\beta > B.$$

Отсюда по теореме Коши уравнение $\gamma(\lambda) = A$ на отрезке $a_1 \leq \lambda \leq \beta$ имеет минимальный корень λ_A, и уравнение $\gamma(\lambda) = B$ на том же отрезке имеет максимальный корень λ_B. Вследствие монотонности функции $\gamma(\lambda)$ заключаем

$$a_1 \leq \lambda_A \leq \lambda_B \leq \beta; \tag{4.5}$$

$$A \leq \sum_{i \in I} z_i(\lambda) \leq B, \lambda_A \leq \lambda \leq \lambda_B. \tag{4.6}$$

Соотношения (4.2)–(4.6) позволяют найти точную верхнюю оценку минимальной поставки в случае (2.6).

Лемма 3. *Справедливы следующие две импликации:*

$$\lambda_A \le \lambda \le \min\{b_m, \lambda_B\} \Rightarrow K_\lambda \cap P \cap \Gamma \ne \varnothing; \tag{4.7}$$

$$\lambda > \min\{b_m, \lambda_B\} \Rightarrow K_\lambda \cap P \cap \Gamma = \varnothing. \tag{4.8}$$

Доказательство. Пусть верна посылка (4.7), т. е. существует число λ, отвечающее неравенствам $\lambda_A \le \lambda \le b_m, \lambda_A \le \lambda \le \lambda_B$ одновременно. Отсюда в силу соотношений (4.2)–(4.6) имеем $z(\lambda) \in K_\lambda, z(\lambda) \in P$, $z(\lambda) \in \Gamma$. Значит, $K_\lambda \cap P \cap \Gamma \ne \varnothing$.

Для проверки импликации (4.8) допустим противное: посылка (4.8) справедлива, но $K_\lambda \cap P \cap \Gamma \ne \varnothing$. Тогда найдется вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ со свойствами (3.3). Если $\lambda > \min\{b_m, \lambda_B\} = b_m$, то выполняются неравенства $\lambda \le x_m, a_m \le x_m \le b_m < \lambda$, что невозможно. Если $\lambda > \min\{b_m, \lambda_B\} = \lambda_B$, то из (3.3) последовательно получим

$$\max\{a_i, \lambda\} \le x_i, i \in I,$$

$$\gamma(\lambda) = \sum_{i \in I} \max\{a_i, \lambda\} \le \sum_{i \in I} x_i \le B. \tag{4.9}$$

По предположению λ_B – наибольший корень уравнения $\gamma(\lambda) = B$. При $\lambda_B < \lambda$ в силу монотонности функции $\gamma(\lambda)$ и максимальности корня λ_B имеем $B = \gamma(\lambda_B) < \gamma(\lambda)$, что противоречит (4.9). Установленные противоречия доказывают утверждение. □

Лемма 3 означает, что в принятых предположениях точная верхняя оценка λ^* минимальной поставки равна

$$\lambda^* = \min\{b_m, \lambda_B\}. \tag{4.10}$$

Опишем соответствующие (4.10) оптимальные поставки $x_1^*, \ldots, x_n^*$. При $\lambda^* = b_m \le \lambda_B$, как и ранее в п. 3, приходим к формулам (3.5). Полагая в неравенствах (3.3) $\lambda = \lambda^* = \lambda_B \le b_m$ и используя принятые обозначения, получим

$$\lambda_B \le x_i^*, i \in I; a_i \le x_i^* \le b_i, i \in I; A \le \sum_{i \in I} x_i^* \le B.$$

Отсюда последовательно находим

$$z_i(\lambda_B) \le x_i^* \le b_i, i \in I; \sum_{i \in I} x_i^* \le B,$$

$$B = \gamma(\lambda_B) = \sum_{i \in I} z_i(\lambda_B) \le \sum_{i \in I} x_i^* \le B.$$

Значит,

$$z_i(\lambda_B) \le x_i^* \le b_i, i \in I; \sum_{i \in I} x_i^* \le B. \tag{4.11}$$

В частности, поставки

$$x_i^* = z_i(\lambda_B), i \in I \tag{4.12}$$

удовлетворяют требованиям (4.11), т. е. являются оптимальными. Подведем итоги.

Теорема 1. *Условие (2.3) необходимо и достаточно для разрешимости задачи о поставках. В случае (2.5) решения задачи даются формулами (3.4)–(3.6). В случае (2.6),(4.1) – формулами (4.10)–(4.12).*

В общем случае задача имеет множество решений.

Заключение

В работе проведено исследование разрешимости и получено аналитическое решение параметрической задачи линейного программирования об оптимальных поставках в условиях интервальной неопределенности поставок и неопределенности размера контракта. Определяющими характеристиками решения служат точные верхние оценки целевой функции в случаях (2.5) и (2.6) (леммы 2, 3). На базе лемм удается описать множества оптимальных поставок или указать единственные оптимальные поставки. В зависимости от исходных данных решения задачи могут быть единственными или неединственными.

Список литературы

1. Ащепков Л. Т. Альтернативные торги / Л. Т. Ащепков // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 11. – С. 126–135.
2. Вильямс Н.Н. Параметрическое программирование в экономике (методы оптимальных решений) / Н. Н. Вильямс. – М. : Статистика, 1976. – 96 с.
3. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения / Дж. Данциг. – М. : Прогресс, 1966. – 600 с.

L. T. Ashchepkov, E. A. Kolobov

The problem of delivery

Abstract. There are presented the results of analytical study of parametric linear programming problem about the delivery of products: resolution criterion, least upper bounds of objective function and analytic solution representation on the basis of the original data. It is shown that in general the problem has non-uniqueness solution.

Keywords: parametric linear programming, resolution criterion, least upper bounds, analytic solution

Ащепков Леонид Тимофеевич, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики Дальневосточного отделения РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7, тел.: (4232) 31-19-17 (`ltas@iam.dvo.ru`)

Колобов Егор Александрович, студент, Институт математики и компьютерных наук, Дальневосточный государственный университет, 690095, Владивосток, ул. Октябрьская , 27, тел.: (4232) 45-56-97 (gornews@mail.ru)

Ashchepkov Leonid, Institute of Applied Mathematics, FEBRAS, 7, Radio St., Vladivostok, 690041, professor, Phone: (4232) 31-19-17 (ltas@iam.dvo.ru)

Kolobov Egor, Institute of Mathematics and Computer Science, DVGU, 27, October St., 690095, Vladivostok, student, Phone: (4232) 45-56-97 (gornews@mail.ru)