Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 1. С. 126—132

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.954

Абстрактная задача прогноз-управление с вырождением в банаховых пространствах *

М. В. Фалалеев
Иркутский государственный университет

Аннотация. В работе рассматривается обратная задача для вырожденного дифференциального уравнения в банаховых пространствах. В терминах свойств операторных пучков получены достаточные условия ее разрешимости.

Ключевые слова: жордановы наборы; обратная задача; нетеров оператор; банаховы пространства; спектральная ограниченность.

1. Постановка задачи

Пусть E_1, E_2, P_0 - банаховы пространства, B, A - замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $D(B) \subset D(A)$, $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, B - необратим, $G(t) \in \mathcal{L}(P_0, E_2)$ достаточно гладкая оператор-функция, $\mu(t)$ - вещественная функция ограниченной вариации на $[0;T]$.

Рассматрим задачу нахождения пары $u(t) \in C^1([0;T], E_1)$ и $q \in P_0$ удовлетворяющих уравнению

$$B\dot{u}(t) = Au(t) + G(t)q + f(t), \tag{1.1}$$

начальному условию

$$u(0) = u_0, \tag{1.2}$$

и условию интегрального наблюдения (или переопределения)

$$\mathcal{L}(u(t)) \equiv \int\limits_0^T u(t)d\mu(t) = u_T \in E_1, \tag{1.3}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг.

где $u_0 \in E_1$, $f(t)$ достаточно гладкая функция со значениями в E_2. Следуя терминологии работы [1] будем называть задачу (1.1)-(1.3) вырожденной абстрактной задачей прогноз-управление.

2. Случай фредгольмова оператора при производной

Пусть в уравнении (1.1) оператор B - фредгольмов, т.е. $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n$, и выполнены условия:

А) $\overline{imB} = imB$ и оператор B имеет полный $A-$жорданов набор [2], состоящий из элементов $\{\varphi_i^{(j)}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p_i\} \in E_1$, где $\{\varphi_i^{(1)}, i = 1, \dots, n\}$ - базис ядра $N(B)$, тогда оператор B^* имеет полный A^*-жорданов набор [3] элементов $\{\psi_i^{(j)}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p_i\} \in E_2^*$;

В) область значений оператор-функции $G(t)$ такова, что

$$\left\langle G(t)\cdot, \psi_i^{(j)} \right\rangle \equiv 0,\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, p_i.$$

Введем следующие обозначения:

$$c_{ij} = -\left\langle Ax_0 + f(0), \psi_i^{(j)} \right\rangle - \left\langle f'(0), \psi_i^{(j-1)} \right\rangle - \dots - \left\langle f^{(j-1)}(0), \psi_i^{(1)} \right\rangle, \quad (2.1)$$

$$\xi_{ij}(t) = -\sum_{k=0}^{p_i-j} \left\langle f^{(k)}(t) - f^{(k)}(0), \psi_i^{(p_i-j+1-k)} \right\rangle, \quad (2.2)$$

$$i = 1, \dots, n, \ \ j = 1, \dots, p_i,$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot, \psi_i^{(j)} \right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)},$$

$$u^0(t) = u_0 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \xi_{ij}(t)\varphi_i^{(j)} + \int_0^t \Gamma \exp A\Gamma(t-s)[I-Q](Au_0 + f(s))ds, \quad (2.3)$$

здесь Γ - оператор Треногина-Шмидта [2], тогда, как было доказано в работе [3], при выполнении условий А), В) и $c_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p_i$ задача Коши (1.1)-(1.2) имеет единственное решение вида

$$u(t) = u^0(t) + \int_0^t \Gamma \exp A\Gamma(t-s)G(s)qds. \quad (2.4)$$

Подставив представление для решения (2.4) в условие интегрального наблюдения (1.3), получим относительно искомого элемента $q \in P_0$ интегральное уравнение

$$Dq \equiv \int_0^T \int_0^t \Gamma \exp A\Gamma sG(t-s)dsd\mu(t)q = u_T - \mathcal{L}(u^0(t)).$$

Таким образом доказана следующая

Теорема 1. *Пусть оператор B фредгольмов, выполнены условия A), B), $c_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p_i$ и существует оператор D^{-1}, тогда задача (1.1)-(1.3) однозначно разрешима относительно пары $u(t)$ и $q \in P_0$ по формулам (2.3)-(2.4) и*

$$q = D^{-1}\Big(u_T - \mathcal{L}(u^0(t))\Big).$$

3. Случай нетерова оператора при производной

Пусть в уравнении (1.1) оператор B - нетеров, т.е. $n = \dim N(B) \neq m = \dim N(B^*)$ и $l = \min(n, m)$. Рассмотрим случаи положительного и отрицательного индексов нетерова оператора B.

Пусть $n > m$ и выполнены условия:

A_1) $\overline{imB} = imB$ и существуют полные жордановы наборы [3] $\{\varphi_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p_i\} \in E_1$ и $\{\psi_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p_i\} \in E_2^*$;

B_1) область значений оператор-функции $G(t)$ "ортогональна" A^*-жорданову набору оператора B^*, т.е.

$$\Big\langle G(t)\cdot, \psi_i^{(j)} \Big\rangle \equiv 0,\ i = 1, \dots, l,\ j = 1, \dots, p_i;$$

C_1) числа (см. формулу (2.1)) $c_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, p_i$.

Введем проектор

$$\tilde{Q} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{p_i} \Big\langle \cdot, \psi_i^{(j)} \Big\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)},$$

и функции

$$\tilde{u}^0(t) = u_0 + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{p_i} \xi_{ij}(t)\varphi_i^{(j)} + \sum_{k=m+1}^{n} \xi_{k1}(t)\varphi_k^{(1)} +$$

$$+ \int_0^t B^+ \exp AB^+(t-s)\Big[I - \tilde{Q}\Big]\Big(Au_0 + f(s) + \sum_{k=m+1}^{n} \xi_{k1}(s)\varphi_k^{(1)}\Big)ds, \quad (3.1)$$

здесь B^+ - псевдообратный оператор [4], функции $\xi_{ij}(t)$ строятся по формуле (2.2), функции $\xi_{k1}(t)$ - свободные.

При выполнении условий A_1), B_1) и C_1) решение задачи Коши (1.1)-(1.2) имеет вид [3]

$$\tilde{u}(t) = \tilde{u}^0(t) + \int_0^t B^+ \exp AB^+(t-s)G(s)q\,ds \quad (3.2)$$

и является, вообще говоря, многопараметрической функцией. Отсюда, как при выводе теоремы 1, получаем

Теорема 2. *Пусть оператор B нетеров, $n > m$, выполнены условия A_1), B_1), C_1), оператор*

$$\tilde{D} = \int_0^T \int_0^t B^+ \exp AB^+ sG(t-s)dsd\mu(t) \tag{3.3}$$

обратим, тогда задача прогноз-управление (1.1)-(1.3) разрешима относительно пары $(u(t), q)$ по формулам (3.1)-(3.2) и

$$q = \tilde{D}^{-1}\Big(u_T - \mathcal{L}(\tilde{u}^0(t))\Big). \tag{3.4}$$

Если нетеров оператор B имеет отрицательный индекс, т.е. $n < m$ и $l = n$, тогда дополнительно к условиям A_1), B_1), C_1) введем условие D_1)

$$\int_0^t \Big\langle \exp AB^+(t-s)\Big(Au_0 + f(s)\Big), \psi_j\Big\rangle ds \equiv 0, \quad j = n+1, \ldots, m.$$

Теорема 3. *Пусть оператор B нетеров, $n < m$, выполнены условия A_1), B_1), C_1), D_1), оператор $\tilde{D}$ из формулы (3.3) обратим, тогда задача (1.1)-(1.3) однозначно разрешима относительно пары $(u(t), q)$, причем параметр $q \in P_0$ восстанавливается по формулам (3.3)-(3.4), а функция $u(t)$ по формулам (3.1)-(3.2), в которых уже отсутствуют свободные функции (т.е. $\xi_{k1}(t) \equiv 0$).*

4. Случай спектральной ограниченности операторного пучка

В этом пункте будем предполагать, что необратимый оператор B ограничен, а оператор A – замкнут. Следуя терминологии работ [5] и [6] будем называть оператор A спектрально ограниченным относительно оператора B (или (B,σ)-ограниченным), если операторный пучок $(\lambda B - A)$ непрерывно обратим вне круга радиуса $a > 0$. В этом случае пара операторов

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R} (\lambda B - A)^{-1} B d\lambda, \quad Q_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R} B(\lambda B - A)^{-1} d\lambda,$$

где $C_R \equiv \{\lambda \in C : \mid \lambda \mid = R > a\}$ являются проекторами в пространствах E_1 и E_2, порождая их разложения в прямые суммы вида $E_1 = E_1^0 \oplus E_1^1 =$

$kerP \oplus imP$, $E_2 = E_2^0 \oplus E_2^1 = kerQ \oplus imQ$. Действия операторов B и A при этом расщепляются таким образом, что $A_0 : E_1^0 \to E_2^0$, $B_1 : E_1^1 \to E_2^1$ непрерывно обратимы, $A_1 : E_1^1 \to E_2^1$ ограничен и $Q_1 B = BP_1$, $Q_1 A = AP_1$.

В предположении (B,σ)-ограниченности введем условия:

A_2) существует натуральное p, такое что $(A_0^{-1}B_0)^p \neq 0$, но $(A_0^{-1}B_0)^{p+1} \equiv 0$ (т.е. оператор $A_0^{-1}B_0$ нильпотентен);

B_2) оператор-функция $G(t)$ такова, что $(I - Q_1)G(t) \equiv 0$;

C_2) начальное условие u_0 и функция $f(t)$ выбраны таким образом, что

$$(I - P_1)u_0 + \sum_{k=0}^{p} (A_0^{-1}B_0)^k A_0^{-1}(I - Q_1) f^{(k)}(0) = 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{U}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\lambda B - A)^{-1} B e^{\lambda t} d\lambda$$

вырожденная разрешающая полугруппа $\mathcal{U}(0) = P_1$ [5];

$$u_1^0(t) = \mathcal{U}(t)P_1 u_0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)B_1^{-1}Q_1 f(s)ds - \sum_{k=0}^{p} (A_0^{-1}B_0)^k A_0^{-1}(I-Q_1) f^{(k)}(t), \tag{4.1}$$

$$D_1 q = \int_0^T \int_0^t \mathcal{U}(s) B_1^{-1} G(t-s) q ds d\mu(t).$$

При выполнении условий A_2), B_2), C_2) задача Коши (1.1)-(1.2) имеет решение вида

$$u(t) = u_1^0(t) + \int_0^t \mathcal{U}(t-s) B_1^{-1} Q_1 G(s) q ds. \tag{4.2}$$

Таким образом доказана

Теорема 4. *Если оператор A спектрально ограничен относительно B, выполнены условия A_2), B_2), C_2), оператор D_1 обратим, тогда задача прогноз-управление (1.1)-(1.3) разрешима относительно пары $(u(t), q)$, причем*

$$q = D^{-1}\Big(u_T - \mathcal{L}(u_1^0(t))\Big),$$

а функция $u(t)$ восстанавливается по формулам (4.1)-(4.2).

Замечание 1. Утверждение теоремы 4 можно обобщить на случаи секториальной и радиальной ограниченности [5] - [6] оператора A относительно B.

Замечание 2. Случаи, когда в правой части уравнения (1) $f(t) \equiv 0$, $G(t)q = qg(t)$, $g(t) : [0;T] \to R$, $q \in E_2$, а оператор A сильно (B,σ)-секториален или (B,σ)-ограничен рассмотрены в работах [7] и [8].

Замечание 3. Задачи прогноз-управление можно ставить и решать для различных типов вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, причем условие (1.3) может иметь вид точечно-интегрального наблюдения

$$\mathcal{L}(u(t)) \equiv \sum \alpha_k u(t_k) + \int_0^T u(t)\omega(t)dt,$$

$$\sum \mid \alpha_k \mid < +\infty,$$

где $\alpha_k,\ t_k,\ \omega(t)$ заданы, $t_k \in [0;T]$.

Список литературы

1. Прилепко, А.И. Метод полугрупп решения обратных, нелокальных и неклассических задач. Прогноз-управление и прогноз- наблюдение эволюционных уравнений. I /А.И. Прилепко //Дифференц. уравн. – 2005. – Т. 41, № 11. – С. 1560–1571.
2. Вайнберг, М.М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин – М. : Наука, 1969.
3. Сидоров, Н.А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением / Н.А. Сидоров, О.А. Романова // Дифференц. уравн. – 1983. – Т. 19, № 9. – С. 1516–1626.
4. Nashed, M.Z. Generalized Inverses and Applications / M.Z. Nashed – N. Y.: Academ. Press, 1976.
5. Свиридюк, Г.А. К общей теории полугрупп операторов /Г.А. Свиридюк // Успехи матем. наук. – 1994. – Т.49, № 4. – С. 47–74.
6. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators/ G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov – Utrecht; Boston: VSP, 2003.
7. Федоров В.Е. Задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений гидродинамики / А.В. Уразаева, В.Е. Федоров // Дифференц. уравн. – 2008. – Т. 44, № 8. – С. 1111–1119.
8. Федоров, В.Е. О корректности задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений / А.В. Уразаева, В.Е. Федоров // Матем. заметки – 2009. – Т. 85, № 3. – С. 440–450.

M. V. Falaleev

Degenerated abstract problem of prediction-control in Banach spaces

Abstract. The inverse problem for degenerated differential equations in Banach spaces is considered in this article. In therms of properties of operators sheaves the sufficient conditions of solvability are obtained.

Keywords: Jordan sets; inverse problems; Fredholm operator; Banach spaces; spectral boundedness

Фалалеев Михаил Валентинович, доктор физико-математических наук, доцент, Институт математики,экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)242228 (mihail@ic.isu.ru)

Mikhail Falaleev, doctor, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 Phone: (3952)242228 (mihail@ic.isu.ru)