Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 3. С. 80—92

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 519.83+621.311:51.001.57

Модель оценки дефицита мощности электроэнергетической системы *

В. И. Зоркальцев, С. М. Пержабинский
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск

Аннотация. Исследуется модель минимизации дефицита мощности в электроэнергетической системе. Модель предназначена для исследования надежности электроснабжения. В модели учитываются нелинейные потери мощности в линиях электропередачи, из-за чего она априори представляется в виде задачи невыпуклого программирования. Излагается и теоретически обосновывается способ сведения модели к задаче выпуклого программирования.

Ключевые слова: модель, электроэнергетическая система, надежность, дефицит мощности.

1. Введение

В Сибирском энергетическом институте (СЭИ, ныне ИСЭМ СО РАН) разработана методика анализа надежности электроэнергетических систем (ЭЭС) [4, 5, 6], базирующаяся на методе многовариантных статистических испытаний (методе Монте-Карло).

Методика состоит из трех блоков.

1. Вероятностный блок, в котором формируются случайным образом возможные состояния ЭЭС.

2. Блок оценки дефицита мощности сформированных расчетных состояний (модель минимизации дефицита мощности).

3. Блок вычисления показателей надежности ЭЭС, в котором обрабатывается информация, накопленная в результате работы первых двух блоков (в том числе оцениваются показатели вероятности и математического ожидания дефицита мощности в отдельных узлах системы).

В данной методике блок расчета дефицита мощности занимает центральное место. От его реализации зависит не только качество резуль-

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-00306а

татов, но и время проведения всего цикла расчетов. Поэтому к модели минимизации дефицита мощности предъявляются особые требования. Она должна быть агрегированной, максимально адекватной действительности, легко реализуемой, рассчитываемой за максимально короткое время. Чем меньше время оптимизации, тем большее количество случайных состояний можно «проиграть» и, тем самым, увеличить точность оценки показателей.

Первые варианты модели оценки дефицита мощности ЭЭС, разработанные в СЭИ, представлялись в виде задачи о максимальном потоке. Для их реализации применялся алгоритм Форда–Фалкерсона. При использовании алгоритма Форда–Фалкерсона возникала неоднозначность распределения дефицита по узлам и, следовательно, неточность оценок вероятности и математических ожиданий дефицита в узлах системы. В связи с этим стала использоваться двухэтапная схема расчетов модели методом внутренних точек [1]. Сначала решалась задача минимизации дефицита мощности. На втором этапе – задача равномерного распределения по узлам пропорционально нагрузкам полученного минимального дефицита. В последующем была предложена одноэтапная схема расчетов, использующая квадратичный критерий, обеспечивающий одновременную минимизацию дефицита мощности с равномерным его распределением по узлам [2].

Одним из направлений повышения адекватности модели оценки дефицита мощности является учет потерь мощности при передаче ее по межузловым связям. При этом модель получает более реальный физический смысл.

В этой связи Г. Ф. Ковалевым была разработана модель, учитывающая потери мощности. В этой модели потери представляются в виде квадратичной функции от передаваемой мощности по линии электропередачи [2]. Поскольку в балансовых ограничениях-равенствах используются квадратичные функции, модель оценки дефицита мощности приобрела вид задачи невыпуклого программирования. В данной статье приводится и теоретически обосновывается способ сведения исходной модели к задаче выпуклого программирования, из решения которой по простым правилам может быть получено решение исходной модели. Доказана теорема о совпадении оптимальных решений исходной и модифицированной задачи по основным представляющим интерес для анализа надежности показателям – по величинам дефицита мощности в отдельных узлах. Доказывается также теорема о единственности значения дефицита мощности в узлах для оптимальных решений.

2. Модель оценки дефицита мощности электроэнергетической системы с учетом квадратичных потерь мощности в линиях электропередачи

Рассматривается схема электроэнергетической системы, состоящая из n узлов и некоторого набора связей между ними. Заданы располагаемая мощность $\bar{x}_i$, нагрузка $\bar{y}_i$ в i-м узле ЭЭС, предел пропускной способности $\bar{z}_{ij}$ линии электропередачи, связывающей узлы i и j, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$. Считается, что для всех i и j, $\bar{x}_i \geq 0$, $\bar{y}_i \geq 0$, $\bar{z}_{ij} \geq 0$. Если $\bar{z}_{ij} = 0$ при некоторых i и j, то это означает, что фактически поток мощности из узла i в узел j невозможен.

Переменными задачи являются: x_i – используемая мощность, y_i – покрываемая нагрузка в узле i, z_{ij} – поток мощности из узла i в узел j.

Требуется минимизировать суммарный дефицит мощности в системе

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{y}_i - y_i) \to \min, \tag{2.1}$$

учитывая балансы мощности в узлах

$$x_i - y_i + \sum_{j=1}^{n} (1 - \alpha_{ji} z_{ji})\, z_{ji} - \sum_{j=1}^{n} z_{ij} = 0, \ i = 1, \ldots, n \tag{2.2}$$

и линейные двусторонние ограничения-неравенства на переменные

$$0 \leq y_i \leq \bar{y}_i, \ i = 1, \ldots, n, \tag{2.3}$$

$$0 \leq x_i \leq \bar{x}_i, \ i = 1, \ldots, n, \tag{2.4}$$

$$0 \leq z_{ij} \leq \bar{z}_{ij}, \ i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, n. \tag{2.5}$$

Замечание 1. Коэффициенты α_{ij}, используемые для описания потерь при передаче электроэнергии из узла i в узел j, заданы и удовлетворяют условию

$$2\alpha_{ij}\bar{z}_{ij} < 1, \text{ для всех } i \text{ и } j.$$

Это условие означает то, что дополнительная единица мощности, передаваемая из узла i в узел j, достигает узла j с положительным значением: при любом $z_{ij} \in [0, \ \bar{z}_{ij})$

$$\frac{d\left(z_{ij} - \alpha_{ij}\left(z_{ij}\right)^2\right)}{dz_{ij}} > 0, \ i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, n.$$

Определение 1. *Тройку векторов $(x,\ y,\ z)$, удовлетворяющих балансовым уравнениям (2.2) и неравенствам (2.3)–(2.5), будем называть допустимым решением задачи (2.1)–(2.5). Множество таких троек векторов образует множество допустимых решений.*

Множество допустимых решений задачи (2.1)–(2.5), как правило, невыпукло (за исключением некоторых вырожденных случаев). Действительно, пусть существуют такие допустимые решения $(\tilde{y},\ \tilde{x},\ \tilde{z})$, $(\hat{y},\ \hat{x},\ \hat{z})$, что $\tilde{z} \neq \hat{z}$, тогда их выпуклая комбинация $(\lambda\tilde{y} + (1-\lambda)\,\hat{y},\ \lambda\tilde{x} + (1-\lambda)\,\hat{x},\ \lambda\tilde{z} + (1-\lambda)\,\hat{z})$ не удовлетворяет балансовым ограничениям (2.2). Значения функций в левой части ограничений (2.2) равны $\lambda\,(1-\lambda)\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ji}\,(\tilde{z}_{ji}-\hat{z}_{ji})^2$. Эти величины будут положительны для $\lambda \in (0,\ 1)$ и всех i таких, что существует номер j, при котором $\tilde{z}_{ji} \neq \hat{z}_{ji}$.

3. Представление модели оценки дефицита мощности в виде задачи выпуклого программирования

Для представления задачи (2.1)–(2.5) в виде эквивалентной задачи выпуклого программирования заменим ограничения (2.2) на следующие:

$$x_i - y_i + \sum_{j=1}^{n}(1-\alpha_{ji}z_{ji})\,z_{ji} - \sum_{j=1}^{n} z_{ij} \geq 0,\ \ i = 1,\ \ldots,\ n. \tag{3.1}$$

Множество векторов, соответствующих ограничениям (2.3)–(2.5), (3.1), является выпуклым, для любой выпуклой комбинации двух допустимых решений $(\tilde{y},\ \tilde{x},\ \tilde{z})$, $(\hat{y},\ \hat{x},\ \hat{z})$ выполняются ограничения (2.3)–(2.5), (3.1).

Задачу (2.1)–(2.5) будем называть исходной задачей минимизации дефицита мощности. Задачу (2.1), (2.3)–(2.5), (3.1) будем называть расширенной задачей минимизации дефицита мощности. Множество допустимых решений расширенной задачи содержит множество решений исходной задачи минимизации дефицита мощности. Покажем, что распределение дефицита мощности по узлам системы, найденное в результате решения задачи (2.1), (2.3)–(2.5), (3.1), будет оптимальным и в задаче (2.1)–(2.5).

Теорема 1. *Пусть значения переменных $\tilde{y}_i,\ \tilde{x}_i,\ \tilde{z}_{ij},\ i = 1,\ \ldots,\ n$, $j = 1,\ \ldots,\ n$ являются оптимальным решением задачи (2.1), (2.3)–(2.5), (3.1), тогда существуют такие $\hat{x}_i$, $\hat{z}_{ij}$, что значения переменных $\tilde{y}_i$, $\hat{x}_i$, $\hat{z}_{ij}$, $i = 1,\ \ldots,\ n$, $j = 1,\ \ldots,\ n$ составляют оптимальное решение задачи (2.1)–(2.5).*

Доказательство. Пусть векторы $\tilde{y}_i,\ \tilde{x}_i,\ \tilde{z}_{ij},\ i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,n$ являются оптимальным решением задачи (2.1), (2.3)–(2.5), (3.1). Определим неотрицательные величины невязок ограничений (2.2)

$$\tilde{\Delta}_i = \tilde{x}_i - \tilde{y}_i + \sum_{j=1}^{n} (1 - \alpha_{ji}\tilde{z}_{ji})\, \tilde{z}_{ji} - \sum_{j=1}^{n} \tilde{z}_{ij},\ \ i = 1,\ \dots,\ n. \tag{3.2}$$

Зафиксируем найденное значение $\tilde{y}$ и рассмотрим следующую задачу:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \to \min, \tag{3.3}$$

при условиях

$$x_i + \sum_{j=1}^{n} (1 - \alpha_{ji} z_{ji})\, z_{ji} - \sum_{j=1}^{n} z_{ij} - \Delta_i = \tilde{y}_i,\ i = 1,\ \dots,\ n, \tag{3.4}$$

$$\Delta_i \geq 0,\ \ i = 1,\ \dots,\ n, \tag{3.5}$$

$$0 \leq x_i \leq \bar{x}_i,\ i = 1,\ \dots,\ n, \tag{3.6}$$

$$0 \leq z_{ij} \leq \bar{z}_{ij},\ i = 1,\ \dots,\ n,\ j = 1,\ \dots,\ n. \tag{3.7}$$

Покажем, что для оптимального решения задачи (3.3)–(3.7) выполняется равенство $\Delta_i = 0,\ i = 1,\ \dots,\ n$.

Приведем алгоритм решения задачи (3.3)–(3.7). В качестве начальных значений $\Delta^1,\ x^1,\ z^1$ используем векторы $\tilde{\Delta},\ \tilde{x},\ \tilde{z}$, которые вместе с вектором $\tilde{y}$ удовлетворяют ограничениям задачи (3.3)–(3.7). Отметим, что невязка балансового ограничения $i = 1,\ \dots,\ n$, имеет место или вследствие избыточной генерации в узле i, или (и) вследствие передачи в этот узел из других узлов дополнительной мощности.

На итерации $k = 1,\ 2,\ \dots$ будем рассматривать последовательно все узлы i.

Если $\Delta_i^k = 0$, то полагаем $x_i^{k+1} = x_i^k$, $z_{ji}^{k+1} = z_{ji}^k$, $j = 1,\ \dots,\ n$.

Если $\Delta_i^k > 0$, то:

1) при $x_i^k > \tilde{y}_i$,

а) если $x_i^k - \tilde{y}_i \geq \Delta_i^k$, положим $x_i^{k+1} = x_i^k - \Delta_i^k$, $z_{ji}^{k+1} = z_{ji}^k$, $j = 1,\ \dots,\ n$;

б) если $x_i^k - \tilde{y}_i < \Delta_i^k$, полагаем $x_i^{k+1} = \tilde{y}_i$ и вводим величины z_{ji}^{k+1} такие, что

$$0 \leq z_{ji}^{k+1} \leq z_{ji}^k, \quad j = 1,\ \dots,\ n, \tag{3.8}$$

и при этом

$$\sum_{j=1}^{n} \left(1 - \alpha_{ji} z_{ji}^k\right) z_{ji}^k - \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \alpha_{ji} z_{ji}^{k+1}\right) z_{ji}^{k+1} = \Delta_i^k - x_i^k + x_i^{k+1};$$

2) при $x_i^k \le \tilde{y}_i$, полагаем $x_i^{k+1} = x_i^k$, величины z_{ji}^{k+1} должны удовлетворять условию (3.8) и за счет их последовательного сокращения добиваемся выполнения равенства

$$\sum_{j=1}^{n} \left(1 - \alpha_{ji} z_{ji}^k\right) z_{ji}^k - \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \alpha_{ji} z_{ji}^{k+1}\right) z_{ji}^{k+1} = \Delta_i^k.$$

Отметим, что после указанных преобразований для данного номера i имеет место равенство:

$$x_i^{k+1} - \tilde{y}_i + \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \alpha_{ji} z_{ji}^{k+1}\right) z_{ji}^{k+1} - \sum_{j=1}^{n} z_{ij}^k = 0. \tag{3.9}$$

Причем для всех i выполняется (3.8) и неравенства

$$0 \le x_i^{k+1} \le x_i^k. \tag{3.10}$$

После уменьшения генерации по всем узлам и назначения меньших объемов поступающей в узлы мощности, невязки балансовых ограничений (2.2) на итерации $k+1$, вычисляемые по правилу (3.2) при $\tilde{x} = x^{k+1}$, $\tilde{z} = z^{k+1}$, будут определяться следующим соотношением

$$\Delta_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} \left(z_{ij}^k - z_{ij}^{k+1}\right), \ i = 1, \ \ldots, \ n. \tag{3.11}$$

Из (3.8)–(3.11) следует, что для x_i^{k+1}, Δ_i^{k+1}, z_{ij}^{k+1}, $\tilde{y}_i$, $i = 1, \ \ldots, \ n$, $j = 1, \ \ldots, \ n$ будут выполняться условия (3.4)–(3.6).

Поскольку согласно (3.8) на всех итерациях $z_{ij}^k \ge z_{ij}^{k+1} \ge 0$, то $z_{ij}^k \to \hat{z}_{ij}$ при $k \to \infty$ для некоторого $\hat{z}_{ij}$, $i = 1, \ \ldots, \ n$, $j = 1, \ \ldots, \ n$. Следовательно, $z_{ij}^k - z_{ij}^{k+1} \to 0$ при $k \to \infty$. Из (3.11) следует, что

$$\Delta_i^k \to 0 \text{ при } k \to \infty \text{ для всех } i = 1, \ \ldots, \ n.$$

В силу (3.10)

$$x^k \to \hat{x} \text{ при } k \to \infty \text{ для некоторого } \hat{x} \ge 0.$$

Причем векторы $\hat{x}$, $\hat{z}$, $\tilde{y}$, $\hat{\Delta} = 0$ удовлетворяют условиям (3.4)–(3.7), поскольку (3.4)–(3.7) выполняются на всех итерациях для x^k, z^k, $\tilde{y}$, Δ^k. $\square$

Из теоремы 1 и указанных выше соотношений множества допустимых решений исходной и расширенной задачи минимизации дефицита мощности выступает справедливость обратного утверждения: если значения переменных $\tilde{y}_i$, $\tilde{x}_i$, $\tilde{z}_{ij}$, $i = 1, \ \ldots, \ n$, $j = 1, \ \ldots, \ n$ составляют оптимальное решение исходной задачи минимизации дефицита мощности (2.1)–(2.5), то они составляют и оптимальное решение расширенной задачи минимизации дефицита мощности (2.1), (2.3)–(2.5), (3.1).

Доказанная теорема означает также, что оптимальные решения расширенной и исходной задачи минимизации дефицита мощности совпадают по особо интересующим в этой модели переменным – по покрываемым нагрузкам y_i и соответственно по величинам дефицита мощности $\bar{y}_i - y_i$ во всех узлах $i = 1, \ldots, n$.

Отметим, что, решая задачу (3.3)–(3.7), можно перейти от оптимального решения расширенной задачи к оптимальному решению исходной задачи минимизации дефицита мощности и по остальным переменным.

Задача (2.1), (2.3)–(2.5), (3.1) имеет решение, так как множество допустимых решений не пусто (значения $y = 0$, $x = 0$, $z = 0$ составляют допустимое решение), выпукло и ограничено (в силу условий (2.3)–(2.5)), целевая функция линейна. Из существования решения в задаче (2.1), (2.3)–(2.5), (3.1) следует (согласно Теореме 1) существование решения в задаче (2.1)–(2.5)). Докажем, что решение в задаче (2.1), (2.3)–(2.5), (3.1) единственно по переменным, составляющим компоненты вектора y. Это важное свойство обеспечивает единственность распределения минимального суммарного дефицита по узлам системы в рассматриваемой здесь модели.

Теорема 2. *Решение задачи (2.1), (2.3)–(2.5), (3.1) единственно по переменным y_i, $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Предположим, что у задачи (2.1), (2.3)–(2.5), (3.1) существует два оптимальных решения $(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{z})$ и $(\hat{y}, \hat{x}, \hat{z})$ такие, что

$$\tilde{y} \neq \hat{y}. \tag{3.12}$$

Оба решения, поскольку они оптимальные, имеют одно и то же значение целевой функции

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{y}_i - \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\bar{y}_i - \tilde{y}_i). \tag{3.13}$$

Для задачи выпуклого программирования множество оптимальных решений выпукло, следовательно, оптимальным решением должен быть и набор векторов (y^*, x^*, z^*) таких, что

$$y^* = 0,5\,(\tilde{y} + \hat{y})\,,\ x^* = 0,5\,(\tilde{x} + \hat{x})\,,\ z^* = 0,5\,(\tilde{z} + \hat{z})\,. \tag{3.14}$$

В силу (3.12) для некоторого $h \in \{1, \ldots, n\}$ значения переменных $\tilde{y}_h$ и $\hat{y}_h$ будут различаться. Следовательно, одна из этих величин будет меньше другой. Пусть для определенности

$$\tilde{y}_h < \hat{y}_h \leq \bar{y}_h. \tag{3.15}$$

То есть для решения $(\tilde{y},\ \tilde{x},\ \tilde{z})$ узел с номером h будет дефицитным. Вследствие этого

$$\tilde{x}_h = \bar{x}_h,\ \tilde{z}_{hj} = 0 \text{ для всех } j \in \{1,\ \ldots,\ n\} \tag{3.16}$$

Действительно, если $\tilde{x}_h < \bar{x}_h$, то можно сократить дефицит в узле h, а, значит, и суммарный дефицит, увеличивая значение x_h.

Если $\tilde{z}_{hj} > 0$ для некоторого j, то передаваемая мощность из узла h в узел j доходит в меньшем объеме, чем $\tilde{z}_{hj}$ на величину потерь. Поэтому такой поток способствует меньшему сокращению суммарного дефицита по всем узлам. Если этот поток уменьшить на единицу, то это приведет к сокращению на единицу дефицита в данном узле и возможному увеличению, меньшему, чем на единицу, дефицита в других узлах. Следовательно, суммарный дефицит сократится. Итак, для оптимального решения из дефицитного узла не может быть потоков мощности. Свойства (3.16) доказаны.

Представим в виде функции

$$f\,(y,\ x,\ z) = x_h - y_h + \sum_{j=1}^{n} (1 - \alpha_{jh} z_{jh})\, z_{jh} - \sum_{j=1}^{n} z_{hj} \tag{3.17}$$

выражение в левой части условия (3.1) для узла h. В силу дефицитности для узла h решения $(\tilde{y},\ \tilde{x},\ \tilde{z})$ условие (3.1) должно выполняться в виде равенства

$$f\,(\tilde{y},\ \tilde{x},\ \tilde{z}) = 0. \tag{3.18}$$

Иначе, если бы значение f при таких аргументах было бы положительным, величину $\tilde{y}_h$ можно было бы увеличить, не нарушая условие (3.1). Тем самым, сократив дефицит в узле h, сократим и суммарный дефицит, что противоречит оптимальности решения $(\tilde{y},\ \tilde{x},\ \tilde{z})$.

Из (3.16)–(3.18) следует, что

$$\tilde{y}_h = \bar{x}_h + \sum_{j=1}^{n} \tilde{z}_{jh} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jh}\, (\tilde{z}_{jh})^2. \tag{3.19}$$

Согласно условию (3.1)

$$f\,(\hat{y},\ \hat{x},\ \hat{z}) \geq 0. \tag{3.20}$$

Отсюда, учитывая, что $\hat{x}_h \leq \bar{x}_h$, $\tilde{z}_{hj} \geq 0$ для всех $j = 1,\ \ldots,\ n$ имеем

$$\hat{y}_h \leq \bar{x}_h + \sum_{j=1}^{n} \hat{z}_{jh} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jh}\, (\hat{z}_{jh})^2. \tag{3.21}$$

Предположим, что для всех $j = 1,\ \ldots,\ n$

$$\tilde{z}_{jh} = \hat{z}_{jh}.$$

Тогда из (3.19), (3.21) будет следовать, что

$$\hat{y}_h \le \tilde{y}_h.$$

Это противоречит (3.15). Предположение не верно. Для некоторого j

$$\tilde{z}_{jh} \ne \hat{z}_{jh}. \tag{3.22}$$

Множество таких номеров j обозначим J. Отметим, что

$$0,5\tilde{z}_{jh}^2 + 0,5\hat{z}_{jh}^2 - 0,25\left(\tilde{z}_{jh} + \hat{z}_{jh}\right)^2 = 0,25\left(\tilde{z}_{jh} - \hat{z}_{jh}\right)^2. \tag{3.23}$$

Из определения функции f, условия (3.14) и равенства (3.23) следует, что

$$f\left(y^*,\, x^*,\, z^*\right) = 0,5f\left(\tilde{y},\ \tilde{x},\ \tilde{z}\right) + 0,5f\left(\hat{y},\ \hat{x},\ \hat{z}\right) + \sum_{j\in J} 0,25\alpha_{jh}\left(\tilde{z}_{jh} - \hat{z}_{jh}\right)^2.$$

Из (3.22) и условия $J \ne \oslash$ следует, что третья составляющая положительна. Отсюда

$$f\left(y^*,\, x^*,\, z^*\right) > 0. \tag{3.24}$$

Из (3.14), (3.15) следует, что

$$\tilde{y}_h < y_h^* < \hat{y}_h \le \bar{y}_h.$$

Это означает, что оптимальное решение $(y^*,\ x^*,\ z^*)$ будет давать дефицит $(\bar{y}_h - y_h^*)$ в узле h. Вместе с тем неравенство (3.24) означает, что значение переменной y_h можно увеличить, не нарушая условия (3.1). Тем самым будет сокращаться дефицит в узле h и суммарный дефицит. Это противоречит тому, что решение $(y^*,\ x^*,\ z^*)$ является оптимальным. Полученное противоречие доказывает ошибочность исходного предположения о существовании двух оптимальных решений, удовлетворяющих условию (3.12). $\square$

4. Замечания по реализации модели

Для сокращения количества неизвестных при реализации модели следует учитывать только такие связи, по которым можно осуществлять реальные потоки мощности. То есть необходимо исключить из состава переменных связи, для которых $\bar{z}_{ij} = 0$. Более того, потоки в обоих направлениях между узлами i и j можно задавать с помощью не двух, как ранее, а одной переменной. Пусть $l = 1,\ ...,\ m$ – номера дуг в направленном графе, описывающем ЭЭС, m – общее количество дуг.

Обозначим через t_{il} элементы матрицы (размера $n \times m$) инциденций узлов и дуг графа,

$$t_{il} = \begin{cases} -1, & \text{если узел } i \text{ является началом связи } l, \\ 1, & \text{если узел } i \text{ является концом связи } l, \\ 0, & \text{если узел } i \text{ не прилегает к связи } l. \end{cases}$$

Затем, в отличие от ранее использовавшегося обозначения, через z_l обозначим переменную, соответствующую объему потока мощности по связи l.

Ограничения (2.2), (2.5), (3.1) примут следующий вид

$$x_i - y_i + \sum_{l=1}^{m} t_{il} z_l - \sum_{l=1}^{m} \tilde{\alpha}_{il}(z_l)(z_l)^2 = 0, \quad i = 1, \ \dots, \ n. \tag{4.1}$$

$$\underline{z}_l \le z_l \le \bar{z}_l, \quad l = 1, \ \dots, \ m, \tag{4.2}$$

$$x_i - y_i + \sum_{l=1}^{m} t_{il} z_l - \sum_{l=1}^{m} \tilde{\alpha}_{il}(z_l)(z_l)^2 \ge 0, \quad i = 1, \ \dots, \ n. \tag{4.3}$$

Функции $\tilde{\alpha}_{il}(z_l)$ определяются следующим образом

$$\tilde{\alpha}_{il} = \begin{cases} \alpha_l, & \text{если } t_{il} z_l > 0, \\ 0, & \text{если } \ t_{il} z_l \le 0, \end{cases}$$

$i = 1, \ \dots, \ n$, $l = 1, \ \dots, \ m$. Величина $\underline{z}_l = -\bar{z}_l$ для всех l.

При нахождении минимального суммарного дефицита мощности возможна ситуация, когда в результате решения задачи (2.1), (2.3), (2.4), (4.2) с балансовыми ограничениями (4.1) или (4.3), получено отрицательное значение потока мощности между узлами, т. е. $z_l < 0$. Это означает, что поток мощности по l-й связи направлен в обратную, относительно заданного направления, сторону.

Некоторые узлы i могут не обладать генерирующими мощностями ($\bar{x}_i = 0$). Обозначим через L множество номеров узлов с нулевой располагаемой мощностью. Далее рассматривается только случай, когда во всех узлах $\bar{y}_i > 0$ и у всех связей $\bar{z}_l > 0$, $\underline{z}_l < 0$.

В настоящее время задача (2.1), (2.3), (2.4), (4.1), (4.2) решается на базе метода внутренних точек, основывающегося на итеративной линеаризации [1]. В [3] предлагается для решения задачи (2.1), (2.3), (2.4), (4.2), (4.3) использовать метод внутренних точек с квадратичными аппроксимациями. Вычислительный процесс метода внутренних точек осуществляется таким образом, что на всех итерациях ограничения-неравенства задачи выполняются в строгой форме.

Выбор стартовой точки для решения задачи (2.1), (2.3), (2.4), (4.2), (4.3) методом внутренних точек произведем следующим образом. Для номеров $i \in L$ введем фиктивную переменную $x_i > 0$. Задача (2.1), (2.3), (2.4), (4.2), (4.3) примет вид:

$$\sum_{i=1}^{m} (\bar{y}_i - y_i) + N \sum_{i \in L} x_i \to \min_{y,\, x}, \tag{4.4}$$

при

$$x_i - y_i + \sum_{l=1}^{m} t_{il} z_l - \sum_{l=1}^{m} \tilde{\alpha}_{il} (z_l) (z_l)^2 \geq 0, \; i = 1, \; \ldots, \; n, \tag{4.5}$$

$$0 \leq y_i \leq \bar{y}_i, \; i = 1, \; \ldots, \; n, \tag{4.6}$$

$$0 \leq x_i \leq \bar{x}_i, \; i \notin L, \tag{4.7}$$

$$x_i \geq 0, \; i \in L, \tag{4.8}$$

$$\underline{z}_l \leq z_l \leq \bar{z}_l, \; l = 1, \; \ldots, \; m. \tag{4.9}$$

Здесь N – число, большее единицы, чем обеспечивается приоритет минимизации фиктивной переменной x_i, $i \in L$ по отношению к минимизации суммарного дефицита. В расчетах [3] использовалось N, равное двум.

Будем считать, что изначально потоков мощности в сети нет, т.е. $z_l^0 = 0$, $l = 1, \; \ldots, \; m$. Для всех узлов i в качестве стартовых значений переменных x_i, y_i возьмем такие x_i^0, y_i^0, удовлетворяющие ограничениям (4.6)–(4.8), чтобы x_i^0 было больше y_i^0. Таким образом, на первой итерации неравенства (4.5) также будут выполняться в строгой форме.

5. Заключение

Сформулируем основные результаты.

1. Для модели оценки дефицита мощности ЭЭС с квадратичными потерями мощности в линиях электропередачи предложен и теоретически обоснован способ представления её в виде задачи выпуклого программирования путем замены балансовых ограничений-равенств на ограничения неравенства.

2. Доказано, что дефицит мощности в данной модели однозначно распределяется по узлам электроэнергетической системы. Это гарантирует однозначность оценок вероятности и математических ожиданий дефицита в узлах системы после проведения всего цикла расчетов.

3. Для решения задачи поиска минимального суммарного дефицита мощности требуется найти значения $2n+m$ переменных, где m – число связей, n – количество узлов. В методе внутренних точек [3] вычислительный процесс организован таким образом, что на каждой итерации

решается система линейных уравнений с симметрической положительно определенной матрицей размера $m \times m$ или $n \times n$. Тем самым находятся значения m или n переменных, через которые выражаются остальные. Такой подход позволяет сократить время вычислений.

Список литературы

1. Дикин И. И. Итеративное решение задач математического программирования: алгоритмы метода внутренних точек / И. И. Дикин, В. И. Зоркальцев. — Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1980. – 144 с.
2. Зоркальцев В. И. Модели оценки дефицита мощности электроэнергетических систем / В. И. Зоркальцев, Г. Ф. Ковалев, Л. М. Лебедева / Препринт. -– Иркутск : ИСЭМ СО РАН, 2000. – С. 17–22.
3. Зоркальцев В. И. Модель оценки дефицита мощности электроэнергетической системы с учетом квадратичных потерь мощности в линиях электропередач / В. И. Зоркальцев, Л. М. Лебедева, С. М. Пержабинский // Сиб. журн. вычисл. математики. – Новосибирск, 2010. – Т. 13, № 3. – С. 285–295.
4. Ковалев Г. Ф. Комплекс моделей оптимизации режимов расчетных состояний при оценке надежности электроэнергетических систем / Г. Ф. Ковалев, Л. М. Лебедева / Препринт. -– Иркутск : ИСЭМ СО РАН, 2000. – С. 32–39.
5. Ковалев Г. Ф. Модель оценки надежности электроэнергетических систем при долгосрочном планировании их работы / Г. Ф. Ковалев, Л. М. Лебедева // Электричество. – 2000. – № 11. – С. 17–24.
6. Руденко Ю. Н. Надежность и резервирование в электроэнергетических системах / Ю. Н. Руденко, М. Б. Чельцов. -– Новосибирск : Наука, 1974. – 263 с.

V. I. Zorkaltsev, S. M. Perzhabinsky

The model of power shortage evaluation of electrical power system

Abstract. The model of power shortage evaluation of electrical power system is analyzed. The model is intended for analysis of reliability problems of electricity supply. Nonlinear power losses in power lines are took into account in the model by that it is represented as a nonconvex programming problem. The way of presentation of this model in the form of convex problem is showed and theoretical justificated.

Keywords: model, electrical power system, reliability, power shortage.

Зоркальцев Валерий Иванович, доктор технических наук, профессор, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН,
664033, г. Иркутск – 33, Лермонтова, 130, а/я 1274, тел.: (3952) 428827, (zork@isem.sei.irk.ru)

Пержабинский Сергей Михайлович, инженер, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН,
664033, г. Иркутск – 33, Лермонтова, 130, а/я 1274, тел.: (3952) 429764, (sergey_per85@mail.ru)

Zorkaltsev Valery, Melentiev Energy System Institute of SB RAS,
130, Lermontov Street, Irkutsk – 33, 664033, professor,
Phone: (3952) 428827, (zork@isem.sei.irk.ru)

Perzhabinsky Sergey, Melentiev Energy System Institute of SB RAS,
130, Lermontov Street, Irkutsk – 33, 664033, engineer,
Phone: (3952) 429764, (sergey_per85@mail.ru)