Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 338—341

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.977.52

Достаточность гибридного принципа максимума *

С. П. Сорокин
Учреждение Российской академии наук
Институт динамики систем и теории управления Сибирского отделения РАН

Аннотация. Статья посвящена обращению принципа максимума Понтрягина для задач управления гибридными системами в достаточное условие оптимальности. Подход основывается на применении множества линейных функций типа Ляпунова.

Ключевые слова: достаточные условия оптимальности, обращение принципа максимума Понтрягина, функции типа Ляпунова, гибридные системы.

1. Введение и постановка задачи

В течение последних трех десятков лет в теории управления уделяется много внимания задачам оптимизации различных гибридных систем [1, 2, 3]. В данной статье для одного класса таких задач получено обращение принципа максимума Понтрягина [1, 4, 5, 6] в достаточное условие оптимальности. Это обращение основано на результатах работ [7, 8]. Оно реализуется путем сужения используемого класса функций типа Ляпунова до линейных, подобно случаю классической задачи оптимального управления [9].

Рассматривается следующая задача (P_h) оптимального управления гибридной системой с общими концевыми ограничениями на траектории подсистем:

$$\begin{gathered} \dot{x}^\kappa = f^\kappa(t, x^\kappa, u^\kappa), \quad u^\kappa(t) \in U^\kappa, \\ t \in \Delta^\kappa = [a^\kappa, b^\kappa], \quad \kappa = \overline{1, N}, \end{gathered} \tag{1.1}$$

$$q \in Q, \tag{1.2}$$

$$J = l(q) \to \inf .$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 07-01-00741) и СО РАН (интеграционный проект СО РАН–УрО РАН № 85).

Здесь моменты времени $a^\kappa \leqslant b^\kappa$, $\kappa = \overline{1,N}$ не фиксированы, интервалы Δ^κ расположены произвольно на прямой $\mathbb{R}$, размерности x^κ и u^κ равны n^κ и m^κ, $q = \{q^1, \ldots, q^N\}$ — концевой мультивектор, составленный из векторов $q^\kappa = \big(a^\kappa,\ x^\kappa(a^\kappa),\ b^\kappa,\ x^\kappa(b^\kappa)\big)$, концевых для подсистем из (1.1), множество Q замкнуто, U^κ произвольны, функция l и вектор-функции f^κ непрерывны вместе с частными производными по q^κ, x^κ, t.

Определение 1. Процессом κ-ой управляемой подсистемы назовем любую пару $\sigma^\kappa = (x^\kappa(t),\ u^\kappa(t) \mid t \in \Delta^\kappa)$ функций $u^\kappa(\cdot) \in L_\infty(\Delta^\kappa, U^\kappa)$ и $x^\kappa(\cdot) \in AC(\Delta^\kappa, \mathbb{R}^{n^\kappa})$, удовлетворяющих п. в. на Δ^κ соотношениям (1.1).

Определение 2. Набор процессов $\sigma = \{\sigma^1, \ldots, \sigma^N\}$ назовем мультипроцессом гибридной системы (1.1).

Мультипроцесс σ будем называть допустимым в задаче, если для него выполнены общие концевые ограничения (1.2). Совокупность допустимых мультипроцессов задачи (P_h) обозначим через Σ.

Будем исследовать на глобальный минимум мультипроцесс

$$\bar\sigma = \Big\{\bar\sigma^\kappa = \big(\bar x^\kappa(t),\ \bar u^\kappa(t) \mid t \in \bar\Delta^\kappa = [\bar a^\kappa, \bar b^\kappa]\big)\,,\ \kappa = 1, \ldots, N\Big\} \in \Sigma.$$

2. Достаточность принципа максимума Понтрягина

Введем функцию Понтрягина κ-ой подсистемы

$$H^\kappa(t, x, \psi, u) = \psi \cdot f^\kappa(t, x, \psi, u)$$

($y \cdot z$ означает скалярное произведение y и z) и функцию Гамильтона

$$\mathcal{H}^\kappa(t, x, \psi) = \sup\{H^\kappa(t, x, \psi, u) \mid u \in U^\kappa\}.$$

Процесс $\bar\sigma^\kappa$ назовем экстремалью κ-ой системы, если для него существует нетривиальная коэкстремаль $\psi^\kappa(\cdot) = \big(\psi^\kappa_x(\cdot),\ \psi^\kappa_t(\cdot)\big)\big|\bar\Delta^\kappa$:

$$\begin{cases} \dot\psi^\kappa_x = -H^\kappa_x(t,\ \bar x^\kappa(t),\ \psi^\kappa_x,\ \bar u^\kappa(t)), \\ \dot\psi^\kappa_t = -H^\kappa_t(t,\ \bar x^\kappa(t),\ \psi^\kappa_x,\ \bar u^\kappa(t)), \end{cases} \tag{2.1}$$

обеспечивающая выполнение условия максимума

$$\begin{aligned} &H^\kappa\,(t,\ \bar x^\kappa(t),\ \psi^\kappa_x,\ \bar u^\kappa(t)) + \psi^\kappa_t(t) = 0 \quad \text{на} \quad \bar\Delta^\kappa, \\ &H^\kappa\,(t,\ \bar x^\kappa(t),\ \psi^\kappa_x,\ u^\kappa) + \psi^\kappa_t(t) \le 0 \quad \text{на} \ \ \bar\Delta^\kappa \times U^\kappa. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Тройку функций $\gamma^\kappa = (\psi^\kappa(\cdot), \bar\sigma^\kappa)$ назовем биэкстремалью κ-ой системы.

Будем говорить, что биэкстремаль γ^κ допускает продолжение, если $\psi^\kappa(\cdot)$, $\bar\sigma^\kappa$ можно продолжить на некоторый интервал $I^\kappa \supset \bar\Delta^\kappa$ так, чтобы выполнялись условия (2.1), (2.2) с заменой в них $\bar\Delta^\kappa$ на I^κ.

Набор $\gamma = \{\gamma^1, \dots, \gamma^N\}$, составленный из биэкстремалей подсистем, назовем биэкстремалью гибридной системы; соответствующий γ набор $\psi(\cdot) = \{\psi^1(\cdot), \dots, \psi^N(\cdot)\}$ назовем коэкстремалью мультипроцесса $\bar\sigma$.

Пусть $\Psi(\bar\sigma)$ — множество продолженных коэкстремалей, соответствующих продолженной экстремали гибридной системы $\bar\sigma$, и $\Psi(\bar\sigma) \neq \emptyset$. Определим для $\psi(\cdot) \in \Psi(\bar\sigma)$ и $\bar\sigma \in \Sigma$ расширенные условия максимума:

Условие $MH(\psi)$. $\forall\, \kappa = \overline{1, N}$ почти всюду на I^κ

$$H^\kappa(t, \bar x^\kappa(t), \psi_x^\kappa(t), \bar u^\kappa(t)) + \dot\psi_x^\kappa(t)\bar x^\kappa(t) = \\ = \max\Big\{H^\kappa(t, x^\kappa(t), \psi_x^\kappa(t), u^\kappa) + \dot\psi_x^\kappa(t) x^\kappa \mid x^\kappa \in \mathbb{R}^{n^\kappa},\ u^\kappa \in U^\kappa\Big\}.$$

Условие $M\mathcal{H}(\psi)$. $\forall\, \kappa = \overline{1, N}$ почти всюду на I^κ

$$\mathcal{H}^\kappa(t, \bar x^\kappa(t), \psi_x^\kappa(t)) + \dot\psi_x^\kappa(t)\bar x^\kappa(t) = \\ = \max\Big\{\mathcal{H}^\kappa(t, x^\kappa(t), \psi_x^\kappa(t)) + \dot\psi_x^\kappa(t) x^\kappa \mid x^\kappa \in \mathbb{R}^{n^\kappa}\Big\}.$$

Пусть $\Psi_+(\bar\sigma)$ — множество всех коэкстремалей, обеспечивающих выполнение условия $MH(\psi)$ или $M\mathcal{H}(\psi)$, и $\Psi_+(\bar\sigma) \neq \emptyset$. Тогда справедлива

Теорема 1. *Пусть для мультипроцесса $\bar\sigma \in \Sigma$ существует такое множество $\Psi_+(\bar\sigma)$, что мультивектор $p^* = \bar q$ является глобальным решением конечномерной задачи*

$$\begin{cases} l(p) \to \inf; \qquad p := \big\{(a^\kappa, x_a^\kappa, b^\kappa, x_b^\kappa), \kappa = 1, \dots, N\big\} \in Q, \\ \psi_x^\kappa(b^\kappa) \cdot \big(x_b^\kappa - \bar x^\kappa(b^\kappa)\big) - \psi_x^\kappa(a^\kappa) \cdot \big(x_a^\kappa - \bar x^\kappa(a^\kappa)\big) \leqslant 0 \ \ \forall\, \kappa = 1, \dots, N, \\ \forall\, \psi \in \Psi_+(\bar\sigma). \end{cases}$$

Тогда $\bar\sigma$ — глобально оптимальный мультипроцесс в задаче (P_h).

Теорема 1 является, с одной стороны, обобщением результатов работы [9] на более сложные задачи управления, а с другой — конкретизацией достаточных условий из [7] на случай линейных функций типа Ляпунова, порожденных коэкстремалями гибридной системы.

Сформулированные достаточные условия глобальной оптимальности допускают уточнение на случай реализации сильного минимума на исследуемом процессе.

Список литературы

1. Clarke F. H. Optimal Multiprocesses / F. H. Clarke, R. B. Vinter // SIAM J. Control and Optimization. — 1989. — Vol. 27, no. 5. — P. 1072–1091.
2. Hedlund S. Optimal Control of Hybrid Systems / S. Hedlund, A. Rantzer // Proc. of the 38th IEEE Conference on Decision and Control. — Phoenix, AZ, 1999. — P. 3972–3977.

3. Impulse Differential Inclusions: A Viability Approach to Hybrid Systems / Aubin J.–P. et al. // IEEE Transactions On Automatic Control. — 2002. — Vol. 47, no. 1. — P. 2–20.
4. Ащепков Л. Т. Оптимальное управление разрывными системами / Л. Т. Ащепков. — Новосибирск: Наука, 1987. — 226 с.
5. Garavello M. Hybrid Necessary Principle / M. Garavello, B. Piccoli // SIAM J. Control and Optimization. — 2005. — Vol. 43, no. 5. — P. 1867–1887.
6. Дмитрук А.В. Принцип максимума для задач оптимального управления с промежуточными ограничениями / А. В. Дмитрук, А. М. Каганович // Нелинейная динамика и управление: Сб. науч. тр. — М.: Наука, 2008. — Т. 6. — С. 1–40.
7. Дыхта В. А. Достаточные условия оптимальности в задачах импульсного управления / В. А. Дыхта // Вестник Тамбовского ун–та. Серия: естественные и технические науки. — 2007. — Т. 12, вып. 4. — С. 443–445.
8. Дыхта В. А. Неравенство Ляпунова–Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении / В. А. Дыхта // Итоги науки и техн. Совр. матем. и ее прилож. — М.: ВИНИТИ, 2006. — Т. 110. — С. 76–108.
9. Антипина Н. В. Линейные функции Ляпунова–Кротова и достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума / Н. В. Антипина, В. А. Дыхта // Изв. вузов. Математика. — 2002. — № 12. — С. 11–21.

S. P. Sorokin

Sufficiency of Hybrid Maximum Principle

Abstract. This paper is devoted to conversion of Pontryagin maximum principle for hybrid optimal control problems into sufficient optimality condition. A feature is the using an arbitrary set of linear Lyapunov type functions.

Keywords: sufficient optimality conditions; conversion of Pontryagin maximum principle; Lyapunov type functions; hybrid systems.

Сорокин Степан Павлович, аспирант, Учреждение Российской академии наук Институт динамики систем и теории управления Сибирского отделения РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (950) 111-19-85, (sorsp@mail.ru)

Sorokin Stepan, Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontova Str., Irkutsk, 664033, post-graduate, Phone: (950) 111-19-85, (sorsp@mail.ru)