Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 1. С. 30—35

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.983.51

Матричная фундаментальная оператор-функция вырожденного дифференциального оператора высокого порядка в условиях спектральной ограниченности

О. В. Коробова
Иркутский государственный университет

Аннотация. В работе построена матричная фундаментальная оператор-функция для вырожденного дифференциального оператора $\big(B\delta^{(N)}(t) - \Lambda A\delta(t)\big)$. Здесь оператор A является спектрально ограниченным относительно B. Получены формулы для обобщенного решения соответствующей задачи Коши.

Ключевые слова: банахово пространство, матричная фундаментальная оператор-функция, спектральная ограниченность

Объектом исследований в работе являются вырожденные системы дифференциальных уравнений N-го порядка вида

$$B\overline{u}^{(N)}(t) = \Lambda A\overline{u}(t) + \overline{f}(t), \tag{0.1}$$

где B, A — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, $D(B) \subset D(A)$, $\overline{u}(t)$ — вектор-функция размерности s, каждая компонента которой $u_\nu(t)$ является функцией со значениями в E_1, $\overline{f}(t)$ — вектор-функция размерности s, имеющая компоненты $f_\nu(t)$ со значениями в E_2, $\nu = 1, \ldots, s$, оператор B необратим, $\overline{R(B)} = R(B)$, под записью $A\overline{u}(t)$ понимается вектор-функция с компонентами $Au_\nu(t)$, $\nu = 1, \ldots, s$, Λ — невырожденная квадратная матрица порядка s.

В работах [1–3] была введена конструкция фундаментальной оператор-функции, позволяющая в замкнутом виде строить обобщенные решения различных типов вырожденных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. В работе [4] идеи работ [1–3] были перенесены на системы вырожденных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, для исследования которых была введена матричная фундаментальная оператор-функция. В работе [5] была построена матричная фундаментальная оператор-функция для дифференциального оператора, соответствующего системе уравнений (0.1), в фредгольмовом случае. В настоящей работе результаты, полученные в [5], распространяются на случай спектрально ограниченных операторов (в этом случае допускаются бесконечными как размерность ядра оператора B, так и длины A-жордановых цепочек).

1. Вспомогательные сведения

1^0**.** Приведем некоторые сведения из работ [6, 7], необходимые для изложения соответствующих результатов.

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $B \in \mathcal{L}(E_1; E_2)$ — необратимый оператор, A — замкнутый линейный оператор из E_1 в E_2, $\overline{D(A)} = E_1$.

Множество $\rho^B(A) = \{\mu \in C : (\mu B - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E_2; E_1)\}$ называется *B-резольвентным множеством* оператора A. Оператор-функции $R^B_\mu(A) = (\mu B - A)^{-1}B$, $L^B_\mu(A) = B(\mu B - A)^{-1}$ называются соответственно *правой B-резольвентой, левой B-резольвентой* оператора A. Оператор A называется *спектрально ограниченным относительно* оператора B (короче, (B, σ)*-ограниченным*), если $\exists\ a > 0$ такое, что $\{\mu \in C : |\mu| > a\} \subset \rho^B(A)$, т.е. вне круга радиуса a оператор $(\mu B - A)$ непрерывно обратим. Пусть $\gamma \equiv \{\mu \in C : |\mu| = r > a\}$, тогда пара операторов [6, 7]

$$P = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma (\mu B - A)^{-1} B\, d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma B(\mu B - A)^{-1}\, d\mu$$

являются проекторами в E_1 и E_2 соответственно, порождают разложения пространств E_1 и E_2 в прямые суммы $E_1 = E_1^0 \oplus E_1^1 = \ker P \oplus \mathrm{im}\ P$ и $E_2 = E_2^0 \oplus E_2^1 = \ker Q \oplus \mathrm{im}\ Q$. Действия операторов B и A расщепляются, причем $A_0 : E_1^0 \to E_2^0$ и $B_1 : E_1^1 \to E_2^1$ непрерывно обратимы, $A_1 : E_1^1 \to E_2^1$ ограничен, $QB = BP$, $QA = AP$ [6, 7].

2^0**.** Пусть Λ — числовая матрица, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ — ее характеристические числа. Тогда [8] существует невырожденная матрица T порядка s такая, что

$$\Lambda = T \cdot J \cdot T^{-1}, \tag{1.1}$$

где

$$J = \mathrm{diag}\ \{\lambda_1 E_{q_1} + H_{q_1},\ \lambda_2 E_{q_2} + H_{q_2},\ \ldots,\ \lambda_\mu E_{q_\mu} + H_{q_\mu}\} -$$

квазидиагональная матрица, $\lambda_i E_{q_i} + H_{q_i}$ — жорданова клетка порядка q_i, $i = 1, \ldots, \mu$. Здесь E_{q_i} — единичная матрица порядка q_i, H_{q_i} — матрица порядка q_i, у которой элементы первой "наддиагонали" равны единице, а все остальные элементы равны нулю, $q_1 + q_2 + \ldots + q_\mu = s$. J называется *нормальной жордановой формой* матрицы Λ.

Если все элементарные делители матрицы Λ первой степени, то жорданова форма имеет диагональный вид и в этом случае

$$\Lambda = T \cdot \mathrm{diag}\ \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\} \cdot T^{-1}.$$

3^0**.** Системе уравнений (0.1) соответствует дифференциальный оператор

$$\Big(B\delta^{(N)}(t) - \Lambda A\delta(t)\Big).$$

Здесь $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, под записью $B\delta^{(N)}(t)$ будем понимать $E_s B\delta^{(N)}(t)$, где E_s, как и выше, единичная матрица порядка s.

Определение 1. *Матричной фундаментальной оператор-функцией $\mathcal{G}_N(t)$ для дифференциального оператора $\Big(B\delta^{(N)}(t) - \Lambda A\delta(t)\Big)$ на классе $K'_+(E_2)$ назовем такую матричную оператор-функцию, для которой выполняются следующие два равенства*

$$\Big(B\delta^{(N)}(t) - \Lambda A\delta(t)\Big) * \mathcal{G}_N(t) * \widetilde{\widetilde{u}}_N(t) = \widetilde{\widetilde{u}}_N(t) \quad \forall\, \widetilde{\widetilde{u}}_N(t) \in K'_+(E_2), \quad (1.2)$$

$$\mathcal{G}_N(t) * \Big(B\delta^{(N)}(t) - \Lambda A\delta(t)\Big) * \widetilde{\widetilde{v}}_N(t) = \widetilde{\widetilde{v}}_N(t) \quad \forall\, \widetilde{\widetilde{v}}_N(t) \in K'_+(E_1). \quad (1.3)$$

Здесь под $\widetilde{\widetilde{u}}_N(t) \in K'_+(E_2)$ (или $\widetilde{\widetilde{v}}_N(t) \in K'_+(E_1)$) понимается вектор-столбец, каждая компонента которого является обобщенной функцией с ограниченным слева носителем со значениями в E_2 (или E_1).

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть в системе (0.1)* $\det \Lambda \neq 0$, *оператор A спектрально ограничен относительно оператора B. Тогда дифференциальный оператор $\Big(B\delta^{(N)}(t) - \Lambda A\delta(t)\Big)$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ матричную фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{G}_N(t) = T\delta(t) * \{G_{N_1}(t), G_{N_2}(t), \ldots, G_{N_\mu}(t)\} * T^{-1}\delta(t),$$

здесь T — невырожденная квадратная матрица порядка s из формулы (1.1), $\{G_{N_1}(t), G_{N_2}(t), \ldots, G_{N_\mu}(t)\}$ — блочная квадратная квазидиагональная матрица порядка s вида

$$\begin{pmatrix} G_{N_1}(t) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & G_{N_2}(t) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & G_{N_\mu}(t) \end{pmatrix},$$

диагональные блоки которой $G_{N_\nu}(t)$ *находятся по формуле* $G_{N_\nu}(t) = E_{q_\nu}\mathcal{G}_{N_\nu}(t) * \sigma(\mathcal{G}_{N_\nu}(t))$,

$$\sigma(\mathcal{G}_{N_\nu}(t)) =$$

$$\begin{pmatrix} I\delta(t) & A\delta(t) * \mathcal{G}_{N_\nu}(t) & (A\delta(t) * \mathcal{G}_{N_\nu})(t)^2 & \dots & \cdot & (A\delta(t) * \mathcal{G}_{N_\nu}(t))^{q_\nu - 1} \\ 0 & I\delta(t) & A\delta(t) * \mathcal{G}_{N_\nu}(t) & \dots & \cdot & (A\delta(t) * \mathcal{G}_{N_\nu}(t))^{q_\nu - 2} \\ 0 & 0 & I\delta(t) & \dots & \cdot & (A\delta(t) * \mathcal{G}_{N_\nu}(t))^{q_\nu - 3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I\delta(t) & A\delta(t) * \mathcal{G}_{N_\nu}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I\delta(t) \end{pmatrix},$$

$\nu = 1, \dots, \mu$ *и*

$$\mathcal{G}_{N_\nu}(t) = \mathcal{U}_{N_\nu}(t) B_1^{-1} Q\theta(t) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(A_0^{-1}B_0\right)^k}{\lambda_\nu^{k+1}} A_0^{-1}(I-Q)\delta^{(Nk)}(t),$$

где

$$\mathcal{U}_{N_\nu}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \left(\mu^N B - \lambda_\nu A\right)^{-1} B e^{\mu t}\, d\mu.$$

Если дополнительно предположить, что ∞ *— несущественно особая точка операторного пучка* $(\mu B - A)^{-1}$, *то очевидно*

$$\mathcal{G}_{N_\nu}(t) = \mathcal{U}_{N_\nu}(t) B_1^{-1} Q\theta(t) - \sum_{k=0}^{p} \frac{\left(A_0^{-1}B_0\right)^k}{\lambda_\nu^{k+1}} A_0^{-1}(I-Q)\delta^{(Nk)}(t),$$

Доказательство. В соответствии с определением матричной фундаментальной оператор-функции для доказательства теоремы проверим справедливость равенств (1.2) и (1.3).

Действительно, $\forall \widetilde{\widetilde{u}}_N(t) \in K'_+(E_2)$

$$\begin{gathered} \left(B\delta^{(N)}(t) - \Lambda A\delta(t)\right) * \mathcal{G}_N(t) * \widetilde{\widetilde{u}}_N(t) = \left(B\delta^{(N)}(t) - \Lambda A\delta(t)\right) * T\delta(t) * \\ * \{G_{N_1}(t), G_{N_2}(t), \dots, G_{N_\mu}(t)\} * T^{-1}(t) * \widetilde{\widetilde{u}}_N(t) = T\delta(t) * T^{-1}\delta(t) * \\ * \left(B\delta^{(N)}(t) - \Lambda A\delta(t)\right) * T\delta(t) * \{G_{N_1}(t), G_{N_2}(t), \dots, G_{N_\mu}(t)\} * \\ * T^{-1}\delta(t) * \widetilde{\widetilde{u}}_N(t) = T\delta(t) * \left(B\delta^{(N)}(t) - JA\delta(t)\right) * \\ * \{G_{N_1}(t), G_{N_2}(t), \dots, G_{N_\mu}(t)\} * T^{-1}\delta(t) * \widetilde{\widetilde{u}}_N(t), \end{gathered}$$

где J — матрица, подобная Λ.

Для завершения доказательства осталось проверить, что при всех $\nu = 1, \dots, \mu$

$$\left(B\delta^{(N)}(t) - (\lambda_\nu E_{q_\nu} + H_{q_\nu})A\delta(t)\right) * G_{N_\nu}(t) = E_{q_\nu}\delta(t).$$

В работе [3] было доказано, что

$$\Big(B\delta^{(N)}(t)-\lambda_\nu A\delta(t)\Big)*\mathcal{G}_{N_\nu}(t)=I\delta(t),$$

а

$$\Big(B\delta^{(N)}(t)-\lambda_\nu A\delta(t)\Big)*\mathcal{G}_{N_\nu}(t)*(A\delta(t)*\mathcal{G}_{N_\nu}(t))^{i}-$$
$$-A\delta(t)*\mathcal{G}_{N_\nu}(t)*(A\delta(t)*\mathcal{G}_{N_\nu}(t))^{i-1}\equiv 0,$$

поэтому

$$\Big(B\delta^{(N)}(t)-\Lambda A\delta(t)\Big)*\mathcal{G}_{N}(t)=T\delta(t)*T^{-1}\delta(t)=I\delta(t),$$

что и завершает доказательство формулы (1.2).

Равенство (1.3) доказывается аналогично. □

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 1 все элементарные делители матрицы Λ первой степени, то дифференциальный оператор $(B\delta^{(N)}(t)-\Lambda A\delta(t))$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ матричную фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{G}_N(t)=T\delta(t)*\{\mathcal{G}_{N_1}(t),\,\mathcal{G}_{N_2}(t),\,\ldots,\,\mathcal{G}_{N_s}(t)\}*T^{-1}\delta(t).$$

Рассмотрим задачу Коши

$$B\overline{u}^{(N)}(t)=\Lambda A\overline{u}(t)+\overline{f}(t),$$

$$\overline{u}(0)=\overline{u}_0,\,\overline{u}'(0)=\overline{u}_1,\,\ldots,\,\overline{u}^{(N-1)}(0)=\overline{u}_{N-1}.$$

В обобщенных функциях [9] эту задачу можно переписать в сверточнам виде

$$\Big(B\delta^{(N)}(t)-\Lambda A\delta(t)\Big)*\widetilde{\overline{u}}(t)=\overline{f}(t)\theta(t)+B\overline{u}_0\delta^{(N-1)}(t)+$$
$$+B\overline{u}_1\delta^{(N-2)}(t)+\cdots+B\overline{u}_{N-1}\delta(t),$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

Справедлива

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1, то единственное обобщенное решение класса $K'_+(E_1)$ рассматриваемой задачи Коши восстанавливается по формуле*

$$\widetilde{\overline{u}}_N(t)=\mathcal{G}_N(t)*(\overline{f}(t)\theta(t)+B\overline{u}_0\delta^{(N-1)}(t)+B\overline{u}_1\delta^{(N-2)}(t)+$$
$$+\cdots+B\overline{u}_{N-1}\delta(t)).$$

Замечание 1. Полученные результаты допускают обобщение на случаи секториально и радиально ограниченных операторных пучков.

Список литературы

1. Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn and M. Falaleev. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 548 p.
2. Фалалеев М.В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах / М.В. Фалалеев // Сиб. мат. журн. – 2000. – Т. 41, № 5. – С. 1167–1182.
3. Фалалеев М.В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях спектральной ограниченности / М. В. Фалалеев, Е. Ю. Гражданцева // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 6. – С. 769–774.
4. Фалалеев М.В. Системы дифференциальных уравнений с вырождением в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев, О. В. Коробова // Сиб. мат. журн. – 2008. – Т. 49, № 4. – С. 916–927.
5. Коробова О.В. Сингулярные системы дифференциальных уравнений высокого порядка в банаховых пространствах / О.. Коробова // Тез. докл. 3-й междунар. конф., посв. 85-летию чл.-корр. РАН, проф. Л.Д. Кудрявцева. – М.: МФТИ, 2008. – С. 281–282.
6. Sviridyuk G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.. Fedorov. – Utrecht; Boston: VSP, 2003.
7. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г. А. Свиридюк // УМН. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
9. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

O. V. Korobova

Matrix fundamental operator-function of singular differential operator of high order in terms of the spectral bounded

Abstract. In this paper a matrix fundamental operator-function for a singular differential operator $\left(B\delta^{(N)}(t) - \Lambda A\delta(t)\right)$ is build. Here operator A is spectral bounded relatively B. The formulas for the generalized solution of the corresponding Cauchy problem are got.

Keywords: Banach space, matrix fundamental operator-function, spectral bounded

Коробова Ольга Викторовна, кандидат физико-математических наук, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)242210 (ollis@mail.ru)

Olga Korobova, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 Phone: (3952)242210 (ollis@mail.ru)