Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 1. С. 70—77

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 518.517

Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений

О. А. Романова
Иркутский государственный университет

Аннотация. В заметке получены достаточные условия разрешимости системы Леонтьева. Для этого использованы теория псевдообращений линейных операторов и методы исследования вырожденных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: псевдообратный оператор; жордановы наборы; банаховы пространства; вырожденные уравнения.

1. Введение

В работе рассмотрена возможность исследования системы В.В. Леонтьева «затраты-выпуск» с помощью теории псевдообратных операторов и методов, используемых при рассмотрении вырожденных дифференциальных уравнений, развитых, в частности, в работах [1],[2].

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx}Bu(x) + Au(x) = f(x), \tag{1.1}$$

$$u(0) = 0 \tag{1.2}$$

Если в уравнении (1.1) B, A — квадратные матрицы порядка $n, \det B = 0$, $u(x), f(x) : [0, T] \to R^n$ — вектор-функции, то данная система является частным случаем системы В. В. Леонтьева «затраты-выпуск» [8] . Такая задача изучалась достаточно подробно, отметим, например, результаты, полученные в работах учеников Г.А. Свиридюка С. В. Брычева [3] и И.В. Бурлачко [4]. Подход к решению системы основан на понятии фазового пространства и теории относительно σ-ограниченных и относительно p-радиальных операторов и вырожденных аналитических и сильно непрерывных групп операторов. Методы исследования разрешимости системы вида (1.1), связанные с построением базовых матриц и понятием обратной Дразина, можно найти в работе И. В. Орловой [9].

2. Исследование разрешимости дифференциальных уравнений с нетеровым оператором при главной части

Приведем известные результаты из работы [2], обобщая их на случай, когда оператор при производной нетеров. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения (1.1)-(1.2) Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, A, B — линейные замкнутые операторы из E_1 в E_2, $\overline{D(A)} = E_1, \overline{D(B)} = E_1$, $D(B) \subseteq D(A), B$- нетеров оператор, т.е. $\overline{R(B)} = R(B)$, $\dim N(B) = n, \dim N(B^*) = m, \nu = n - m < \infty$, $f(x) : \Omega \subset R \to E_2$. — достаточно гладкая функция.

Пусть выполнено условие

I. Нетеров оператор B имеет полный A-жорданов набор [5] $\{\phi_i^{(j)}\}, i = \overline{1, l}, j = \overline{1, p_i}$, B^* имеет полный A^*-жорданов набор $\{\psi_i^{(j)}\}, i = \overline{1, l}, i = \overline{1, p_i}$, причем системы $\{\gamma_i^{(j)}\} = \{A^* \psi_i^{(p_i+1-j)}\}$, $\{z_i^{(j)}\} = \{A \phi_i^{(p_i+1-j)}\}$, $i = \overline{1, l}$, $j = \overline{1, p_i}$, $l = \min(m, n), p_i$-длины жордановых цепочек, им соответственно биортогональны.

Введем операторы

$$P_k = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \gamma_i^{(j)} \rangle \phi_i^{(j)}, Q_k = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle z_i^{(j)}, \tag{2.1}$$

где $k = p_1 + \cdots + p_l$ - корневое число функции $B - \lambda A$, которые являются проекторами соответственно в пространствах E_1, E_2.

Введем определение

Определение 1. *Если при $u \in D(A), Pu \in D(A)$ и $APu = QAu$, то говорят, что оператор A (P, Q)-коммутирует.*

Справедливо

Свойство 1. *Оператор $B^+(Q_k, P_k)$-коммутирует, где B^+ — псевдообратный оператор для оператора B [7],[6].*

Доказательство. На основании формул (2.1) получим $\forall u \in D(B^+)$

$$P_k B^+ u = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{p_i} \langle B^+ u, \gamma_i^{(j)} \rangle \phi_i^{(j)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=2}^{p_i} \langle u, B^{*+} A^* \psi_i^{(p_i+1-j)} \rangle \phi_i^{(j)} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=2}^{p_i} \langle u, \psi_i^{(j)} \rangle \phi_i^{(j)},$$

$$B^+ Q_k u = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{p_i} \langle u, \psi_i^{(j)} \rangle B^+ z_i^{(j)} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=2}^{p_i} \langle u, \psi_i^{(j)} \rangle \phi_i^{(j)}$$

Пусть оператор A (P_k, Q_k)-коммутирует, тогда существует матрица $\mathcal{A}$, такая что $A\Phi = \mathcal{A}Z$, $A^*\Psi = \mathcal{A}'\Gamma$. Эта матрица называется матрицей (P_k, Q_k) - коммутирования.

Нетрудно получить следующее свойство.

Свойство 2. *Пусть проекторы P_k, Q_k определяются по формуле (2.1), тогда операторы B и A (P_k, Q_k)-коммутируют и соответствующие матрицы (P_k, Q_k)-коммутирования являются симметричными клеточно-диагональными:*

$$\mathcal{A}_B = diag(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_l), \mathcal{A}_A = diag(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_l),$$

где

$$\mathcal{B}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 0 \end{pmatrix} -$$

диагональные матрицы порядка $p_i \times p_i, i = \overline{1, l}$.

Рассмотрим два случая

I случай, $m < n$.

Проекторы P_k, Q_k, где $l = m, P_{n-m} = \sum_{i=m+1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i^{(1)} \rangle \phi_i^{(1)}$, порождают разложения пространств E_1, E_2 на прямые суммы подпространств

$$E_1 = E_{1k} \oplus span\{\phi_{m+1}, \dots, \phi_n\} \oplus E_{1\infty-(k+n-m)},$$

$$E_2 = E_{2k} \oplus E_{2\infty-k}.$$

Решение уравнения (1.1) будем искать в виде

$$u(x) = B^+ v(x) + (C(x), \Phi) + \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i(x) \phi_i, \tag{2.2}$$

где B^+- псевдообратный оператор для B, $v(x) \in E_{2\infty-k}$,

$$C(x) = (C_1(x), \dots, C_m(x)), C_i(x) = (C_{i1}(x), \dots, C_{ip_i}(x)),$$

$$\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m), \Phi_i = (\phi_i^{(1)}, \dots, \phi_i^{(p_i)}), i = \overline{1, m},$$

$\lambda_i(x)$ - некоторые произвольные функции. Подставив выражение (2.2) для $u(x)$ в исходное уравнение и учитывая, что $BB^+ v(x) = v(x)$, получим

$$\begin{gathered} \tfrac{d}{dx} v(x) + \tfrac{d}{dx} B(C(x), \Phi) + AB^+ v(x) + A(C(x), \Phi) + \\ \textstyle\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i(x) A\phi_i = f(x). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Так как оператор $B^+ (Q_k, P_k)$ -коммутирует, то выполнены равенства

$$Q_k AB^+ (I - Q_k) = 0, \quad (I - Q_k) AB^+ Q_k = 0.$$

Следовательно, $Q_k AB^+ v = 0, \quad \forall v \in E_{2\infty - k}$. На основании свойства 2 следует, что$B\Phi = \mathcal{A}_B Z$, где $\mathcal{A}_B$— симметричная клеточно-диагональная матрица.

Поэтому

$$(I - Q_k)B\Phi = 0, \quad (I - Q_k)A\Phi = 0,$$

так как $(I - Q_k)Z = 0$.

Кроме того, выполнены равенства

$$\langle A\langle C, \Phi\rangle, \Psi\rangle = \mathcal{A}'_A C,$$

$$\langle B\langle C, \Phi\rangle, \Psi\rangle = \mathcal{A}_B C.$$

Проектируя (2.3) на подпространство $E_{2\infty - k}$ с учетом выше указанных формул, получим уравнение для определения $v(x)$

$$\frac{d}{dx} v(x) + AB^+ v(x) = (I - Q_k)(f(x) + \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i(x) A\phi_i), \tag{2.4}$$

с условием

$$v(0) = 0. \tag{2.5}$$

Спроектируем уравнение (2.3) на подпространство E_{2k}, получим систему уравнений для определения вектора $C(x)$

$$\frac{d}{dx} \mathcal{A}_B C(x) + \mathcal{A}'_A C(x) = \langle f(x), \Psi\rangle, \tag{2.6}$$

$$C(0) = 0. \tag{2.7}$$

Решение уравнения (2.4), с учетом начальных условий (2.5), будет иметь вид,

$$v(x) = \int_0^x \exp(-AB^+(x - s))(I - Q_k)(f(s) + \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i(s) A\phi_i) ds. \tag{2.8}$$

Вектор $C(x)$ будет удовлетворять рекуррентной последовательности уравнений

$$\begin{gathered} C_{ip_i}(x) = \langle f(x), \psi_i^{(1)}\rangle, \\ C_{ip_i - s}(x) = \langle f(x), \psi_i^{(s+1)}\rangle - \tfrac{d}{dx} C_{ip_i - s+1}(x), s = \overline{1, p_i - 1}, i = \overline{1, l}, \end{gathered} \tag{2.9}$$

где в силу условия (2.7) нужно потребовать, чтобы

$$\sum_{\nu=0}^{k-1} \langle f^{(\nu)}(x), \psi_i^{(k-\nu)}\rangle \mid_{x=0} = 0, \quad k = \overline{1, p_i}, \quad i = \overline{1, m} \tag{2.10}$$

Подставляя найденные $v(x)$ и $C(x)$ в выражение для $u(x)$, получим решение исходной задачи. Таким образом, справедлива теорема

Теорема 1. *Пусть $m \leq n$, выполнены условия I, (2.10), тогда решение задачи (1.1)-(1.2) представимо в виде (2.2), где $v(x)$ и $C(x)$ определяются по формулам (2.8) и (2.9) соответственно.*

II случай, $m > n$

В этом случае определены проекторы P_k, Q_k, по формулам (2.1),где $l = n$ и

$$Q_{m-n} = \sum_{i=n+1}^{m} \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle z_i,$$

и имеют место прямые разложения

$$E_1 = E_{1k} \oplus E_{1\infty-k},$$

$$E_2 = E_{2k} \oplus span\{z_{n+1}, \ldots, z_m\} \oplus E_{2\infty-(k+m-n)}$$

Решение задачи (1.1)-(1.2) ищем в следующем виде

$$u(x) = B^+ v(x) + (C(x), \Phi), \tag{2.11}$$

где

$$v(x) \in E_{2\infty-k}, C(x) = (C_1(x), \ldots, C_n(x)),$$
$$C_i(x) = (C_{i1}(x), \ldots, C_{ip_i}(x)), \Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n),$$
$$\Phi_i = (\phi_i^{(1)}, \ldots, \phi_i^{(p_i)}).$$

Подставляя $u(x)$ из (2.11) в уравнение (1.1), получим

$$\frac{d}{dx}(I - Q_{m-n})v(x) + \frac{d}{dx}B(C(x), \Phi) + AB^+v(x) + A(C(x), \Phi) = f(x).$$

При этом должно выполняться условие разрешимости

$$\langle v, \Psi_i \rangle = 0, i = \overline{n+1, m}, \Psi_i = (\psi_i^{(1)}, \ldots, \psi_i^{(p_i)}) \tag{2.12}$$

Проектируя данное уравнение соответственно на подпространства E_{2k}, E_{2m-n}, $E_{2\infty-(k+m-n)}$, получим систему уравнений для определения вектора $C(x)$:

$$\mathcal{A}_B \frac{d}{dx} C(x) + \mathcal{A}'_A C(x) = \langle f(x), \Psi \rangle$$

и систему уравнений для $v(x)$:

$$\begin{cases} Q_{m-n}AB^+v(x) = Q_{m-n}f(x) \\ (I - Q_{m-n})\frac{d}{dx}v(x) + (I - Q_{m-n})AB^+v(x) = \\ (I - Q_k - Q_{m-n})f(x), v \in E_{2\infty-k} \end{cases} \tag{2.13}$$

Решение системы (2.13) ищем из регулярного уравнения

$$\frac{d}{dx}v(x) + AB^+v(x) = (I - Q_k)f(x),$$

с условием $v(0) = 0$.

Повторяя рассуждения, аналогичные предыдущему случаю, получим

$$v(x) = \int_0^x \exp(-AB^+(x-s))(I-Q_k)f(s)ds. \tag{2.14}$$

Вектор $C(x)$ будет определяться из рекуррентной последовательности уравнений (2.9), где $l = n$. При этом, в силу условия (2.12), функция $f(x)$ должна удовлетворять равенствам

$$\langle \int_0^x \exp(-AB^+(x-s))(I-Q_k)f(s)ds, \Psi_i\rangle = 0, i = \overline{n+1, m}. \tag{2.15}$$

Следовательно, справедлива теорема

Теорема 2. *Пусть $m > n$, выполнены условия I, (2.15), (2.10), $i = \overline{1,n}$ тогда решение задачи (1.1) -(1.2) представимо в виде (2.11), где $v(x)$ и $C(x)$ определяются по формулам (2.14) и (2.9) соответственно.*

Замечание 1. Если в задаче (1.1)-(1.2) оператор B является фредгольмовым, т.е. $\dim N(B) = \dim N^*(B) = n < \infty$, $\overline{R(B)} = R(B)$, кроме того, длина A - жордановой цепи оператора B равна единице, то согласно результатам из [2] можно ввести проекторы

$$P = \sum_{i=1}^n \langle\cdot, \gamma_i\rangle\phi_i, Q = \sum_{i=1}^n \langle\cdot, \psi_i\rangle z_i, \tag{2.16}$$

и справедлива

Теорема 3. *Пусть B - фредгольмов оператор, $\langle A\phi_i, \psi_j\rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1,n}$, выполнено условие $\langle f(x), \psi_i\rangle \mid_{x=0} = 0$, тогда задача (1.1)-(1.2) имеет единственное решение вида*

$$u(x) = \Gamma v(x) + \sum_{i=1}^n C_i(x)\phi_i, \tag{2.17}$$

где $\Gamma = (B + \sum_{i=1}^n \langle\cdot, \gamma_i\rangle z_i)^{-1}$, а $v(x), C(x)$ определяются по формулам

$$v(x) = \int_0^x \exp(-A\Gamma(x-s))(I-Q)f(s)ds, C_i(x) = \langle f(x), \psi_i\rangle, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.18}$$

3. Исследование системы Леонтьева

Пусть $E_1 = E_2 = R^3$, операторы B, A задаются следующим образом [8]

$$B=\begin{pmatrix} \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & \frac{21}{200} \\ \frac{1}{100} & \frac{103}{200} & \frac{8}{25} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{5} & -\frac{11}{20} \\ -\frac{7}{25} & \frac{22}{25} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{15} & -\frac{2}{5} & \frac{13}{15} \end{pmatrix}.$$

Найдем базис в пространстве нулей матрицы B

$$\phi=[-\frac{1523}{7190},-\frac{2219}{3595},1].$$

Тогда $A\phi=[-\frac{84183}{143800},-\frac{7793}{7190},\frac{12619}{10785}]$. Из условия $(A\phi,\psi)=1$ выберем базис в пространстве нулей транспонированной матрицы B' $\psi=[0,0,\frac{10785}{12619}]$. Отметим, что длина A - жордановой цепочки матрицы B в этом случае равна единице. Согласно формуле (2.16) проекторы P,Q имеют вид $P=(\cdot,A^*\psi)\phi,\ \ Q=(\cdot,\psi)A\phi$

$$P=\begin{bmatrix} \frac{3046}{63095} & \frac{4569}{63095} & -\frac{19799}{126190} \\ \frac{8876}{63095} & \frac{13314}{63095} & -\frac{28847}{63095} \\ -\frac{2876}{12619} & -\frac{4314}{12619} & \frac{9347}{12619} \end{bmatrix}, \quad Q=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{252549}{504760} \\ 0 & 0 & -\frac{23379}{25238} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из вышеизложенной теории следует, что система(1.1) - (1.2) имеет решение вида

$$u(x)=\Gamma v(x)+C(x)\phi,$$

где

$$\Gamma=\begin{bmatrix} \frac{34460}{12619} & -\frac{5120}{12619} & \frac{128892618}{159239161} \\ -\frac{5640}{12619} & \frac{19880}{12619} & \frac{112773168}{159239161} \\ \frac{8000}{12619} & \frac{7600}{12619} & \frac{275445915}{159239161} \end{bmatrix}$$

$$v(x)=\int_0^x \exp(-A\Gamma(x-s))(I-Q)f(s)ds,$$

а $C(x)$ определяется по формуле

$$C(x)=(f(x),\psi).$$

В силу начального условия (1.2) следует, что $v(0)=0, C(0)=0$, поэтому возникает условие для функции $f(x)$:$(f(x),\psi)|_{x=0}=0$.

Построим разрешающую матрицу $\exp(-A\Gamma x)$для задачи

$$[0.37019\,\mathrm{e}^{-0.21147\,x}+0.62981\,\mathrm{e}^{-2.7160\,x}, -0.37958\,\mathrm{e}^{-2.7160\,x}+0.37958\,\mathrm{e}^{-0.21147\,x},$$

$$-0.50034\,\mathrm{e}^{-1.0\,x}-0.036506\,\mathrm{e}^{-2.7160\,x}+0.53684\,\mathrm{e}^{-0.21147\,x}]$$

$$[-0.61424\,\mathrm{e}^{-2.7160\,x}+0.61424\,\mathrm{e}^{-0.21147\,x}, 0.62981\,\mathrm{e}^{-0.21147\,x}+0.37019\,\mathrm{e}^{-2.7160\,x},$$
$$-0.92632\,\mathrm{e}^{-1.0\,x}+0.035596\,\mathrm{e}^{-2.7160\,x}+0.89069\,\mathrm{e}^{-0.21147\,x}]$$
$$[0.0, 0.0, 0.99998\,\mathrm{e}^{-1.0\,x}]$$

Список литературы

1. Сидоров, Н. А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением/ Н. А. Сидоров, О. А. Романова//Dифференц. ур-ния. – 1983. – Т.19, вып. 9. – С. 1516–1526.
2. Сидоров, Н. А. Дифференциально-разностные уравнения с фредгольмовым оператором при главной части / Н. А. Сидоров, О. А. Романова// Известия Иркутского государственного университета. – 2007. – Т.1. – С.254–266
3. Брычев, С.В. Исследование задачи Коши для вырожденных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. ... канд. физ.-мат. наук / С. В. Брычев. – Екатеринбург, 2000. – 97 с.
4. Бурлачко, И. В. Алгоритм решения задачи Коши для вырожденных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / И. В. Бурлачко, Г. А. Свиридюк // Журнал вычислительной математики и математической физики. –. 2003. –. Т. 43, вып. 11. – С. 1677–1683.
5. Вайнберг, М.М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин. – М. : Наука, 1969.
6. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988.
7. Nashed, M. Z. Jeneralized Inverses and Application/ M.Z. Nashed. – N.Y., 1976.
8. Леонтьев, В. В. Межотраслевая экономика/ В.В. Леонтьев. – М.: Экономика, 1997.
9. Орлова, И. В. Исследования и методы решения блочных алгебро-дифференциальных систем индексов 1 и 2 : дис. ... канд. физ. - мат. наук/ И. В. Орлова. – Иркутск, 2007. – 110 с.

O. A. Romanova

On some class of degenerated differential equations

Abstract. The sufficient conditions for solvability of Leontiev system are obtained. The pseudoinverse operator theory and the investigation methods of degenerated equations are used .

Keywords: pseudoinverse operator; Jordan sets; Banach spaces; degenerated equations

Романова Ольга Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики,экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)242228 (olga@baikal.ru)

Olga Romanova, docent, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 Phone: (3952)242228 (olga@baikal.ru)