Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 1. С. 42—53

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.9

Оптимальное управление решениями задачи Шоуолтера – Сидорова для одного уравнения соболевского типа

Н. А. Манакова
Южно-Уральский государственный университет

Е. А. Богонос
Южно-Уральский государственный университет

Аннотация. Найдены достаточные и необходимые условия существования оптимального управления решениями задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения, моделирующего распределение потенциала электрического поля в полупроводнике.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, оптимальное управление, задача Шоуолтера – Сидорова, уравнение электрического поля.

Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 1$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, причем область Ω занимает полупроводник. Предположим, что в полупроводнике имеется источник тока свободных зарядов и он «заземлен».

Рассмотрим неклассическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda x - \Delta x) - \Delta_p x + \alpha |x|^{p-2} x = f, \Delta_p x \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial s_i}(|\frac{\partial x}{\partial s_i}|^{p-2} \frac{\partial x}{\partial s_i}), \quad (0.1)$$

где $p > 2, \alpha \geq 0$. Уравнение (0.1) определяет распределение потенциала электрического поля в полупроводнике. Начально-краевая задача для уравнения (1) в случае отрицательности параметра α рассматривалась в работе [4], и была доказана локальная разрешимость данной задачи в слабом обобщенном смысле. Причем в зависимости от рассматриваемых нелинейностей и начальных условий доказана разрешимость в любом конечном цилиндре $(s,t) \in \Omega \times [0,T]$ или разрушение за конечное время.

В цилиндре $\Omega \times (0,T)$ рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (0.1)

$$(\lambda - \Delta)(x(s,0)) - x_0(s)) = 0, \; s \in \Omega; \tag{0.2}$$

$$x(s,t) = 0, \; (s,t) \in \partial\Omega \times (0,T). \tag{0.3}$$

В подходящих функциональных пространствах $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ задача (0.2), (0.3) для уравнения (0.1) редуцируется к задаче Шоуолтера – Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0 \tag{0.4}$$

для полулинейного операторного уравнения соболевского типа

$$\frac{d}{dt}Lx + M(x) = u, \tag{0.5}$$

где оператор L может не быть непрерывно обратимым. Нас интересует оптимальное управление

$$J(x,u) \to \min \tag{0.6}$$

решениями задачи (0.4) – (0.6). Здесь $J(x,u)$ – некоторый специальным образом построенный функционал штрафа; управление $u \in \mathfrak{U}_{ad}$, где $\mathfrak{U}_{ad}$ – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $\mathfrak{U}$. Таким образом, оптимальное управление решениями задачи (0.1) – (0.3) дает возможность минимизировать штрафные санкции, выбрав внешнюю нагрузку таким образом, чтобы поддерживать необходимое распределение потенциала электрического поля в области.

Уравнения соболевского типа составляют обширную область неклассических уравнений математической физики. В настоящее время число публикаций, посвященным им, растет лавинообразно (см. обстоятельные обзоры в [8],[14]). Оптимальное управление линейными уравнениями с условиями Коши впервые изучалось в [10]. Полный обзор этих результатов можно найти в [15]. Кстати сказать, теория [15] оказалась полезной и в других ситуациях [1], [2], [3]. Оптимальное управление линейными уравнениями соболевского типа с условиями Шоуолтера – Сидорова впервые рассмотрено в [12], а полулинейными уравнениями – в [7], [11]. Наш подход основан на идеях и методах [5], [6], [13].

Статья организована следующим образом. В п. 1 приведены результаты существования единственного решения начально-краевой задачи для уравнения (0.1). В п. 2 находятся достаточные условия разрешимости задачи (0.4) – (0.6). Далее мы сводим задачу (0.2), (0.3) для уравнения (0.1) к задаче (0.4) для уравнения (0.5) и приводим необходимые условия экстремума для задачи (0.4) – (0.6) в терминах сопряженной задачи.

1. Задача Шоуолтера – Сидорова

Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство; $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$ и $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*)$ – дуальные (относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств, причем вложения

$$\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{H}^* \hookrightarrow \mathfrak{B}^* \tag{1.1}$$

плотны и непрерывны. Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$ – линейный, самосопряженный, неотрицательно определенный фредгольмов оператор, чей ортонормальный (в смысле $\mathcal{H}$) набор собственных векторов $\{\varphi_k\}$ образует базис в пространстве $\mathfrak{B}$. Пусть далее $M \in C^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$ – s-монотонный (т. е. $\left\langle M'_y x, x\right\rangle > 0$, $\forall x, y \in \mathfrak{B} \setminus \{0\}$) и p-коэрцитивный (т. е. $\langle M(x), x\rangle \geq C_M\|x\|^p$ и $\|M(x)\|_* \leq C^M\|x\|^{p-1}$ при некоторых константах $C_M, C^M \in \mathbb{R}_+$ и $p \in [2, +\infty)$ и любом $x \in \mathfrak{B}$, $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ – нормы в пространстве $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}^*$ соответственно) оператор. Отметим, что для гладких операторов $M : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}^*$ из сильной монотонности следует s-монотонность, а из s-монотонности – строгая монотонность [9].

Рассмотрим задачу Шоуолтера-Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0 \tag{1.2}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$\frac{d}{dt}Lx + M(x) = f. \tag{1.3}$$

Ввиду самосопряженности и фредгольмовости оператора L отождествим $\mathfrak{H} \supset \ker L \equiv \operatorname{coker} L \subset \mathfrak{H}^*$. Очевидно, $\mathfrak{H}^* = \operatorname{coker} L \oplus \operatorname{im} L$. Обозначим через $\overline{\operatorname{im} L}$ замыкание $\operatorname{im} L$ в топологии $\mathfrak{B}^*$, тогда $\mathfrak{B}^* = \operatorname{coker} L \oplus \overline{\operatorname{im} L}$. Обозначим через Q проектор $\mathfrak{B}^*$ вдоль $\operatorname{coker} L$ на $\overline{\operatorname{im} L}$ и сделаем допущение

$$(\mathbb{I} - Q)f \text{ не зависит от } t \in (0, T). \tag{1.4}$$

Тогда если $x = x(t), t \in [0, T]$ – решение уравнения (1.3), то оно с необходимостью лежит во множестве

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \{x \in \mathfrak{B} : (\mathbb{I} - Q)M(x) = (\mathbb{I} - Q)f, & \text{если} \quad \ker L \neq \{0\}; \\ \mathfrak{B}, & \text{если} \quad \ker L = \{0\}. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение множество $\operatorname{coim} L = \{x \in \mathfrak{B} : \langle x, \varphi\rangle = 0,\ \forall \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\}$. Очевидно, $\operatorname{coim} L \oplus \ker L = \mathfrak{B}$.

Система $\{\varphi_k\}$ собственных векторов оператора L тотальна в $\mathfrak{B}$, поэтому построим галеркинские приближения решения задачи (1.2), (1.3) в виде

$$x^m(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k(t)\varphi_k,\ m > \dim \ker L,$$

где коэффициенты $a_k = a_k(t)$, $k = 1, ..., m$ определяются следующей задачей:

$$\left\langle \frac{d}{dt} Lx^m, \varphi_k \right\rangle + \langle M(x^m), \varphi_k \rangle = \langle f, \varphi_k \rangle, \tag{1.5}$$

$$\langle L(x^m(0) - x_0), \varphi_k \rangle = 0, \; k = 1, ..., m. \tag{1.6}$$

Уравнения (1.5) представляют собой вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $\mathfrak{B}^m = \mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m\}$, $T_m \in \mathbb{R}_+$, $T_m = T_m(x_0)$.

Лемма 1. *[9] При любых $x_0 \in \mathfrak{B}$ и $m > \dim \ker L$ существует единственное решение $x^m \in C^r(0, T_m; \mathfrak{B}^m)$ задачи (1.5), (1.6).*

Теорема 1. *[9] При любых $x_0 \in \mathfrak{B}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $f \in L_q(0, T; \mathfrak{B}^*)$ таких, что выполнено (1.4), существует единственное решение $x \in L_\infty(0, T; \mathrm{coim}\, L) \cap L_p(0, T; \mathfrak{M})$ задачи (1.2), (1.3).*

В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим начально-краевую задачу (0.2), (0.3) для уравнения (0.1). Чтобы редуцировать задачу (0.1) – (0.3) к задаче (0.4), (0.5), положим $\mathcal{H} = L_2$, $\mathfrak{H} = \overset{0}{W}{}^1_2$, $\mathfrak{B} = \overset{0}{W}{}^1_p$, $\mathfrak{H}^* = W_2^{-1}$, $\mathfrak{B}^* = W_p^{-1}$ (все функциональные пространства определены на области Ω). Определим в $\mathcal{H}$ скалярное произведение формулой

$$\langle x, y \rangle = \int\limits_\Omega xy ds, \; \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

При таком опеределении пространств $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{B}$ имеют место плотные и непрерывные вложения (1.1). Операторы L и M определим формулами:

$$\langle Lx, y \rangle = \int\limits_\Omega (\lambda xy + x_{s_i} y_{s_i}) ds,$$

$$\langle Mx, y \rangle = \int\limits_\Omega (|\frac{\partial x}{\partial s_i}|^{p-2} \frac{\partial x}{\partial s_i} \frac{\partial y}{\partial s_i} + \alpha |x|^{p-2} xy) ds,$$

где $x, y \in \mathfrak{B}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в L^2. (Заметим, что всюду выполняется соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющимся индексам). Обозначим через $\{\lambda_k\}$ последовательность собственных значений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $-\Delta$ в области Ω, занумерованное по неубыванию с учетом их кратности.

Лемма 2. (i) *При всех $\lambda \geq -\lambda_1$ оператор L самосопряжен, фредгольмов и неотрицательно определен, причем ортонормальное семейство $\{\varphi_k\}$ его функций тотально в пространстве $\mathfrak{B}$.*

(ii) *При всех $\alpha \in \mathbb{R}_+$ оператор $M \in C^1(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}^*)$ s-монотонен и p-коэрцитивен.*

Доказательство. Утверждение (i) хорошо известно. Что же касается утверждения (ii), то производная Фреше оператора M в точке $x \in \mathfrak{B}$ определяется формулой

$$|\langle M'_x y, w\rangle| = |\int\limits_{\Omega}((p-1)|x_{s_i}|^{p-2}y_{s_i}w_{s_i} + \alpha(p-1)|x|^{p-2}yw)ds| \leq$$

$$C_1(\|x\|^{p-2}_{\overset{0}{W}{}^1_p}\|y\|_{\overset{0}{W}{}^1_p}\|w\|_{\overset{0}{W}{}^1_p} + \|x\|^{p-2}_{L_p}\|y\|_{L_p}\|w\|_{L_p}) \leq$$

$$C_2\|x\|^{p-2}_{\overset{0}{W}{}^1_p}\|y\|_{\overset{0}{W}{}^1_p}\|w\|_{\overset{0}{W}{}^1_p}.$$

Отсюда вытекает, что оператор $M \in C^1(\mathfrak{B};\mathfrak{B}^*)$ s-монотонен

$$\langle M'_x y, y\rangle = \int\limits_{\Omega}((p-1)|x_{s_i}|^{p-2}y^2_{s_i} + \alpha(p-1)|x|^{p-2}y^2)ds > 0,$$

$$x, y \in \overset{0}{W}{}^1_p;\ x, y \neq 0$$

и p-коэрцитивен

$$\langle M(x), x\rangle = \int\limits_{\Omega}(|x_{s_i}|^p + \alpha|x|^p)ds = \|x\|^p_{\overset{0}{W}{}^1_p} + \alpha\|x\|^p_{L_p} \geq \|x\|^p_{\overset{0}{W}{}^1_p};$$

$$|\langle M(x), y\rangle| \leq |\alpha|\|x\|^{p-1}_{L_p}\|y\|_{L_p} + \|x\|^{p-1}_{\overset{0}{W}{}^1_p}\|y\|_{\overset{0}{W}{}^1_p} \leq C\|x\|^{p-1}_{\overset{0}{W}{}^1_p}\|y\|_{\overset{0}{W}{}^1_p}.$$

□

При условии $\lambda \geq -\lambda_1$

$$\ker L = \begin{cases} \{0\},\ \lambda > -\lambda_1; \\ \operatorname{span}\{\varphi_1\},\ \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\operatorname{im} L = \begin{cases} \mathfrak{B}^*,\ \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{B}^* : \langle x, \varphi_1\rangle = 0\},\ \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Отсюда проектор

$$Q = \begin{cases} \mathbb{I},\ \lambda > -\lambda_1; \\ \mathbb{I} - \langle\cdot, \varphi_1\rangle,\ \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Построим множество

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \mathfrak{B},\ \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{B} : \langle M(x), \varphi_1\rangle = \langle y, \varphi_1\rangle\},\ \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Из теоремы 1 и леммы 1.2 следует

Теорема 2. *Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, тогда при любых $x_0 \in \mathfrak{H}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $f \in L_q(0,T;\mathfrak{B}^*)$ таких, что выполнено (1.4), существует единственное решение $x \in L_\infty(0,T;\mathrm{coim}\, L) \cap L_p(0,T;\mathfrak{M})$ задачи (0.1) – (0.3).*

2. Задача оптимального управления

Фиксируем $T \in \mathbb{R}_+$. Построим пространство $\mathfrak{U} = \{u \in L_q(0,T;\mathfrak{B}^*) : (\mathbb{I} - Q)u(t) = 0,\ t \in (0,T)\}$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, и определим в пространстве $\mathfrak{U}$ замкнутое и выпуклое множество $\mathfrak{U}_{ad}$. Рассмотрим задачу оптимального управления (0.4) – (0.6), где функционал стоимости задается формулой

$$J(x,u) = \frac{1}{p}\int\limits_0^T \|x(t) - z_d(t)\|^p_{\mathfrak{B}}\, dt + \frac{N}{q}\int\limits_0^T \|u(t)\|^q_{\mathfrak{B}^*}\, dt, \qquad (2.1)$$

$z_d = z_d(t)$ – желаемое состояние.

Определение 1. *Пару $(\tilde{x},\tilde{u}) \in L_\infty(0,T;\mathrm{coim}\, L) \cap L_p(0,T;\mathfrak{M}) \times \mathfrak{U}_{ad}$ называют решением задачи (0.4) – (0.6), если $J(\tilde{x},\tilde{u}) = \inf_{u\in U_d} J(x,u)$, и $(\tilde{x},\tilde{u})$ удовлетворяет уравнению $\frac{d}{dt}Lx + M(x) = u$; вектор $\tilde{u}$ называют оптимальным управлением в задаче (0.4) – (0.6).*

Теорема 3. *При любых $x_0 \in \mathfrak{B}, T \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (0.4), (0.5), (2.1).*

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает, что оператор $(\frac{d}{dt}L + M) : L_\infty(0,T;\mathrm{coim}L) \cap L_p(0,T;\mathfrak{M}) \to \{u \in L_q(0,T;\mathfrak{B}^*) : (\mathbb{I} - Q)u = 0\}$ есть гомеоморфизм. В силу s-монотонности оператора M, неотрицательной определенности оператора L и теоремы о неявной функции обратный оператор $(\frac{d}{dt}L + M)^{-1}$ есть C^r-диффеоморфизм. Поэтому функционал стоимости (2.1) можно записать в виде

$$J(x,u) = J(u) = \frac{1}{p}\|x(u) - z_d\|^p_{L_p(0,T;\mathfrak{B})} + \frac{N}{q}\|u\|^q_{L_q(0,T;\mathfrak{B}^*)}. \qquad (2.2)$$

Пусть $\{u^m\} \subset L_q(0,T;\mathfrak{B}^*)$ – минимизирующая последовательность, тогда из (2.2) вытекает, что

$$\|u^m\|_{L_q(0,T;\mathfrak{B}^*)} \leq \mathrm{const} \qquad (2.3)$$

при всех $m \in \mathbb{N}$. Из (2.3) (переходя, если надо, к подпоследовательности) извлечем слабо сходящуюся последовательность $u^m \to \tilde{u}$. В силу теоремы Мазура точка $\tilde{u} \in \mathfrak{U}_{ad}$. Обозначим за $x^m = x(u^m)$. В силу теоремы 1 $M(x^m) \in L_q(0,T;\mathfrak{B}^*)$ и $u^m \in L_q(0,T;\mathfrak{B}^*)$, значит в силу (0.5) $\frac{d}{dt}Lx^m \in L_q(0,T;\mathfrak{B}^*)$. Но тогда $\frac{d}{dt}Lx^m \in L_q(0,T;\mathfrak{B}^*)$ остается в ограниченном множестве из $L_q(0,T;\mathfrak{B}^*)$, $x^m \in L_\infty(0,T;\mathrm{coim}L) \cap L_p(0,T;\mathfrak{M})$

остается в ограниченном множестве из $L_\infty(0,T;\mathrm{coim}L)\cap L_p(0,T;\mathfrak{M})$; значит, можно извлечь такую подпоследовательность, которую снова обозначим x^m, что

$$x^m \to x \ * -\text{слабо в } L_\infty(0,T;\mathrm{coim}L),$$

$$x^m \to x \ -\text{слабо в } L_p(0,T;\mathfrak{B}),$$

$$\frac{d}{dt}Lx^m \to \frac{d}{dt}Lx \ -\text{слабо в } L_q(0,T;\mathfrak{B}^*),$$

$$M(x^m) \to \mu \ -\text{слабо в } L_q(0,T;\mathfrak{B}^*).$$

Итак, мы докажем существование оптимального управления, если покажем, что

$$\mu = M(x(\tilde{u})).$$

Из монотонности оператора M следует, что

$$X_m = \int\limits_0^T \langle M(x^m(t)) - M(y(t)), x^m(t) - y(t)\rangle\, dt \ge 0 \ \forall y \in L_p(0,T,\mathfrak{B}).$$

Согласно (0.5),

$$\int\limits_0^T \langle M(x^m(t)), x^m(t)\rangle\, dt = \int\limits_0^T \langle u^m, x^m(t)\rangle\, dt + \frac{1}{2}|x^m(0)|^2 - \frac{1}{2}|x^m(T)|^2, \quad (2.4)$$

где $|x^m(0)|^2 = \langle L(x^m(0)), x^m(0)\rangle$ норма в $\mathrm{coim}L$ из теоремы 1, и, следовательно,

$$X_m = \int\limits_0^T \langle u^m, x^m(t)\rangle\, dt + \frac{1}{2}|x^m(0)|^2 - \frac{1}{2}|x^m(T)|^2 -$$

$$\int\limits_0^T \langle M(x^m(t)), y(t)\rangle\, dt - \int\limits_0^T \langle M(y(t)), x^m(t) - y(t)\rangle\, dt.$$

В силу того, что $\liminf |x^m(T)|^2 \ge |x(T)|^2$, получим

$$\limsup X_m \le \int\limits_0^T \langle \tilde{u}, x(t)\rangle\, dt + \frac{1}{2}|x_0|^2 - \frac{1}{2}|x(T)|^2 -$$

$$\int\limits_0^T \langle \mu, y(t)\rangle\, dt - \int\limits_0^T \langle M(y(t)), x(t) - y(t)\rangle\, dt.$$

Теорема 1 показывает, что слабый предел есть решение задачи (1.2) для уравнения

$$\frac{d}{dt}Lx + \mu = \tilde{u} \tag{2.5}$$

и $\mu = M(x)$. (Данные факты устанавливаются с незначительными отступлениями от стандартных в таких случаях рассуждений [6].) Из (2.5) мы можем заключить, что

$$\int_0^T \langle \tilde{u}, x(t)\rangle\, dt + \frac{1}{2}|x_0|^2 - \frac{1}{2}|x(T)|^2 = \int_0^T \langle \mu, x(t)\rangle\, dt.$$

Тогда получим

$$\int_0^T \langle \mu - M(y), x - y\rangle\, dt \geq 0. \tag{2.6}$$

Положим $y = x - \lambda w,\ \lambda > 0,\ w \in L_p(0,T;\mathfrak{B})$, тогда из (2.6) следует, что

$$\lambda \int_0^T \langle \mu - M(x - \lambda w), w\rangle\, dt \geq 0,$$

откуда

$$\int_0^T \langle \mu - M(x - \lambda w), w\rangle\, dt \geq 0,$$

устремляя $\lambda \to 0$ в силу непрерывности оператора M и теоремы Лебега, мы получим, что при любом w

$$\int_0^T \langle \mu - M(x), w\rangle\, dt \geq 0.$$

Следовательно, $\mu = M(x(\tilde{u}))$. Значит, переходя к пределу в уравнении состояния

$$\frac{d}{dt}Lx^m + M(x^m) = u^m,$$

получим

$$\frac{d}{dt}Lx + M(x) = \tilde{u}.$$

Следовательно $x = x(\tilde{u})$ и $\liminf J(u^m) \geq J(u)$. Значит, $\tilde{u}$ есть оптимальное управление. $\square$

Перейдем к рассмотрению задачи оптимального управления для уравнения (0.1). В цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$ зададим функционал качества

$$J(x,u) = \frac{1}{p}\|x - z_d\|^p_{L_p(0,t;\overset{0}{W}{}^1_p)} + \frac{N}{q}\int_0^T \|u\|^q_{W_p^{-1}} dt. \tag{2.7}$$

Выберем $\mathfrak{U}_{ad} \subset L_q(0,T;W_p^{-1})$ – замкнутое, выпуклое множество, для которого выполнено $(\mathbb{I} - Q)u(t) = 0$. Из теоремы 2 и теоремы 3 непосредственно вытекает

Теорема 4. *Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, тогда существует оптимальное управление в задаче (0.1) – (0.3), (2.7).*

Приведем теперь необходимые условия, которым удовлетворяет любое оптимальное управление u решениями задачи (0.1) – (0.3).

Теорема 5. *Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, если u – оптимальное управление задачи (2.7), то существует вектор $y \in L_\infty(0,T;\operatorname{coim} L) \cap L_p(0,T;\mathfrak{M})$ такой, что*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda x - \Delta x) - \Delta_p x + \alpha\lambda|x|^{p-2}x = u,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\lambda + \Delta)y - \frac{\partial}{\partial s_i}((p-1)|x_{s_i}|^{p-2})y + \alpha(p-1)|x|^{p-2}y =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial s_i}(|\frac{\partial}{\partial s_i}(x(u)-z_d)|^{p-1})\operatorname{sign}(\frac{\partial}{\partial s_i}(x(u)-z_d)),$$

$$x(s,t) = y(s,t) = 0,\ (s,t) \in \partial\Omega \times (0,T),$$

$$(\lambda - \Delta)(x(s,0) - x_0(s)) = 0,\ (\lambda - \Delta)y(s,T) = 0,\ s \in \Omega,$$

$$\int\limits_{Q_T} y(u-v)dsdt + \int\limits_0^T \|u\|^{q-1}_{W_p^{-1}}(\|u\|_{W_p^{-1}})'_u(v-u)dt \geq 0,$$

$$\forall v \in U_{ad}.$$

Доказательство. Пусть u – оптимальное управление, а $x = x(u)$ – соответствующее состояние. Покажем, что функционал $u \longrightarrow J(u)$ дифференцируем по Гато.

$$X = \frac{d}{d\tau}J(u+\tau(v-u))|_{\tau=0} =$$

$$\frac{d}{d\tau}[\frac{1}{p}\int\limits_0^T\sum_{i=1}^{n}\|\frac{\partial}{\partial s_i}(x(u+\tau(v-u))-z_d)\|^p_{L_p}dt+\frac{N}{q}\int\limits_0^T\|u+\tau(v-u)\|^q_{W_p^{-1}}dt]|_{\tau=0} =$$

$$\frac{d}{d\tau}[\frac{1}{p}\int\limits_0^T\sum_{i=1}^{n}\int\limits_\Omega|\frac{\partial}{\partial s_i}(x(u+\tau(v-u))-z_d)|^p_{L_p}dsdt+\frac{N}{q}\int\limits_0^T\|u+\tau(v-u)\|^q_{W_p^{-1}}dt]|_{\tau=0} =$$

$$[\int\limits_0^T\sum_{i=1}^{n}\int\limits_\Omega|\frac{\partial}{\partial s_i}(x(u+\tau(v-u))-z_d)|^{p-1}|\frac{\partial}{\partial s_i}(x(u+\tau(v-u))-z_d)|'_\tau dsdt+$$

$$N\int\limits_0^T \|u+\tau(v-u)\|^{q-1}_{W_p^{-1}}(\|u+\tau(v-u)\|_{W_p^{-1}})'_{(u+\tau(v-u))}(v-u)dt]|_{\tau=0} =$$

$$[\int\limits_0^T\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega |\frac{\partial}{\partial s_i}(x(u)-z_d)|^{p-1}\mathrm{sign}(\frac{\partial}{\partial s_i}(x(u)-z_d))\frac{\partial\hat{x}}{\partial s_i}dsdt+$$

$$\int\limits_0^T \|u\|^{q-1}_{W_p^{-1}}(\|u\|_{W_p^{-1}})'_u(v-u)dt,$$

где $\hat{x}$ задается как решение задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda-\Delta)\hat{x}+(p-1)|x_{s_i}|^{p-2}\hat{x}_{s_i}+\alpha(p-1)|x|^{p-2}\hat{x}=v-u, \qquad (2.8)$$

$$(\lambda-\Delta)\hat{x}(s,0)=0,\ s\in\Omega;\ \hat{x}(s,t)=0,\ (s,t)\in\partial\Omega\times(0,T). \qquad (2.9)$$

Используя рассуждения теоремы 1, нетрудно убедиться в существовании единственного решения задачи (2.8), (2.9). Далее, из теоремы вытекает, что оператор $(\frac{d}{dt}L+M) : L_\infty(0,T;\mathrm{coim}L)\cap L_p(0,T;\mathfrak{M})\to\{u\in L_q(0,T;\mathfrak{B}^*) : (\mathbb{I}-Q)u=0\}$ есть гомеоморфизм. В силу s-монотонности оператора M, неотрицательной определенности оператора L и теоремы о неявной функции обратный оператор $(\frac{d}{dt}L+M)^{-1}$ есть C^1-диффеоморфизм. Кроме того, если u – оптимальное управление, то $X\geq 0\forall u\in\mathfrak{U}_{ad}$.

Введем сопряженное состояние y при помощи задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\lambda+\Delta)y-\frac{\partial}{\partial s_i}((p-1)|x_{s_i}|^{p-2})y+\alpha(p-1)|x|^{p-2}y=$$

$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial s_i}(|\frac{\partial}{\partial s_i}(x(u)-z_d)|^{p-1})\mathrm{sign}(\frac{\partial}{\partial s_i}(x(u)-z_d)), \qquad (2.10)$$

$$(-\lambda+\Delta)y(s,T)=0,\ s\in\Omega;\ y(s,t)=0,\ (s,t)\in\partial\Omega\times(0,T). \qquad (2.11)$$

По теореме существует единственное решение задачи (2.10), (2.11). Умножим (2.10) на $\hat{x}$ и получим

$$\int\limits_{Q_T}[\frac{\partial}{\partial t}(-\lambda+\Delta)y-(p-1)\frac{\partial}{\partial s_i}(|x_{s_i}|^{p-2})y+\alpha(p-1)|x|^{p-2}y]\hat{x}dsdt=$$

$$\int\limits_{Q_T}\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial s_i}(|\frac{\partial}{\partial s_i}(x(u)-z_d)|^{p-1})\mathrm{sign}(\frac{\partial}{\partial s_i}(x(u)-z_d))\hat{x}dsdt. \qquad (2.12)$$

Преобразуем (2.12), применив формулу Грина и (2.11), получаем

$$\int\limits_{Q_T}[\frac{\partial}{\partial t}(\lambda-\Delta)\hat{x}-(p-1)\frac{\partial}{\partial s_i}(|x_{s_i}|^{p-2})\hat{x}+\alpha(p-1)|x|^{p-2}\hat{x}]ydsdt=$$

$$\int\limits_{Q_T} \frac{\partial}{\partial s_i}|\frac{\partial}{\partial s_i}(x(u)-z_d)|^{p-1}\mathrm{sign}(\frac{\partial}{\partial s_i}(x(u)-z_d))\hat{x}dsdt = \int\limits_{Q_T}(v-u)ydsdt,$$

тогда

$$\int\limits_{Q_T} y(u-v)dsdt + \int\limits_0^T \|u\|^{q-1}_{W_p^{-1}}(\|u\|_{W_p^{-1}})'_u(v-u)dt \geq 0.$$

□

Авторы выражают большую благодарность своему научному руководителю, проф. Г. А. Свиридюку за плодотворные дискуссии.

Список литературы

1. Загребина, С. А. О задаче Шоуолтера – Сидорова / С. А. Загребина // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 3. – С. 22–28.
2. Замышляева, А. А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка / А. А. Замышляева // Вычислит. технологии. – 2003. – Т. 8, №4. – С. 45–54.
3. Келлер, А. В. Численное решение задачи стартового управления для системы уравнений леонтьевского типа / А. В. Келлер // Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2009. – Т. 16, вып. 2. – С. 345–346.
4. Корпусов, М. О. О ≪разрушении≫ решения сильно нелинейного уравнения псевдопараболического типа с двойной нелинейностью / М. О. Корпусов, А. Г. Свешников // Матем. заметки. – 2006. – Т. 79, № 6. – С. 879–899.
5. Лионс, Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами / Ж.-Л. Лионс. – М.: Наука, 1987.
6. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972.
7. Манакова, Н. А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н. А. Манакова // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1185–1192.
8. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшанский, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер – М.: Физматлит, 2007.
9. Свиридюк, Г. А. Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г. А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 2. – С. 55–61.
10. Свиридюк, Г. А. Оптимальное управление одним классом линейных вырожденных уравнений / Г. А. Свиридюк, А. А. Ефремов // ДАН. – 1999.– Т. 364, № 3.– С. 323–325.
11. Свиридюк, Г. А. Задача оптимального управления для уравнения Хоффа / Г. А. Свиридюк, Н. А. Манакова // Сиб. жур. индустр. математики.– 2005.– Т. 8, № 2.– С. 144–151.
12. Федоров, В. Е. Оптимальное управление линейными уравнениями соболевского типа / В. Е. Федоров, М. В. Плеханова // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т 40, № 11. – С. 1548–1556.
13. Фурсиков, А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков.– Новосибирск: Научная книга, 1999.

14. Demidenko, G.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest – order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – N. Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.
15. Sviridyuk, G. A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – VSP, Utrecht; Boston, 2003.

N. A. Manakova, E. A. Bogonos

Optimal control to solutions of the Showalter – Sidorov problem for a Sobolev type equation

Abstract. The sufficient and necessary conditions for the existence of optimal control to solutions of the Showalter – Sidorov problem for the equation which models potencial distribution of electrical field in a semiconductor are found.
Keywords: Sobolev type equation, optimal control, the Showalter – Sidorov problem, electrical field equation.

Манакова Наталья Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, Южно-Уральский государственный университет, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76, тел.: (351)2679339 (manakova@hotbox.ru)

Богонос Елена Анатольевна, Южно-Уральский государственный университет, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76, тел.: (351)2679339

Manakova Natalya, associate professor, South Ural State University, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, 454080 Phone: (351)2679339 (manakova@hotbox.ru)

Bogonos Elena, South Ural State University, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, 454080 Phone: (351)2679339