Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 320—323

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.9

Теоремы о неявном операторе в секториальных областях

Р. Ю. Леонтьев
Иркутский государственный университет

Аннотация. Рассматривается нелинейное операторное уравнение $F(x, \lambda) = 0$ с условием $F(0, 0) \equiv 0$. Оператор $F_x(0, 0)$ не является непрерывно обратимым. Строятся непрерывные решения $x(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$ в открытом множестве S линейного нормированного пространства Λ. Нуль принадлежит границе множества S.

Ключевые слова: секториальная окрестность, банахово пространство, нелинейное операторное уравнение, линейное нормированное пространство, теорема о неявном операторе.

В работе, продолжающей исследования [1], [2], рассматривается нелинейное операторное уравнение вида

$$F(x, \lambda) = 0, \tag{1.1}$$

где оператор $F : X \times \Lambda \to Y$, X, Y – банаховы пространства, Λ – линейное нормированное пространство. Предполагается, что $F(0, 0) = 0$, оператор $F(x, \lambda)$ имеет частную производную Фреше по первому аргументу $F_x(x, \lambda)$, а линейный оператор $F_x(0, \lambda)$ имеет ограниченный обратный оператор $F_x^{-1}(0, \lambda)$ при $\lambda \in S$, где S – открытое множество в Λ, границе которого принадлежит точка $\lambda = 0$. В дальнейшем любое подобное множество будем называть секториальной окрестностью нуля. Более того, будем считать, что оценка для оператора $F_x^{-1}(0, \lambda)$ известна и имеет следующий вид:

$$\|F_x^{-1}(0, \lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \text{ при } S \ni \lambda \to 0, \tag{1.2}$$

где функционал $a(\lambda) \to +0$ при $\lambda \to 0$.

Существование ограниченного обратного оператора для $F_x(0, \lambda)$ при $\lambda \in S$ и оценка (1.2) являются основной особенностью уравнений, которые мы рассматриваем. Очевидно, что оператор $F_x^{-1}(0, \lambda)$ не является ограниченным при $\lambda = 0$, но является ограниченным, при любом, сколь угодно малом, фиксированном значении параметра $\lambda \in S$. Цель этой заметки – изучение поведения решений уравнений вида (1.1) в секториальной окрестности нуля $S \subset \Lambda$, а именно, получение достаточных условий существования и единственности решения $x(\lambda) \to 0$ при $S \ni \lambda \to 0$ в области Ω, описанной ниже формулой (1.3).

Один из фундаментальных результатов в исследовании уравнений вида (1.1) – это теорема о неявном операторе. Однако, в нашем случае данная теорема неприменима, поскольку, согласно её условиям, должен быть непрерывно обратим оператор $F_x(0,0)$.

Доказанные здесь теоремы дают достаточные условия существования и единственности в области Ω малого решения уравнения (1.1) $x(\lambda) \to 0$ при $S \ni \lambda \to 0$, а предложенный способ построения этого решения методом последовательных приближений работает при любом начальном приближении из окрестности нуля.

Введем множество:

$$\Omega = \{(x,\lambda) \in X \times \Lambda,\ \|x\| \le a(\lambda)r,\ \lambda \in S\}, \tag{1.3}$$

где константа $r > 0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия: 1) оператор $F(x,\lambda)$ и его производная Фреше $F_x(x,\lambda)$ непрерывны на Ω; 2) линейный оператор $F_x(0,\lambda)$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S$ и выполнена оценка (1.2); 3) имеет место оценка $\|F_x(x,\lambda) - F_x(0,\lambda)\| \le L(\lambda)\|x\|$ при $\lambda \in S$, причем $L(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$; 4) $\exists$ элемент $V_0 \in X$ такой, что линейное уравнение*

$$F_x(0,\lambda)x = F(a(\lambda)V_0,\lambda) \tag{1.4}$$

имеет решение $x^*(\lambda)$, и выполнена оценка $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \to 0$. Тогда $\exists$ секториальная окрестность нуля $S_0 \subset S$ такая, что при $\forall \lambda \in S_0$ в шаре $\|x - a(\lambda)V_0\| \le a(\lambda)\rho$ существует единственное решение уравнения (1.1) вида $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$, где $V(\lambda) \to V_0$ при $S_0 \ni \lambda \to 0$.

Доказательство. С помощью замены $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$ и эквивалентных преобразований уравнение (1.1) сводится к уравнению вида:

$$V = V - \frac{1}{a(\lambda)} F_x^{-1}(0,\lambda)F(a(\lambda)V,\lambda). \tag{1.5}$$

Оператор, стоящий в правой части уравнения (1.5), обозначим $\Phi(V,\lambda)$. Тогда уравнение (1.5) перепишется в виде:

$$V = \Phi(V,\lambda). \tag{1.6}$$

Далее на основании принципа сжимающих отображений легко показать, что $\exists$ секториальная окрестность нуля $S_0 \subset S$, такая что при

$\forall\lambda \in S_0$ и для некоторой фиксированной константы $0 < \rho < r$ в шаре $\|V - V_0\| \le \rho$ уравнение (1.6) имеет единственную неподвижную точку, то есть существует единственное решение уравнения (1.6), которое можно строить методом последовательных приближений при любом начальном приближении из шара $\|V - V_0\| \le \rho$. Но тогда и искомое уравнение (1.1) при $\forall\lambda \in S_0$ имеет в шаре $\|x - a(\lambda)V_0\| \le a(\lambda)\rho$ единственное решение вида $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$, где $V(\lambda) \to V_0$ при $S_0 \ni \lambda \to 0$. □

Далее будем полагать, что оператор $F(x, \lambda)$ имеет следующий вид:

$$F(x, \lambda) = B(\lambda)x + R(x, \lambda) + b(\lambda), \tag{1.7}$$

где $B(\lambda)$ – линейный оператор, зависящий от параметра λ. Нелинейный оператор $R : X \times \Lambda \to Y$ предполагается непрерывным по x и λ и непрерывно дифференцируемым по x в смысле Фреше в окрестности нуля. Функция $b(\lambda) : \Lambda \to Y$ непрерывна по λ. Линейный оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S$, причем справедлива оценка

$$\|B^{-1}(\lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \text{ при } S \ni \lambda \to 0. \tag{1.8}$$

Так же будем полагать, что имеет место представление $B(\lambda) = B + a(\lambda)A + \omega(\lambda)$, где $\omega(\lambda) = o(a(\lambda))$ при $\lambda \to 0$, B, A – замкнутые операторы, не зависящие от λ, с плотными областями определения в X и со значениями в Y.

Следующая лемма дает достаточные условия для выполнения условия 4) теоремы 1.

Лемма 1. *Пусть для оператора (1.7) в области Ω выполнены условия: 1) $b(\lambda) = a^2(\lambda)b_2 + \xi(\lambda)$, где $\|\xi(\lambda)\| = o(a^2(\lambda))$ при $\lambda \to 0$; 2) оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S$, для которого выполнена оценка (1.8); 3) уравнение $Bx = b_2 + A(\bar{c}, \bar{\varphi})$ имеет решение x_0, где $\bar{\varphi} \in N(B)$, $\bar{c}$ – постоянный вектор; 4) $\|R(a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}), \lambda)\| = o(a^2(\lambda))$ при $S \ni \lambda \to 0$; 5) $R(0, 0) = 0$, $R_x(0, \lambda) = 0$, $b(0) = 0$. Тогда уравнение (1.4) имеет требуемое решение при $V_0 = (\bar{c}, \bar{\varphi})$.*

Доказательство. Для доказательства мы подставляем $V_0 = (\bar{c}, \bar{\varphi})$ в уравнение (1.4) и с учетом представления (1.7) получаем уравнение:

$$B(\lambda)x = B(\lambda)a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}) + R(a(\lambda)(\bar{c}, \bar{\varphi}), \lambda) + b(\lambda), \tag{1.9}$$

для которого выписываем решение в явном виде. Далее, используя условия леммы, показываем, что для выписанного решения справедлива оценка $\|x\| = o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \to 0$. □

Тогда на основании теоремы 1 и леммы 1 в случае оператора $F(x, \lambda)$ вида (1.7) получаем следующий результат:

Теорема 2. *Пусть для оператора вида (1.7) в области Ω выполнены условия: 1) оператор $R(x,\lambda)$ и его производная Фреше $R_x(x,\lambda)$ непрерывны в области Ω; 2) оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S$, и выполнена оценка (1.8); 3) $\|R_x(x,\lambda)\| \leq L(\lambda)\|x\|$, где $L(\lambda) \to 0$ при $S \ni \lambda \to 0$; 4) $b(\lambda) = a^2(\lambda)b_2 + \xi(\lambda)$, где $\|\xi(\lambda)\| = o(a^2(\lambda))$ при $\lambda \to 0$; 5) уравнение $Bx = b_2 + A(\bar{c},\bar{\varphi})$ имеет решение x_0, где $\bar{\varphi} \in N(B)$, $\bar{c}$ – постоянный вектор; 6) $\|R(a(\lambda)(\bar{c},\bar{\varphi}),\lambda)\| = o(a^2(\lambda))$ при $S \ni \lambda \to 0$; 7) $R(0,0) = 0$, $R_x(0,\lambda) = 0$, $b(0) = 0$. Тогда $\exists$ секториальная окрестность нуля $S_0 \subset S$ такая, что $\forall \lambda \in S_0$ в шаре $\|x - a(\lambda)(\bar{c},\bar{\varphi})\| \leq a(\lambda)\rho$ существует единственное решение соответствующего уравнения (1.1) вида $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$, где $V(\lambda) \to (\bar{c},\bar{\varphi})$ при $S_0 \ni \lambda \to 0$.*

Доказательство теоремы 2 так же использует применение принципа сжимающих отображений.

Список литературы

1. Сидоров Н. А. Минимальные ветви решений нелинейных уравнений и асимптотические регуляризаторы / Н. А. Сидоров // Нелинейные граничные задачи. — Донецк: 2004. — Вып. 14. — С. 161–164.
2. Леонтьев Р. Ю. Теоремы о неявном операторе в секториальных квазиокрестностях и минимальные ветви решений нелинейных уравнений / Р. Ю. Леонтьев // Вестник Южно-Уральского государственного университета. — Челябинск: 2008. — Вып. 1. № 15 (115). — С. 37–41.

R. Yu. Leontyev

Implicit function theorem in sectorial quasi-neighborhoods

Abstract. We consider nonlinear operation equation $F(x,\lambda) = 0$ with condition $F(0,0) \equiv 0$. Operator $F_x(0,0)$ is not continuously invertible. We construct continuous solutions $x(\lambda) \to 0$ as $\lambda \to 0$ in open set S of linear normalized space Λ. Zero belongs to frontier of set S.

Keywords: Banach space, implicit function theorem, sectorial quasi-neighborhoods, nonlinear operator equation, linear normalized space.

Леонтьев Роман Юрьевич, аспирант кафедры математического анализа, Институт математики,экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, (lev_roma@bk.ru)

Leontyev Roman, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003, postgraduat student, (lev_roma@bk.ru)