Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 1. С. 92—103

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 518.517

О разветвляющихся решениях нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка

Н. А. Сидоров*
Иркутский государственный университет

Д. Н. Сидоров†
Институт систем энергетики СО РАН

Аннотация. С помощью методов аналитической теории ветвления решений нелинейных уравнений и теории дифференциальных уравнений с регулярной особой точкой строятся семейства решений дифференциальных уравнений n-го порядка в окрестности точек ветвления.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, диаграмма Ньютона, жордановы формы, оператор Эйлера, ветвление, сжатые отображения.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$F(x^{(n)}(t), x^{(n-1)}(t), ..., x^{(1)}(t), x(t), t) = 0,\ 0 \leq t \leq p, \tag{1}$$

где непрерывная функция $F(x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x, t)$ определена в окрестности нуля. А именно, $F = \sum\limits_{|i|+k=1}^{N} F_{ik}(\bar{x})t^k + R(x,t)$,

$$F_{ik}(\bar{x}) = F_{i_n, i_{n-1}, ..., i_1, i_0} x_n^{i_n} .. x_1^{i_1} x^{i_0},\ |i| = i_n + i_{n-1} + ... + i_1 + i_0.$$

Функция $R(x,t)$ удовлетворяет оценке $|R(x,t)| = o((|x| + |t|)^N)$.

Требуется построить решение уравнения (1) удовлетворяющее условиям: $t^i x^{(i)}(t) \to 0$ при $t \to 0$, $i = 0, 1, ..., n$. Так как таких решений может быть несколько, то введем:

Определение 1. *Если решение $x(t)$ представимо в виде*

$$x = t^{\varepsilon}(x_0 + v(t)), \tag{2}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг.

† Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 09–01–00377 и Минобрнауки 111-02-000/705

где $\varepsilon = \frac{r}{s}$– *рациональное положительное число,* $x_0 \neq 0$, ε, x_0 *определяются неоднозначно, функция* $v(t) \to 0$ *при* $t \to 0$ *и может зависеть от свободных параметров,* $t^i x^{(i)}(t) \to 0$ *при* $t \to 0$, $i = \overline{0,n}$, *то точку* $t = 0$ *назовем* **точкой ветвления** *малого решения уравнения (1).*

Классы дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных), не разрешенных относительно старших производных, в последнее время привлекали внимание многих математиков. Различные подходы и библиографию в этой области можно найти, например, в монографиях [5, 8] и др. Построение решений в окрестностях точек ветвления представляет особый интерес в ряде приложений (см., например, [4, 5, 6]).

Цель работы – построение малых решений уравнения (1) на основе аналитической теории ветвления (см. [1, гл. 9]) и теории дифференциальных уравнений с регулярной особой точкой (см. [4], [2, гл. 9] и [3, гл. 4]). Для вычисления главного члена $t^\varepsilon x_0$ решения (2) используется метод диаграммы Ньютона (см., например, [1, гл. 9] и монографию [8]). Определение функции $v(t)$ в решении (2) сводится к исследованию нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\mathcal{L}\left(t\frac{d}{dt}\right)v = M(t^{n-1}v^{(n-1)}, ..., tv^{(1)}, v, t^{1/s}), \tag{3}$$

где $\mathcal{L} = t^n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}(\varepsilon)t^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + ... + a_0(\varepsilon)$– дифференциальный оператор Эйлера. Строятся c-параметрические семейства решений $v(t,c) \to 0$ при $t \to 0$ уравнения (3). Структура семейства $v(t,c)$ зависит от корней характеристического полинома

$$L(\lambda) = \lambda(\lambda-1)...(\lambda-(n-1)) + a_{n-1}(\varepsilon)\lambda(\lambda-1)...(\lambda-(n-2)) + ... + a_0(\varepsilon) \tag{4}$$

дифференциального оператора Эйлера и от вида нормальной жордановой формы матрицы A, определяемой через коэффициенты оператора Эйлера.

На этой основе предложен способ построения асимптотики функции v в виде логарифмо-степенных сумм типа Фукса-Фробениуса (см. [3], гл. 4). Асимптотика затем используется в методе последовательных приближений в качестве начального приближения. В аналитическом случае соответствующее решение (2) раскладывается в ряд по степеням $t^{1/s}$, $t\ln t$, $t^{\mathtt{Re}\lambda_i}\cos(\mathtt{Im}\lambda_i \ln t)$, $t^{\mathtt{Re}\lambda_i}\sin(\mathtt{Im}\lambda_i \ln t)$, где λ_i - корни характеристического полинома (4) $\mathtt{Re}\lambda_i > 0$.

В п. 1 строится главный член $t^\varepsilon x_0$ решения (2) и проведена редукция к уравнению (3) для определения функции v в представлении (2).

В п. 2 рассмотрен способ построения асимптотики параметрических семейств решений уравнения (3) и приводятся теоремы существования малых решений уравнения (1).

1. Редукция к системе дифференциальных уравнений с регулярной особой точкой

Введем обозначение $F^N(\bar{x},t) = \sum\limits_{|i|+k=1}^{N} F_{ik}(\bar{x})t^k$ и условие:

A) существуют рациональные числа $\varepsilon = \frac{r}{s} > 0$, $\theta = \frac{r_1}{s_1}$ такие, что разложение F^N можно перегруппировать к виду

$$F^N(\bar{x},t) = \sum_{\varepsilon|i|+k-i_1-2i_2-...-ni_n \geq \theta} F_{i_k}(\bar{x})t^k$$

и при этом

B) $|R(t^\varepsilon x,t)| = o(t^\theta)$ при $\forall x$ из окрестности нуля.

В конкретных случаях числа ε, θ легко вычислить, нанеся на координатную плоскость целочисленные точки $(|i|, k - i_1 - 2i_2 - ... - ni_n)$, отвечающие ненулевым $|i|-$ однородным формам $F_{ik}(\bar{x})$ и построив по этим точкам диаграмму Ньютона. Искомое ε полагаем равным $\tan\phi$, где $\phi-$ угол наклона одного из отрезков диаграммы с отрицательным направлением оси абсцисс. Соответствующее θ будет равно ординате точки пересечения продолжения этого отрезка с осью ординат. В отличии от задач, рассмотренных в ([1], гл. 9), θ может оказаться отрицательным. В последнем случае условие B) выполняется автоматически в силу оценки $R(x,t) = [(|x| + |t|)^N]$. Условие B) выполняется, очевидно, и при любых положительных θ, если диаграмма Ньютона лежит ниже прямой, проходящей через точки $(0,N),(N,0)$. Так как диаграмма Ньютона может иметь несколько отрезков, то выбор ε, θ может оказаться неоднозначным.

Введем дифференциальные операторы Эйлера k-го порядка:

$$l_k(u) = t^k u^{(k)} + c_k^1 \varepsilon t^{k-1} u^{(k-1)} + c_k^2 \varepsilon(\varepsilon-1) t^{k-2} u^{(k-2)} + ...$$

$$+\varepsilon(\varepsilon-1)...(\varepsilon-(k-1))u,\ k = \overline{1,n}$$

и обозначение $l_0(u) = u$ для симметрии в последующих выкладках, заметив, что $(t^\varepsilon u)^{(k)} = t^{\varepsilon-k} l_k(u)$. Тогда в силу условия A) после замены $x(t) = t^\varepsilon u(t)$ получим разложение

$$F(x^{(n)},...,x^{(1)},x,t) = t^\theta \sum_{\varepsilon|i|+k-i_1-2i_2-...-ni_n=\theta} F_{ik}(l_n(u),...,l_0(u)) +$$

$$+r(t^n u^{(n)},...,tu^{(1)},u,t).$$

В силу выбора чисел ε, θ справедлива оценка

$$|r(t^n u^{(n)},...,tu^{(1)},u,t)| = o(t^\theta). \tag{5}$$

Для определения коэффициента x_0 в искомом решении (2) введем полином

$$Q(l_n(x), ..., l_0(x)) = \sum_{\varepsilon|i|+k-i_1-2i_2-...-ni_n=\theta} F_{ik}(l_n(x), ..., l_0(x)),$$

где теперь $l_k(x) = \varepsilon(\varepsilon-1)...(\varepsilon-(k-1))x$, $k = \overline{1,n}$. Пусть наряду с условиями A) и B) выполнено условие:

C)полином $Q(l_n(x), ..., l_0(x))$ имеет корень $x_0 \neq 0$, причем $\frac{\partial Q}{\partial l_n(x)}\Big|_{x=x_0} \neq 0$.

Тогда уравнение (1) заменой (2) и сокращением на t^θ приводится к уравнению относительно функции $v(t)$:

$$\mathcal{A}_n l_n(v) + ... + \mathcal{A}_0 l_0(v) + P(t^n v^{(n)}, ..., tv^{(1)}, v, t^{1/s}) = 0. \tag{6}$$

Здесь $\mathcal{A}_i = \frac{\partial Q}{\partial l_i}\Big|_{x=x_0}$, $i = \overline{0,n}$, $|P| = o(1)$ при $t \to 0$, $l_i(v)-$ дифференциальные операторы Эйлера.

Так как $\mathcal{A}_n \neq 0$, то подставляя в (6) дифференциальные операторы $l_i(v)$ получим уравнение

$$t^n v^{(n)}(t) + a_{n-1}(\varepsilon)t^{n-1}v^{(n-1)}(t) + ... + a_0(\varepsilon)v(t)+$$
$$+\mathcal{A}_n^{-1}P(t^n v^{(n)}(t), ..., tv^{(1)}, v(t), t^{1/s}) = 0, \tag{7}$$

где $a_{n-1}(\varepsilon) = c_n^1\varepsilon + \mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{A}_{n-1}$, $a_{n-k}(\varepsilon), k = 2, ..., n-$ определенные полиномы порядка k от ε.

Таким образом, для определения функции $v(t)$ получено уравнение (7) с дифференциальным оператором Эйлера $\mathcal{L}(t\frac{d}{dt})v$ n-го порядка в главной части. Отметим, что характеристический полином $L(\lambda)$ (см. (4) во введении) является характеристическим полиномом именно этого дифференциального оператора Эйлера. Так как выполнена оценка $|P| = o(1)$ при $t \to 0$ и любых v, то из уравнения (7) элемент $t^n v^{(n)}$ определяется в окрестности нуля методом последовательных приближений как функция от $v(t), tv^{(1)}, ..., t^{n-1}v^{(n-1)}, t^{1/s}$.

В результате задача определения функции v сводится в нашей постановке к решению уравнения вида (3).

Отметим, что в уравнении (3) функция M и ее первые производные по v, $tv^{(1)}, \cdots, t^{n-1}v^{(n-1)}$ в нуле равны нулю. Уравнение (3) заменой $v = v_1$, $tv^{(1)} = v_2$, ..., $t^{n-1}v^{(n-1)} = v_n$ сводится к системе n нелинейных дифференциальных уравнений с особой точкой первого рода при $t = 0$:

$$t\frac{d\bar{v}}{dt} = A\bar{v} + f(\bar{v}, t^{1/s}). \tag{8}$$

Здесь $\bar{v} = (v_1, ..., v_n)'$,

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & . & 0 \\ 0 & 1 & 1 & ... & . & 0 \\ 0 & 0 & 2 & ... & . & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & n-2 & 1 \\ -a_0(\varepsilon) & -a_1(\varepsilon) & -a_2(\varepsilon) & ... & -a_{n-2}(\varepsilon) & n-1-a_{n-1}(\varepsilon) \end{vmatrix}, \qquad (9)$$

$f = (0, ..., 0, M(v_n, v_{n-1}, ..v_1, t^{1/s}))'$, $M(0, ..., 0) = 0$, $\frac{\partial M}{\partial v_i}\Big|_{v_1=...=v_n=t=0} = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Таким образом, вычисление функции v в представлении искомого малого решения (2) уравнения (1) свелось к построению решения $\bar{v} \to 0$ при $t \to 0$ из системы (8).

Замечание 1. Легко проверить справедливость тождества $\det(-\lambda E + A) = (-1)^n L(\lambda)$, где $L(\lambda) = \lambda(\lambda-1)...(\lambda-(n-1)) + a_{n-1}(\epsilon)\lambda(\lambda-1)...(\lambda-(n-2)) + ... + a_0(\epsilon)$ – характеристический полином дифференциального оператора Эйлера $\mathcal{L}$, стоящего в главной части уравнения (3). В силу структуры матрицы A $\forall\lambda$ имеем

$$\mathtt{rank}(-\lambda E + A) \geq n - 1.$$

Если $\mathtt{rank}(-\lambda E + A) = n - 1$, то вектор $\bar{e}$, удовлетворяющий однородной системе $\lambda\bar{e} = A\bar{e}$, имеет жорданову цепочку длины p, где p-кратность корня λ характеристического полинома $L(\lambda)$.

2. Построение асимптотики и теоремы существования малых решений уравнения (1)

Теорема 1. *Пусть выполнены условия A), B), C). Фиксируем $N > s||A||$ и предположим, что среди корней характеристического полинома (4) нет чисел $\frac{i}{s}, i = \overline{1, N}$. Тогда уравнение (1) имеет решение вида*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N} x_i t^{\frac{r+i}{s}} + o(t^{(r+N)/s}). \qquad (10)$$

Доказательство. Выберем числа r/s, x_0 в соответствии с условиями A), B), C) и будем искать решение уравнения (1) в виде $x = t^{r/s}(x_0 + v(t))$. Здесь $v(t)$ первая компонента вектора $\bar{v}$, удовлетворяющего системе (8). Вектор $\bar{v}$ ищем в виде

$$\bar{v} = \sum_{i=0}^{N} \bar{v}_i t^{i/s} + t^{N/s}\bar{\omega}(t), \qquad (11)$$

где $\bar{\omega} \to 0$ при $t \to 0$.

Подставляя (11) в (8) и учитывая, что в силу условия теоремы 1 $\det(nE - sA) \neq 0$ при $n \in \mathbb{N}$, определим рекуррентным образом коэффициенты $\bar{v_i}$ из линейных систем

$$\left(\frac{i}{s}E - A\right)\bar{v_i} = m_i(\bar{v_1}, ..., \bar{v_{i-1}}),\ i = \overline{1, N}. \tag{12}$$

Правые части в (12) строятся методом неопределенных коэффициентов. Так как $\bar{v_i} = (v_{i1}, ..., v_{in})'$, то в решении (10) полагаем $x_i = v_{i1}, i = 1, ..., N$. Для определения вектор-функции $\bar{w}(t)$ получается система

$$t\frac{d\bar{w}}{dt} = \left(-\frac{N}{s}E + A\right)\bar{w} + g(\bar{w}, t^{1/s}), \tag{13}$$

где $||q|| = O(t^{1/s})$ при $||\bar{w}|| \leq r$, $0 \leq t \leq p$,

$$||g(\bar{w}_1, t^{1/s}) - g(\bar{w}_2, t^{1/s})|| \leq l||\bar{w}_1 - \bar{w}_2||.$$

Остается показать, что система (13) при достаточно большом N имеет единственное решение $\bar{w} \to 0$ при $t \to 0$. Это решение можно найти из эквивалентного интегрального уравнения

$$\bar{w}(t) = \int\limits_0^t \tau^{-1} \exp\left[(-\frac{N}{s}E + A)\ln\frac{t}{\tau}\right] g(\bar{w}(\tau), \tau^{1/s})d\tau \equiv \Phi(\bar{w}, t) \tag{14}$$

методом последовательных приближений при нулевом начальном приближении $\bar{w}_0 = 0$. Действительно, так как $N > S||A||$, $\ln(\frac{t}{\tau}) \geq 0$ при $\tau \leq t$, $\mathtt{sign}\tau = \mathtt{sign}t$, то существует постоянная C, такая, что при $\tau \leq t$ справедлива оценка

$$|| \exp[(-\frac{N}{s}E + A)\ln(t/\tau)]||_{\mathcal{L}(R^n \to R^n)} \leq C\,(t/\tau)^{-\frac{N}{s} + ||A||}. \tag{15}$$

Поэтому при $N > s||A||$ справедлива оценка

$$|| \int\limits_0^t \tau^{-1} \exp[(-\frac{N}{s}E + A)\ln(t/\tau)]d\tau||_{\mathcal{L}(R^n \to R^n)} \leq \frac{C}{\frac{N}{S} - ||A||}.$$

Фиксируя $q \in (0, 1)$, выберем N таким, чтобы

$$\frac{cl}{\frac{N}{s} - ||A||} \leq q. \tag{16}$$

Введем пространство $C_{[0,p]}$ непрерывных вектор-функций $\bar{w}(t)$ с нормой

$$||w|| = \max_{0 \leq t \leq p,\, 1 \leq i \leq n} |w_i(t)|.$$

В этом пространстве зададим множество $S = \{||\bar{w}|| \leq r, \, |w_i(t)| \leq rt^{1/s}, \, i = 1, .., n\}$. Будем искать малое решение $\bar{w}(t)$ уравнения (14) в S. При достаточно большом N в силу оценки (16)

$$||\Phi(\bar{w}_1, t) - \Phi(\bar{w}_2, t)|| \leq q||\bar{w}_1 - \bar{w}_2||.$$

Поэтому оператор Φ сжимающий при $||\bar{w}|| \leq r$. Далее, при $||\bar{w}|| \leq r$

$$||\Phi(\bar{w}, t)|| \leq ||\Phi(\bar{w}, t) - \Phi(0, t)|| + ||\Phi(0, t)|| \leq$$

$$\leq qr + \max_{0 \leq t \leq p} || \int\limits_0^t \tau^{-1} \exp\Big[(-\frac{N}{s} E + A) \ln \frac{t}{\tau}\Big] g(\bar{w}(\tau), \tau^{1/s}) d\tau ||_{R^n} \leq$$

$$\leq qr + \frac{c}{\frac{N}{s} - ||A||} \max_{0 \leq \tau \leq p} ||q(0, \tau^{1/s})||_{R^n}.$$

Так как $g(0, \tau^{1/s}) \to 0$ при $\tau \to 0$, то при заданных q, N можно подобрать $p > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{c}{\frac{N}{s} - ||A||} \max_{0 \leq \tau \leq p} ||g(0, \tau^{1/s})||_{R^N} \leq (1 - q)r.$$

Поэтому оператор Φ переводит шар $||\bar{w}|| \leq r$ самого в себя. Более того,

$$||\Phi(\bar{w}, t)|| = O(t^{1/s}),$$

так как

$$||\Phi(\bar{w}, t)|| \leq \frac{c}{\frac{N}{s} - ||A||} ||q(\bar{w}, t^{1/s})||,$$

где

$$||g(\bar{w}, t^{1/s})|| = O(t^{1/s}).$$

Поэтому сжимающий оператор Φ переводит множество S пространства $C_{[0,p]}$ в себя, а система (13) имеет единственное решение $\bar{w} \to 0$ при $t \to 0$, если N достаточно велико. $\square$

Решая конкретные уравнения в условиях теоремы 1 решение можно искать непосредственно в виде ряда (10), сходящегося в аналитическом случае в окрестности нуля.

Если условия теоремы 1 ослабить, допустив, что характеристический полином $L(\lambda)$ имеет корни вида i/s, то результат получится более интересным. А именно, уравнение (1) в этом случае будет иметь с-параметрическое семейство решений вида (10), коэффициенты которого, начиная с некоторого i, будут функциями от $\ln t$, зависящими от p произвольных постоянных, где p-кратность корня i/s характеристического полинома. Укажем способ построения семейства малых решений в этом случае.

Введем вспомогательную линейную систему

$$\frac{dv}{dz} = Bv + f(z), \tag{17}$$

где B - постоянная матрица, $f(z)$ - полином порядка m. Рассмотрим построение полиномиальных решений этой системы. Если $\det B \neq 0$, то система (17) в классе полиномов имеет единственное решение $v = \sum_{i=0}^{m} a_i z^i$. Коэффициенты $a_m, a_{m-1}, ..., a_0$ вычисляются в указанном порядке методом неопределенных коэффициентов.

Если $\det B = 0$, то для построения решения системы (17) в классе полиномов удобно использовать нормальную жорданову форму матрицы B. Действительно, пусть $TBT^{-1} = J$, где $J = \{\lambda_1 E_1 + H_1, ..., \lambda_k E_k + H_k\}$ - нормальная жорданова форма, $\lambda_i E_i + H_i$- жордановы клетки p_i-порядка. Среди λ_i могут быть одинаковые числа. Пусть $\mathtt{rank} B = r$. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda_1 = ... = \lambda_{n-r} = 0$, $\lambda_i \neq 0, i = n - r + 1, ..., k$. В этом случае справедлива

Лемма 1. *Пусть* $\mathtt{rank} B = r$ *и пусть вектор* $f(z)$*- полином порядка* m*. Тогда система (17) имеет полиномиальное решение порядка* $m + \max(p_1, ..., p_{n-r})$*, зависящее от* $p_1 + ... + p_{n-r}$ *произвольных постоянных.*

Доказательство. Полагая в системе (17) $u = T^{-1}\omega$ и умножая результат на T приведем систему к виду

$$\frac{dw}{dz} = J\omega + Tf(z). \tag{18}$$

В соответствии со структурой матрицы J систему (18) разобъем на k независимых подсистем

$$\frac{dw_i}{dt} = (\lambda_i E_i + H_i)w_i + p_i(z),\ i = 1, ..., k.$$

Так как $\lambda_1 = ... = \lambda_{n-r} = 0$, то координаты векторов w_i, $i = 1, ..., n - r$ вычисляются последовательным интегрированием p_i раз правых частей. Интегрирование ведется от нуля до z. Поэтому векторы $w_i(z)$, $i = 1, .., n-r$ оказываются полиномами $m+p_i$-го порядка и зависят от p_i постоянных интегрирования. Остальные векторы $w_i(z)$, $i = n-r+1, ..., k$, однозначно строятся методом неопределенных коэффициентов в виде полиномов порядка m, так как $\det(\lambda_i E_i + H_i) \neq 0$ при $i = n - r + 1, ..., k$. $\square$

С помощью леммы 1 доказывается

Теорема 2. *Пусть выполнены условия A), B) и C). Пусть среди чисел* $\frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \cdots \frac{N}{s}$*, где* $N \leq s||A||$*, есть корни характеристического полинома* $L(\lambda)$ *и* l/s *– наименьший среди них. Тогда уравнение (1) имеет* *решение вида*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{l-1} x_i t^{\frac{r+i}{s}} + \sum_{i=l}^{N} x_i(\ln t) t^{(r+i)/s} + o(t^{\frac{r+N}{s}}). \qquad (19)$$

Доказательство. Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1, но при этом необходимо учитывать, что коэффициенты решения (19) зависят от $\ln t$. Поэтому применяя метод неопределенных коэффициентов кроме алгебраических систем

$$\left(\frac{i}{s}E - A\right)v_i = m_i(v_1, ..., v_{i-1}),\ i = 1, ..., l-1$$

получим системы дифференциальных уравнений ($z = \ln t$)

$$\frac{dv_i}{dz} = (-\frac{i}{s}E + A)v_i + m_i(v_1, ..., v_{i-1}),\ i = l, l+1, ..., N.$$

Так как $\det(\frac{i}{s}E - A) \neq 0$ при $i = \overline{1, l-1}$, то $v_1, ..., v_{l-1}$ определяются однозначно и от z не зависят.

По условиям теоремы 2 $\det(-\frac{l}{s}E + A) = 0$. При этом в силу замечания 1 $\mathtt{rank}(-\frac{l}{s}E + A) = n - 1$. Соответствующий собственный вектор имеет жорданову цепочку длины p_l, где p_l- кратность корня $\frac{l}{s}$ характеристического полинома $L(\lambda)$. Поэтому на основании леммы 1 $v_l(z)$ будет полиномом p_l-го порядка и зависит от p_l произвольных постоянных интегрирования. Коэффициенты $v_{l+1}(z), ..., v_N(z)$ также строятся в виде полиномов z, порядки которых устанавливаются согласно лемме 1. В этих коэффициентах могут появиться новые произвольные постоянные, если l/s - не единственный корень характеристического полинома $L(\lambda)$ среди чисел $(l/s, (l+1)/s, ..., N/s)$. □

3. Возможные обобщения: построение решений в случае комплексных корней характеристического полинома

Если среди корней характеристического полинома есть корни λ, возможно комплексные с положительными вещественными частями, не входящие в множество $(l/s, (l+1)/s, ..., N/s)$, то класс малых решений уравнения (1) не исчерпывается построенными в теоремах 1 и 2 и может быть расширен в классе комплекснозначных функций. Так как коэффициенты характеристического полинома $L(\lambda)$ вещественные, то у полинома $L(\lambda)$ наряду с корнем λ будет сопряженный корень $\bar{\lambda}$. Поэтому частичные суммы соответствующих разложений малых решений могут содержать функции вида $t^{\mathtt{Re}\lambda} \cos(\mathtt{Im}\lambda \ln t)$, $t^{\mathtt{Re}\lambda} \sin(\mathtt{Im}\lambda \ln t)$.

Рассмотрим процесс построения малых решений в этом случае.

Введем вектор $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_l)$, где λ_i - корни характеристического полинома, $\mathtt{Re}\lambda_i > 0$. Предположим, что отобраны корни λ_i, для которых $\lambda_i \neq \sum\limits_{j=1,\, j\neq i}^{l} m_j\lambda_j + m$ при натуральных m, m_j. Пусть для простоты функция $R(x,t)$ в уравнении (1) бесконечно дифференцируема в окрестности нуля и в замене (2) $s = 1$. Будем искать решение редуцированной системы (8) в виде

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} v_{0j}(\ln t)t^j + \sum_{j=0,\, |i|\geq 1}^{\infty} v_{ij}(\ln t)t^{(\lambda,i)+j}. \tag{20}$$

Заметим, что во второй сумме нет целых показателей аргумента t в следствии выбора вектора λ. Методом неопределенных коэффициентов приходим к рекуррентной последовательности линейных дифференциальных уравнений для определения коэффициентов $v_{oj}(z),\ v_{ij}(z), (z = \ln t)$:

$$\frac{dv_{0j}}{dz} = (-jE + A)v_{oj} + m_{oi}(v_{01}, ..., v_{0j-1}),\ j = 1, 2, ...$$

$$\frac{dv_{ij}}{dz} = ((-(\lambda, i)+j)E+A)v_{ij}+m_{ij}(v_{rs}),\ |r|+s < |i|+j,\ i = 1, 2, ...,\ j = 0, 1, ...$$

Отметим, что $m_{i0} = 0$ при $|i| = 1$ и в силу замечания 1 $\mathtt{rank}(-(\lambda, i)E + A) = n - 1$ при $|i| = 1$. Поэтому коэффициенты v_{i0} при $|i| = 1$ определяется с точностью до произвольной постоянной как решения соответствующих однородных систем

$$(-(\lambda, i)E + A)v_{i0} = 0, |i| = 1.$$

Остальные коэффициенты $v_{ij}(z)$ разложения (20) тоже строятся в виде полиномов z возрастающих порядков на основании леммы 1.

В результате получим семейство малых решений уравнения (1)

$$x(t) = t^r\Big(x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} v_{0j}(\ln t)t^j + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|i|=1}^{\infty} v_{ij}(\ln t)t^{(\lambda,i)+j}\Big). \tag{21}$$

Коэффициенты v_{ij} являются функциями $\ln t$ и зависят от l свободных параметров, где l- количество корней с положительными вещественными частями характеристического полинома $L(\lambda)$ с учетом их кратности. Как и в теореме 1 с помощью принципа сжатых отображений устанавливается, что частичные суммы формального решения (21) являются асимптотическими приближениями семейства малых решений вида (2) уравнения (1). В аналитическом случае ряд (21) будет сходиться в окрестности нуля.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\sqrt{(1+\phi)^2-1}\frac{d^2\phi}{dx^2} = j(1+\phi), \qquad (22)$$

возникающее при анализе одной модели магнитной изоляции ваккумного диода. Здесь $\phi-$ потенциал электрического поля, $j-$ сила тока (см. [6] и appendix A в [5]).

Будем искать малое непрерывное решение уравнения (22) с условиями $\phi(0)=0$, $\phi'(0)=0$. В этом примере диаграмма Ньютона имеет один отрезок с вершинами в точках $(3/2,-2)$, $(0,0)$. Замена (2) принимает вид $\phi(x) = x^{4/3}(\phi_0 + v(x))$, где $\phi_0 = \left(\frac{9}{4\sqrt{2}}j\right)^{3/2}$, $v(x)$ удовлетворяет уравнению вида

$$x^2\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{8}{3}x\frac{dv}{dx} + \frac{2}{3}v = M(v, x^{1/3})$$

с дифференциальным оператором Эйлера 2-го порядка в главной части, $M(0,0)=0$, $M'_v(0,0)=0$. Соответствующий характеристический полином $\lambda^2+\frac{5}{3}\lambda+\frac{2}{3}=0$ имеет два отрицательных корня $\lambda_1=-2/3$, $\lambda_2=-1$. Поэтому на основании теорем 1 и 2 уравнению (22) при любом j удовлетворяет в окрестности точки $x=0$ ровно одно малое вещественное решение $\phi(x) = \left(\frac{9}{4\sqrt{2}}j\right)^{2/3} x^{4/3} + O(x^{5/3})$.

В заключение отметим, что изложенный подход и результаты из [1], [4, гл. 9, п.33], [8] позволяют развить теорию малых, а также неограниченных и обобщенных решений классов нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра в банаховых пространствах в окрестности точек ветвления решения. Некоторые результаты в этом направлении изложены в [5, гл. 6] и [7].

Список литературы

1. Треногин, В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М : Физматлит, 2007. – 488 с.
2. Еругин, Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин. – Минск : Наука и Техника, 1972. – 663 с.
3. Колдингтон, Э. А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. А. Колдингтон, Н. Левинсон. – М : И.Л., 1958. – 474 с.
4. Вайнберг, М. М. Теория ветвления решения нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М : Наука, 1969. – 529 с.
5. Sidorov, N. Lyapunov-Schmidt methods in nonlnear analysis and applications /N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev.– Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2002. – 547 p.

6. Abdallah, N. B. Mathematical models of magnetic insulation / N. B. Abdallah, P. Degond, F. Méhats. Rapport interne No. 97.20, MIP. - Universite Poul Sabatier, Toulouse, France, 1997.
7. Сидоров, Н. А. О ветвлении решений дифференциальных уравнений с вырождением. / Н. А. Сидоров // Дифференциальные уравнения. – 1973. – Т. 9., № 8. – С. 1464–1481.
8. Брюно, А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. / А. Д. Брюно. – М : Физматлит, 1998. – 288 с.
9. Sviridyuk, G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – Utrecht: VSP, 2003. – 228 p.

N. A. Sidorov, D. N. Sidorov

Branching solutions of nonlinear differential equations of n-th order

Abstract. Analytical theory of branching solutions of nonlinear equations and theory of differential equations with singular point are employed for construction of solutions of differential equations of n-th order in the neighborhood of branching points.

Keywords: nonlinear differential equations, Newton diagram, Jordan forms, branching

Сидоров Николай Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики,экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К.Маркса, 1 тел.: (3952)242210 (sidorovisu@gmail.com)

Сидоров Денис Николаевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт систем энергетики СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова 130,
тел.: (3952)428440 (sidorovdn@mail.ru)

Nikolai A. Sidorov, Professor, Irkutsk State University, 1, K.Marks St., Irkutsk, 664003, Phone: (3952)242210

Denis N. Sidorov, Senior Research Fellow, Energy Systems Institute SB RAS, 130, Lermontov Str., Irkutsk, 664033, Phone: (3952)428440