



Серия «Математика»

2010. Т. 3, № 3. С. 41–50

Онлайн-доступ к журналу:

<http://isu.ru/izvestia>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

УДК 517.972, 533.6

Некоторые задачи оптимального аэродинамического проектирования тел с минимальным теплообменом*

М. А. Аргучинцева

Иркутский государственный университет

Аннотация. Известно, что форма космического аппарата сильно влияет на его аэродинамические и тепловые характеристики. В данной статье представлены постановки и численные решения вариационных задач нахождения оптимальных форм плоских и осесимметричных тел с точки зрения минимума суммарного нагрева вдоль траектории полета. Полученные формы тел позволяют снизить тепловые потоки к поверхности на 20-50 %.

Ключевые слова: оптимальное аэродинамическое проектирование; вариационные задачи; неаддитивный функционал; теплообмен; численные методы.

1. Введение

Оптимальное аэродинамическое проектирование космических аппаратов является одной из интересных и перспективных областей приложения методов оптимального управления и вариационного исчисления. Известно, что спускаемые аппараты, движущиеся в атмосферах планет с гиперзвуковыми скоростями, подвергаются интенсивному радиационному и конвективному нагреву. Одним из эффективных путей снижения тепловых потоков к телу является соответствующий выбор формы спускаемого аппарата, которая должна удовлетворять целому ряду аэродинамических и конструктивных требований.

Обзор научной литературы по этой проблеме [1, 2] показал, что несмотря на широкий круг исследований по оптимизационным проблемам сверх- и гиперзвуковой аэродинамики, многие вопросы, связанные с

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00709) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

влиянием тепловых потоков на форму тел, еще недостаточно изучены. Данная статья посвящена исследованию задач минимизации суммарных (радиационных и конвективных) тепловых потоков вдоль гиперзвуковой баллистической траектории движения для плоских и осесимметричных тел. В отличие от работ других авторов, где изучались оптимизационные задачи только для радиационного или конвективного нагрева в заданной точке траектории, в данной статье рассматривается более общий класс задач, включающий совместное исследование аэродинамики тела, его суммарного (радиационного и конвективного) нагрева и движения по траектории. С математической точки зрения, данные задачи являются неклассическими задачами вариационного исчисления с неаддитивными целевыми функционалами и учетом различных граничных, поточечных и интегральных ограничений.

2. Постановка задачи

В наиболее общей постановке проблема поиска оптимальной формы тела вдоль траектории движения представляет собой сложную задачу оптимального управления системой нестационарных уравнений Навье–Стокса с управляемыми границами. Исследование этой задачи сопряжено со значительными трудностями. Во-первых, на каждой итерации оптимизационного метода необходимо решать сложную краевую задачу для системы нелинейных уравнений в частных производных. Во-вторых, пока еще не создан достаточно эффективный метод исследования нестационарных задач аэродинамики с учетом теплообмена. В-третьих, поставленная задача является неклассической задачей оптимального управления с управляемыми границами, в качестве которых выступают форма тела и связанный с ней отход ударной волны. Таким образом, область изменения переменных не задана, а определяется из решения задачи. В связи с вышеперечисленными трудностями проблема детального анализа общей задачи нахождения оптимальных форм тел вдоль траектории движения остается открытой.

Поэтому в данной работе предлагается следующий упрощающий подход. Общая нестационарная задача обтекания разбивается на две взаимосвязанные части:

1) нестационарная задача о движении тела по баллистической траектории в атмосфере планеты в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от коэффициентов сопротивления и нагрева тела в каждой точке траектории;

2) стационарная задача обтекания тела в заданной точке траектории с учетом радиационного и конвективного теплообмена. Асимптотическое решение данной задачи позволило получить функционалы для конвективного [5] и радиационного [6] тепловых потоков, волнового со-

противления [7] и сопротивления трения [5], явно зависящие от формы тела и параметров обтекания.

Интегрирование уравнений движения по баллистической траектории с учетом найденных коэффициентов сопротивления и теплообмена позволяет построить неаддитивный целевой функционал, поставить и решить соответствующие вариационные задачи нахождения оптимальных форм тел.

В соответствии с указанным подходом, рассмотрим гиперзвуковое движение плоского или осесимметричного тела в атмосфере планеты вдоль баллистической траектории. В рассматриваемом диапазоне скоростей гравитационная и центробежная силы малы по сравнению с сопротивлением тела, поэтому в первом приближении ими можно пренебречь. Тогда уравнения баланса сил могут быть записаны в виде [3]

$$M \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} \rho v^2 (C_B + C_{xf}) S, \quad (1.1)$$

$$\frac{dz}{dt} = -v \sin \gamma_E,$$

где M , v , S – соответственно масса, скорость и характерная площадь тела; ρ – плотность газа на высоте z ; t – время; γ_E – угол входа в атмосферу планеты; C_B и C_{xf} – коэффициенты волнового сопротивления и сопротивления трения. Для изотермической атмосферы имеем

$$\rho = \rho_0 \exp(-\lambda z),$$

где ρ_0 – плотность атмосферы на уровне поверхности планеты; λ^{-1} – шкала высот для плотности [3]. Уравнение, описывающее нагрев тела, имеет вид [2]

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{2} \rho v^3 (C_C + C_R) S, \quad (1.2)$$

где H – суммарное тепло, поглощаемое поверхностью тела при движении по траектории; C_C и C_R – соответственно коэффициенты конвективного и радиационного нагрева тела. Уравнения (1.1), (1.2) решаются при начальных условиях

$$t = 0, \quad z = z_0, \quad v = v_0, \quad H = 0.$$

Выражения для аэродинамических и тепловых коэффициентов плоского ($j = 0$) и осесимметричного ($j = 1$) тел получены в работах [5–7] из асимптотического исследования задач стационарного гиперзвукового обтекания в заданной точке траектории с учетом теплообмена. В классе тонких тел они имеют вид

$$C_B = d_B I_B(\eta), \quad I_B(\eta) = \int_0^1 (\eta'(\xi))^3 \eta^j(\xi) d\xi, \quad (1.3)$$

$$C_{xf} = d_{xf} I_{xf}(\eta), \quad I_{xf}(\eta) = \int_0^1 \eta^{j\chi}(\xi) (\eta'(\xi))^a \left[\int_0^\xi \eta^{j\chi}(s) (\eta'(s))^b ds \right]^{-1/n} d\xi, \quad (1.4)$$

$$C_R = \int_0^1 q_R(\xi) \eta^j(\xi) d\xi = d_R I_R(\eta), \quad I_R(\eta) = \int_0^1 \eta^j(\xi) (\eta'(\xi))^m (1 - \xi) d\xi \quad (1.5),$$

$$C_C = \int_0^1 q_C(\xi) \eta^j(\xi) d\xi = d_C I_C(\eta), \quad I_C(\eta) = \left[\int_0^1 \eta^{j\chi}(\xi) (\eta'(\xi))^2 d\xi \right]^{1/\chi}, \quad (1.6)$$

$$M = \rho_T V,$$

$$V = 2^{1-j} \pi^j R^{1+j} l I_V(\eta), \quad I_V(\eta) = \int_0^1 \eta^{1+j}(\xi) d\xi. \quad (1.7)$$

Здесь l , R , V , ρ_T – соответственно длина, радиус донного сечения, объем и плотность тела; $\eta = \eta(\xi)$ – функция формы тела; $q_C(\xi)$, $q_R(\xi)$ – локальные конвективный и радиационный тепловые потоки; $\chi = n/(n-1)$, где $n = 2$ или 5 для ламинарного и турбулентного режимов обтекания; $a, b, m, d_B, d_{xf}, d_C, d_R$ – параметры, зависящие от условий входа и характеристик атмосфер планет [2].

Целевой функционал задачи строится путем исключения времени из дифференциальных уравнений (1.1), (1.2) и интегрирования нагрева тела вдоль траектории движения

$$\begin{aligned} H &= \int_{v_k}^{v_0} \frac{M(C_R + C_C)}{(C_B + C_{xf})} v dv = \\ &= \rho_T 2^{1-j} \pi^j R^{1+j} l \int_{v_k}^{v_0} \frac{(d_R I_R(\eta) + d_C I_C(\eta))}{(d_B I_B(\eta) + d_{xf} I_{xf}(\eta))} I_V(\eta) v dv, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где v_0 , v_k – начальная и конечная скорости движения тела. Функционал (1.8) явным образом зависит от формы тела $\eta = \eta(\xi)$ и является функцией от пяти безразмерных функционалов, описывающих объем тела $I_V(\eta)$ (1.7), волновое сопротивление $I_B(\eta)$ (1.3), сопротивление трения $I_{xf}(\eta)$ (1.4), радиационный $I_R(\eta)$ (1.5) и конвективный $I_C(\eta)$ (1.6) тепловые потоки.

Поставим следующую вариационную задачу. Требуется найти форму плоского или осесимметричного тела $\eta = \eta(\xi)$, которая минимизирует функционал H (1.8) суммарного нагрева поверхности вдоль баллистической траектории и удовлетворяет заданным условиям на геометрические и аэродинамические характеристики тел.

В данной работе рассматриваются следующие типы ограничений:

1) граничные условия

$$\eta(0) = 0, \eta(1) = 1 \quad \text{или} \quad \eta(1) = 1; \quad (1.9)$$

2) поточечные ограничения на локальные тепловые потоки:

$$q_R(\xi) + q_C(\xi) \leq q_*, \quad \xi \in [0, 1], \quad (1.10)$$

где q_* – предельно допустимое значение локального теплового потока, определяемое теплофизическими характеристиками материала, из которого изготовлена теплозащита аппарата;

3) изопериметрические условия на заданный объем тела V (1.7) или заданный баллистический фактор

$$\beta = Mg / [(C_B + C_{xf})S], \quad (1.11)$$

где g – гравитационное ускорение (этот случай соответствует заданному режиму движения по траектории).

Поскольку баллистический фактор β , определяющий траекторию входа, зависит от оптимальной формы тела $\eta = \eta(\xi)$ через функционалы объема тела (1.7) и сопротивления (1.3), (1.4), то решение вариационных задач позволяет найти не только оптимальные формы тел, но и соответствующие траектории полета.

Нужно отметить, что изопериметрические задачи с заданным объемом тела (1.7)–(1.9) или заданным баллистическим фактором (1.8), (1.9), (1.11) можно свести к вариационным задачам на безусловный экстремум следующих целевых функционалов

$$H = \rho_T V \int_{v_k}^{v_0} \frac{(d_R I_R(\eta) + d_C I_C(\eta))}{(d_B I_B(\eta) + d_{xf} I_{xf}(\eta))} v dv, \quad (\text{при } V = const); \quad (1.12)$$

$$H = \frac{\beta S}{g} \int_{v_k}^{v_0} (d_R I_R(\eta) + d_C I_C(\eta)) v dv, \quad (\text{при } \beta = const). \quad (1.13)$$

Таким образом, поставленные задачи являются неклассическими вариационными задачами для неаддитивных целевых функционалов с учетом граничных и поточечных условий.

3. Метод исследования

Для исследования поставленных оптимизационных задач использовался численный метод, являющийся комбинацией методов блуждающей трубки [4] и локальных вариаций [8].

Вариационные задачи, сформулированные в пункте 2, можно записать в более общем виде

$$H = F(I_B(\eta), I_{xf}(\eta), I_R(\eta), I_C(\eta), I_V(\eta)) \longrightarrow \min, \quad (2.1)$$

$$0 \leq \eta(\xi) \leq 1, \quad \xi \in [0, 1], \quad (2.2)$$

$$\varphi(\xi, \eta(\xi), \eta'(\xi)) \geq 0, \quad \xi \in [0, 1] \quad (2.3)$$

Здесь безразмерные функционалы $I_B(\eta)$, $I_{xf}(\eta)$, $I_R(\eta)$, $I_C(\eta)$, $I_V(\eta)$ определяются по формулам (1.3)–(1.7), а целевой функционал H имеет вид (1.8), (1.12) или (1.13). Заметим, что ограничения (2.2) включают как частный случай краевые условия (1.9), а условия (2.3) – поточечные ограничения на локальные тепловые потоки к телу (1.10). Кроме того, исходя из физической сущности задачи, были введены дополнительные ограничения на производную искомой функции $\eta'(\xi) \geq 0$, $\xi \in [0, 1]$.

Для решения задачи (2.1)–(2.3) использовалась следующая схема. Отрезок $\xi \in [0, 1]$ разбивался на N равных частей точками $\xi_k = k \Delta\xi$, $k = 0, 1, \dots, N$, где $\Delta\xi = 1/N$ – шаг по независимой переменной ξ . В качестве начального приближения выбирался конус (или в плоском случае – клин) $\eta^0(\xi) = \xi$. Для выбранного начального приближения по квадратурным формулам Симпсона производился подсчет интегралов $I_B(\eta^0)$, $I_{xf}(\eta^0)$, $I_R(\eta^0)$, $I_C(\eta^0)$, $I_V(\eta^0)$ и целевого функционала H . Затем задавался шаг варьирования h по ординате η из условия [8]: $\Delta\xi \rightarrow 0$, $h/(\Delta\xi)^2 \rightarrow 0$, необходимого для сходимости метода локальных вариаций.

При достаточно больших фиксированных значениях $\Delta\xi$ и h по методу блуждающей трубки [4] определялось первое приближение экстремали, которое затем уточнялось методом локальных вариаций [8] на более мелкой сетке. При этом использовались преимущества обоих методов: способность метода блуждающей трубки находить глобальный экстремум и простота и экономичность метода локальных вариаций, позволяющего по единому алгоритму исследовать довольно широкий круг вариационных задач с различными типами ограничений.

Согласно методу блуждающей трубки, процесс варьирования ординат $\eta_k^0 = \eta^0(\xi_k)$ заключался в следующем. Значения η_k^0 последовательно заменялись на $(\eta_k^0 \pm jh)$, $j = 1, 2, \dots, s_{k\pm}$, где $s_{k\pm}$ – количество варьируемых точек выше и ниже начального приближения η_k^0 , удовлетворяющее условию $(s_{k+} + s_{k-})h \leq 1$. Для новых точек проверялись условия (2.2), (2.3). При выполнении этих условий находились приближенные значения безразмерных функционалов сопротивления и нагрева (1.3)–(1.7) и целевого функционала H (2.1). Если значение функционала H уменьшалось, то в таблицу решений записывалось соответствующее значение ординаты $(\eta_k^0 \pm jh)$. Таким образом, проводился полный перебор точек $(\xi_k, \eta_k^0 \pm jh)$, $k = 0, 1, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, s_{k\pm}$, лежащих в

области (2.2), и находилось первое приближение экстремали $\{\eta_k^1\}$. Количество узлов разбиения в методе блуждающей трубки принималось $N = 25$.

После этого шаг варьирования h уменьшался вдвое, и первое приближение экстремали уточнялось методом локальных вариаций. В этом случае проварьированное значение ординаты на i -й итерации имело вид $(\eta_k^i \pm h)$. Для ускорения процесса сходимости при переходе к следующему узлу ξ_{k+1} прежде всего рассматривалась вариация в том направлении (т. е. прибавлялось или вычиталось h), которое привело к уменьшению целевого функционала H в узле ξ_k . В результате, при $k = N$ в таблице ординат получали новое приближение экстремали, удовлетворяющее условиям (2.2), (2.3), причем функционал H этого приближения не больше вычисленного на предыдущем приближении.

В процессе счета итерации с фиксированными h и $\Delta\xi$ проводились до тех пор, пока в результате очередной итерации не изменялось ни одно из значений $\{\eta_k^i\}$. Затем шаг h уменьшался вдвое, и процесс варьирования продолжался. Уменьшение h при фиксированном $\Delta\xi$ проводилось до тех пор, пока не удовлетворялось неравенство $h \leq 10^{-10}$. Затем рассматривалось решение задачи на более мелкой сетке, т. е. число разбиений N удваивалось. Функция $\eta = \eta(\xi)$ во вновь образованных точках находилась интерполяцией по соседним узлам. Процесс варьирования продолжался до тех пор, пока не выполнялось неравенство $\Delta\xi \leq 10^{-3}$.

4. Результаты расчетов

Была проведена серия расчетов оптимальных форм плоских и осесимметричных форм тел с различными комбинациями интегральных и локальных ограничений в широком спектре параметров входа в атмосферы планет.

Например, на рис. 1 представлены решения вариационных задач для осесимметричных тел, удовлетворяющих граничным условиям $\eta(0) = 0$, $\eta(1) = 1$ и различным изопериметрическим ограничениям. Условия входа в атмосферу Земли: высота $z_0 = 100$ км, угол входа $\gamma_E = 6^\circ$, начальная скорость $v_0 = \{1. - 7 \text{ км/с}, 2. - 11 \text{ км/с}\}$, конечная скорость $v_k = 1 \text{ км/с}$. Штриховая линия соответствует заданным значениям радиуса донного сечения тела $R = 0.2$ м и баллистического фактора $\beta = 50 \text{ кН/м}^2$; штрих-пунктирная линия – заданным длине $l = 1$ м и объему тела $V = 0.04 \text{ м}^3$; сплошная линия – заданным длине $l = 1$ м и радиусу донного сечения тела $R = 0.2$ м (т. е. без учета изопериметрических ограничений). На рис. 2 даны оптимальные формы осесимметричных тел, удовлетворяющих граничному условию $\eta(0) = 0$ и условию на предельно допустимые локальные тепловые нагрузки. Ли-

нии 1–4 соответствуют $q_* = \infty; 0.2; 0.3; 0.5$; скорость входа в атмосферу Земли $v_0 = 11$ км/с.

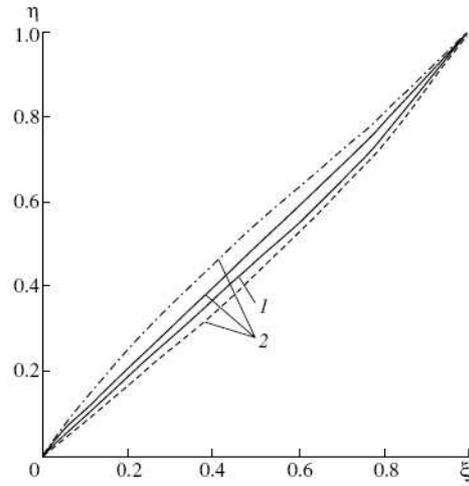


Рис. 1.

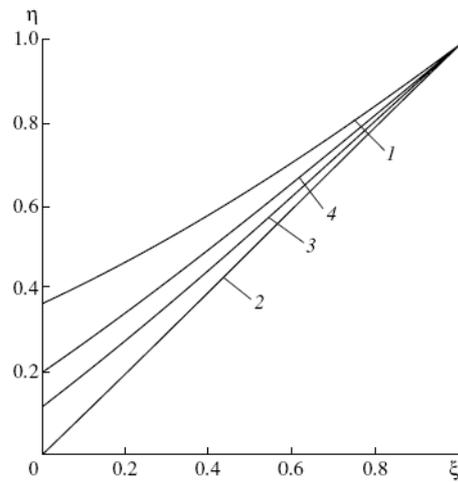


Рис. 2.

Из рисунков видно, что форма тела сильно зависит от вида накладываемых ограничений и скоростей входа в атмосферу. Расчеты также показали, что режим обтекания тел (ламинарный или турбулентный) незначительно влияет на форму тела.

Было проведено сравнение тел оптимальной формы с традиционными телами (соответственно конус и клин с теми же заданными геомет-

рическими характеристиками). Анализ расчетов показал, что использование тел оптимальной формы ("opt") позволяет снизить суммарный нагрев тела на 20–50% по сравнению с эквивалентным конусом ("cone"). Таблица 1 дает сравнение аэродинамических и тепловых характеристик оптимальных осесимметричных тел и конуса при различных заданных геометрических параметрах тела. В таблице также представлены аналогичные результаты с учетом ограничения на предельно допустимые локальные тепловые нагрузки q_* . Из таблицы видно, что оптимизация ведется в основном за счет радиационного нагрева, конвективный нагрев тела уменьшается незначительно. Это связано с тем, что функционал радиационного нагрева сильно зависит от малого изменения формы тела, особенно при больших скоростях входа, где он играет решающую роль.

Аналогичные результаты были получены и для плоских тел, но с меньшим снижением суммарного нагрева (до 30 %) по сравнению с эквивалентным клином.

Таблица 1

	(R, l)	(R, l)	(V, l)	(R, β)	q_*	q_*	q_*
$v(\text{км/с})$	7	11	11	11	∞	0.5	0.3
M^{opt}/M^{cone}	0.957	0,970	1	0,932	1.156	1.070	1.030
C_B^{opt}/C_B^{cone}	1.078	1,070	1,054	1,135	1.232	1.131	1.063
$C_{xf}^{opt}/C_{xf}^{cone}$	1,213	1,201	1,178	1,238	1.191	1.161	1,142
C_R^{opt}/C_R^{cone}	0,842	0,821	0,872	0,642	0.664	0.752	0.871
C_C^{opt}/C_C^{cone}	0,957	0,961	0,951	1,029	0.891	0.971	0.984
β^{opt}/β^{cone}	0,888	0,923	0,970	1	1.071	1.051	1.042

Список литературы

1. Аргучинцева М. А. Оптимизация формы тела по двум критериям: радиационному тепловому потоку и волновому сопротивлению / М. А. Аргучинцева, Н. Н. Пилогин // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2008. – № 4. – С. 141–150.
2. Аргучинцева М. А. Экстремальные задачи радиационной газовой динамики / М. А. Аргучинцева, Н. Н. Пилогин. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 197 с.
3. Мартин Дж. Вход в атмосферу. Введение в теорию и практику / Дж. Мартин. – М. : Мир, 1969. – 320 с.

4. Моисеев Н. Н. Методы оптимизации / Н. Н. Моисеев, Ю. П. Иванилов, Е. М. Столярова. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
5. Перминов В. Д. Осесимметричные тела минимального сопротивления и минимального потока к поверхности тела при различном характере течения в пограничном слое / В. Д. Перминов, Е. Е. Солодкин // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1971. – № 2. – С. 94–102.
6. Пилюгин Н. Н. Динамика ионизованного излучающего газа / Н. Н. Пилюгин, Г. А. Тирский. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 305 с.
7. Теория оптимальных аэродинамических форм. – М. : Мир, 1969. – 507 с.
8. Черноусько Ф. Л. Вариационные задачи механики и управления / Ф. Л. Черноусько, Н. В. Баничук. – М. : Наука, 1973. – 238 с.

M. A. Arguchintseva

Some problems of the optimal aerodynamic design of bodies with minimal heat transfer

Abstract. The spacecraft form is known to affect its aerodynamic and thermal characteristics strongly. This paper formulates and solves variational problems of finding optimal forms of flat and axisymmetric bodies from the standpoint of the minimum of the total heating along the flight trajectory. These body shapes allow the heat surface fluxes to be reduced by 20–50%.

Keywords: optimal aerodynamic design, variational problems, non-additive functional, heat transfer, computational methods

Аргучинцева Маргарита Александровна,
кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики,
экономики и информатики, Иркутский государственный университет,
664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952) 24-22-12
(marguch@math.isu.ru)

Arguchintseva Margarita, Irkutsk State University, 1, K. Marks St.,
Irkutsk, 664003, associated professor, Phone: (3952) 24-22-12
(marguch@math.isu.ru)