Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 299—303

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.977

Задачи на максимум нормы конечного состояния в линейной и билинейной системах *

Н. С. Ахмеджанова
Иркутский государственный университет

Аннотация. Рассматривается проблема поиска и улучшения экстремальных точек в задаче на максимум неполной нормы конечного состояния в линейной и билинейной системах управления. Все построения проводятся относительно проекции множества достижимости. Вспомогательные задачи решаются на основе принципа максимума.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача на максимум неполной нормы, линейная и билинейная системы.

Введение

В рамках разрабатываемого в [1] подхода к поиску и улучшению экстремальных точек рассматривается задача на максимум неполной нормы (по части фазовых координат) применительно к стандартной линейной и специальной билинейной управляемым системам. Все построения проводятся относительно проекции множества достижимости на соответствующее подпространство. Показывается, что для билинейной системы вспомогательная задача с помощью принципа максимума решается элементарно, что открывает возможность эффективной реализации технологии поиска экстремальных точек.

1. Первая задача

Рассмотрим на промежутке времени $T = [t_0, t_1]$ линейную фазовую систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad x(t_0) = x^0, \quad A \in R^{n\times n}, \quad b \in R^n \tag{1.1}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 08-01-00709.

в классе допустимых управлений

$$V = \{u \in L_\infty(T) : |u(t)| \le 1, t \in T\}. \qquad (1.2)$$

Поставим задачу на максимум неполной (по части фазовых координат) евклидовой нормы вектора конечного состояния системы (1.1)

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} x_i^2(t_1) \to \max, \quad m \le n. \qquad (1.3)$$

Подобная формулировка характерна, например, для задач о максимальном отклонении от программного движения вследствие возмущений [2].

Пусть $x(t,u), t \in T$ – траектория системы (1.1), соответствующая управлению $u \in V$. Согласно функционалу (1.3) введем множество достижимости системы (1.1) в момент времени t_1 относительно первых m координат терминального вектора

$$D = \{x \in R^m : x_i = x_i(t_1,u), \quad i = \overline{1,m}, \quad u \in V\}.$$

Как известно, D – выпуклое компактное множество (это проекция полного множества достижимости на пространство R^m).

Задача (1.1)–(1.3) в конечномерной интерпретации представляется в виде

$$\frac{1}{2}\langle x, x\rangle \to \max, \quad x \in D. \qquad (1.4)$$

В связи с условием локального максимума в задаче (1.4) введем линейную вспомогательную задачу с вектором $y \ne 0$

$$\langle y, x\rangle \to \max, \quad x \in D, \qquad (1.5)$$

решение которой проводится на основе принципа максимума элементарно. Пусть $\psi(t,y), t \in T$ – траектория сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^T\psi, \quad \psi_i(t_1) = \begin{cases} y_i, & i = \overline{1,m}, \\ 0, & i = \overline{m+1,n}. \end{cases}$$

Оптимальное управление задачи (1.5) выражается по формуле

$$u(t,y) = sign\langle\psi(t,y), b\rangle, \quad t \in T.$$

Предположим, что в системе (1.1) выполнено условие управляемости: векторы $b, Ab, \ldots A^{n-1}b$ линейно независимы. Тогда управление $u(t,y)$, $t \in T$ определяется однозначно и порождает единственное решение $x(y)$ задачи (1.5) $\forall y \ne 0$. Этот факт единственности, в свою очередь, гарантирует строгую выпуклость множества D.

Введем множество экстремальных точек в задаче (1.4)

$$Ext(1.4) = \{y \neq 0 : y = x(y)\}$$

и дифференцируемую функцию максимума $g(y) = \max_{x \in D} \langle y, x - y \rangle$, $y \in R^m$.

Сформулируем достаточное условие оптимальности экстремальных точек в задаче (1.4). Пусть $z \in Ext(1.4)$, $\quad S(z) = \{x \in R^m : \|x\| = \|z\|\}$.

Утверждение 1. *[3], [1] Для оптимальности точки $z \in Ext(1.4)$ в задаче (1.4) достаточно, чтобы $g(y) = 0 \quad \forall y \in D \bigcap S(z)$.*

Дальнейшая технология поиска и улучшения экстремальных точек вполне соответствует схеме из [1] и включает две итерационные процедуры:
1) минимизация функции $g(y)$ на границе D –
$y^0 \in D, \quad y^{k+1} = x(y^k), \quad k = 0, 1, ... \Rightarrow g(y^k) \to 0, k \to \infty;$
2) максимизация функции $g(y)$ на экстремальной сфере $S(z)$, $z \in Ext(1.4)$ $z^0 = -z, \quad z^{k+1} = \frac{\|z^k\|}{\|x(z^k)\|} x(z^k), \quad k = 0, 1, ... \Rightarrow g(z^{k+1}) > g(z^k)$.

2. Вторая задача

Рассмотрим задачу оптимизации (1.3) на множестве допустимых управлений (1.2) относительно специальной билинейной системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)\langle c, x(t) \rangle, \quad x(t_0) = x^0, \quad c \in R^n. \tag{2.1}$$

Системы указанного типа описывают математические модели целого ряда процессов в биологии, экономике, медицине, энергетике, являются объектом исследования в теории автоматического управления (библиографию см. в [4]).

Введем следующие ограничения на параметры системы (условия адекватности модели)

$$a_{ij} \geq |b_i| c_j, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j, \quad x^0 \geq 0, \quad c \geq 0, \quad \langle c, x^0 \rangle > 0. \tag{2.2}$$

Как известно, [4], в этих условиях все фазовые траектории системы (2.1) неотрицательны: $x(t, u) \geq 0, t \in T, u \in V$, причем

$$\langle c, x(t, u) \rangle > 0. \tag{2.3}$$

Введем, как и ранее, множество достижимости D системы (2.1) по первым m координатам фазового вектора $x(t, u)$ и сформулируем его базовое свойство.

Утверждение 2. *[4] В ограничениях (2.2) при условии линейной независимости векторов $b, Ab, \ldots, A^{n-1}b$ множество D является строго выпуклым компактом.*

Введем задачи (1.4), (1.5). Эффективность рассматриваемого подхода непосредственно связана с возможностью «элементарного» решения билинейной задачи (1.5). Исследуем эту задачу с помощью принципа максимума. В данном случае:
функция Понтрягина – $H = \langle \psi, Ax\rangle + u\langle b, \psi\rangle\langle c, x\rangle$,
H-максимизирующее управление – $u^*(\psi, x) = sign\langle b, \psi\rangle\langle c, x\rangle$,
сопряженная система –

$$\dot{\psi} = -A^T\psi - cu\langle b, \psi\rangle, \quad \psi_i(t_1) = \begin{cases} y_i, & i = \overline{1, m}, \\ 0, & i = \overline{m+1, n}. \end{cases}$$

Принцип максимума для управления $v \in V$ представляется в виде

$$v(t) = u^*(\psi(t, v), x(t, v)), \quad t \in T.$$

В силу условия положительности (2.3) имеем

$$v(t) = u^*(\psi(t, v), x(t, u)), \quad t \in T, u \in V.$$

Это соотношение (т.е. принцип максимума) является достаточным условием оптимальности для управления $v(t)$ в билинейной задаче (1.5) [5].

Таким образом, решение задачи (1.5) проводится по следующей схеме:
1) сформируем максимизирующее управление $u^*(\psi) = sign\langle b, \psi\rangle$,
2) найдем решение $\psi(t, y)$ сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^T\psi - c|\langle b, \psi\rangle|, \quad \psi_i(t_1) = \begin{cases} y_i, & i = \overline{1, m}, \\ 0, & i = \overline{m+1, n}, \end{cases}$$

3) выделим оптимальное управление $u(t, y) = u^*(\psi(t, y)), t \in T$ и найдем соответствующее решение $x(t, y)$ фазовой системы.

В результате, вектор $x(t, y) = (x_1(t_1, y), \ldots, x_m(t_1, y))$ является единственным решением задачи (1.5).

Дальнейшая методика анализа экстремальных точек исходной задачи (1.4) проводится в полной аналогии с предыдущим (раздел 1).

Список литературы

1. Антоник В. Г. Метод нелокального улучшения экстремальных управлений в задаче на максимум нормы конечного состояния / В. Г. Антоник, В. А. Срочко // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2009. — Т. 49, № 5. — С. 734–747.

2. Александров В. В. Оптимальное управление движением / В. В. Александров, В. Г. Болтянский, С. С. Лемак и др. — М.: Физматлит, 2005. — 120 с.
3. Стрекаловский А. С. Элементы невыпуклой оптимизации / А. С. Стрекаловский. — Новосибирск: Наука, 2003. — 356 с.
4. Хайлов Е. Н. Об экстремальных управлениях однородной билинейной системы, управляемой в положительном ортанте / Е. Н. Хайлов // Труды математического института РАН. — 1998. — Т. 220. — С. 217–235.
5. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления / В. А. Срочко. — М.: Физматлит, 2000. — 160 с.

N. S. Akhmedzhanova

Problems of terminal norm maximization in linear and bilinear systems

Abstract. This paper contains the review of the problem of searching and improving extreme points in incomplete terminal norm maximization for linear and bilinear control systems. All constructions are made concerning the reachable set's projection. Auxiliary problems are solved via the maximum principle.

Keywords: optimal control, incomplete terminal norm maximization, linear and bilinear systems.

Ахмеджанова Надежда Сергеевна, аспирант кафедры ВМиМ, Институт математики,экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1
тел.: (3952) 24-22-10, (eynar@pochta.ru)

Akhmedzhanova Nadezhda, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 postgraduate, Phone: (3952) 24-22-10, (eynar@pochta.ru)