Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 83—93

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 518.517

Метод слабого улучшения первого порядка для задач оптимального управления логико-динамическими системами *

В. А. Батурин
Институт динамики систем и теории управления

Н. С. Малтугуева
Институт динамики систем и теории управления

Аннотация. В статье рассматривается задача оптимального управления логико-динамическими системами. Для поставленной задачи получен алгоритм слабого улучшения первого порядка, доказана теорема о неулучшаемом элементе.

Ключевые слова: оптимальное управление, логико-динамические системы, достаточные условия оптимальности.

1. Введение

Логико-динамические системы представляют собой особый класс дискретно-непрерывных по времени управляемых систем. В этих системах дискретная компонента это целочисленная функция, имеющая конечное число точек разрыва. Таким образом, задачи оптимального управления логико-динамическими системами имеют ряд существенных отличий от обычных задач оптимального управления. Во-первых, в правых частях дифференциальных уравнений и функционале имеются целочисленные переменные, во-вторых, дискретные переменные могут изменять свое значение в конечном числе точек по времени, и это число может быть зафиксировано.

В данной статье выводится метод слабого улучшения первого порядка для решения задач оптимального управления логико-динамическими системами. Построение этого метода ведется на основе достаточных условий оптимальности [1], [2], аналогичных условиям оптимальности

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 08–01–00156а.

В.Ф. Кротова для классических задач оптимального управления [3], [4]. У полученного алгоритма исследовано свойство релаксационности.

Во втором и третьем разделах данной работы приведена постановка задачи оптимального управления логико-динамическими системами и достаточные условия оптимальности. Метод слабого улучшения первого порядка выводится в четвертом разделе, а теорема о неулучшаемом элементе рассматривается в пятом разделе статьи. Далее приведен модифицированный алгоритм и пример, иллюстрирующий работу этого алгоритма.

2. Постановка задачи

Рассмотрим фиксированный отрезок времени $T = [t_0, t_1]$. На T заданы кусочно непрерывная функция $u(t)$, непрерывная и кусочно дифференцируемая функция $x(t)$, целочисленная кусочно постоянная и непрерывная справа функция $y(t)$ с конечным числом точек разрыва. Будем считать, что в данный момент времени $y(t)$ имеет только один скачок. Функции подчиняются следующей динамической системе

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), y(t), u(t)), \tag{2.1}$$

$$y(t) \in Y(t, x(t), y(t-0)), \tag{2.2}$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \tag{2.3}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0 - 0) = y_0, \tag{2.4}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \Omega \subset \mathbb{Z}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $y_0 \in \Omega$. Здесь множество Ω – конечное множество состояний логической части системы, $Y : T \times R^n \times \Omega \to 2^\Omega$ – соотношение описывающее логику перехода дискретной компоненты, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ – компактное множество, функция f кусочно непрерывна по t, непрерывна по x и u вместе с частными производными для каждого $y \in \Omega$. Процесс $(x(t), y(t), u(t))$ называется допустимым, если он удовлетворяет условиям (2.1)–(2.4), множество таких процессов назовем множеством допустимых и обозначим через D, предполагается, что $D \neq \emptyset$. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$I(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)) = F(x(t_1), y(t_1)) + \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), y(t), u(t))dt +$$

$$+ \sum_\tau g^0(\tau, x(\tau), y(\tau), y(\tau - 0)) \to \min, \tag{2.5}$$

при ограничениях (2.1)–(2.4). Здесь $F : R^n \times \Omega \to R$ непрерывна по x, $f^0 : T \times R^n \times \Omega \times R^m \to R$ кусочно непрерывна по t, непрерывна по x и u, g^0 – ограничена, τ пробегает по множеству точек переключения.

3. Достаточные условия оптимальности

Пусть Φ – класс функций $\varphi(t,x,y)$ непрерывных в (t,x) вместе со своими частными производными по t и x. Введем следующие конструкции:

$$R(t,x,y,u) = \varphi'_x(t,x,y)f(t,x,y,u) - f^0(t,x,y,u) + \varphi_t(t,x,y),$$

$$G(x,z) = F(x,z) + \varphi(t_1,x,z) - \varphi(t_0,x_0,y_0),$$

$$Q(t,x,y,\nu) = \varphi(t,x,y) - \varphi(t-0,x,\nu) - g^0(t,x,y,\nu),$$

$$\mu(t) = \sup_x \max_{\nu\in Y_-} \max_{y\in M(t,x,\nu)} \max_{u\in U} R(t,x,y,u),$$

$$q(t) = \sup_x \max_{\nu\in Y_-} \max_{y\in Y(t,x,\nu)} Q(t,x,y,\nu),$$

$$m = \inf_x \min_{z\in Y_{f-}} G(x,z),$$

где $M(t,x,\nu) = \left\{ y : y = \arg\max\limits_{y\in Y(t,x,\nu)} Q(t,x,y,\nu) \right\}$; $Y_- = Y(\tau,x(\tau),y(\tau-0))$; τ это точка разрыва функции $y(\cdot)$; $Y_{f-} = Y(t_1,x(t_1),y(t_1-0))$; $\mu(\cdot)$ – кусочно непрерывная, а $q(\cdot)$ – кусочно постоянная функция на отрезке T; $z = y(t_1)$, $y = y(t)$, $\nu = y(t-0)$, $t\in[t_0,t_1]$.

Рассмотрим функционал Лагранжа

$$L(x(\cdot),y(\cdot),u(\cdot)) = G(x(t_1),y(t_1)) - \int_{t_0}^{t_1} R(t,x(t),y(t),u(t))dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} Q(t,x(t),y(t),y(t-0))d\theta(t), \tag{3.1}$$

где $\theta(t)$ – монотонная функция скачков в конечном числе точек разрыва функции $y(t)$. В каждой точке τ величина скачка равна 1: $\theta(\xi) = \theta(\xi-0)+1$. Заметим, что на множестве допустимых выполняется равенство $I = L$.

Теорема 1. *Пусть имеется последовательность* $\{(x_s,y_s,u_s)\}\subset D$ *и функция* $\varphi(t,x,y)$ *такие, что:*

1. $\int_{t_0}^{t_1} (R(t,x_s(t),y_s(t),u_s) - \mu(t))\,dt \to 0,$

2. $\int_{t_0}^{t_1} Q(t,x_s(t),y_s(t),y_s(t-0))d\theta(t) - \int_{t_0}^{t_1} q(t)dt \to 0;$

3. $G(x_s(t_1),y_s(t_1)) \to m,$ *при* $s\to\infty$.

Тогда последовательность $\{(x_s, y_s, u_s)\}$ *– минимизирующая, и всякая минимизирующая последовательность удовлетворяет условиям 1-3.*

Следствие 1. *Пусть* $(x^*(t), y^*(t), u^*(t)) \in D$. *Если существует функция* $\varphi(t,x,y) \in \Phi$ *такая, что:*

1. $R(t, x^*(t), y^*(t), u^*(t)) = \mu(t)$ *для всех* $t \in [t_0, t_1]$;
2. $Q(t, x^*(t), y^*(t), y^*(t-0)) = q(t)$ *для всех* $t \in [t_0, t_1]$;
3. $G(x^*(t_1), y^*(t_1)) = m$;

тогда процесс $(x^*(t), y^*(t), u^*(t))$ *доставляет минимум функционалу* I *на* D.

4. Метод слабого улучшения первого порядка

Относительно постановки задачи сделаем предположение, что $U = \mathbb{R}^m$. Пусть $v^I = (x^I(t), y^I(t), u^I(t))$ – заданный допустимый процесс, $v = (x(t), y(t), u(t))$ – процесс, который совпадает с v^I на временном подинтервале $[t_0, \xi]$, $\xi \in [t_0, t_1)$.

Пусть

$$L^{\xi,t_1}(x(\cdot)), y(\cdot), u(\cdot) = G(x(t_1), y(t_1)) - \int_{\xi}^{t_1} R(t, x(t), y(t), u(t))dt-$$

$$-\int_{\xi}^{t_1} Q(t, x(t), y(t), y(t-0))d\theta(t),$$

$$H(t,x,y,p,u) = p'f(t,x,y,u) - f^0(t,x,y,u), \quad p \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим разложение функций $G(x(t_1), y(t_1))$, $Q(t, x(t), y^I(t), y(t-0))$ в ряд Тейлора по x, а функции $R(t, x(t), y(t), u(t))$ по x и u до слагаемых первого порядка:

$$G(x(t_1), y(t_1)) = G(x^I(t_1), y(t_1)) + G_x(x^I(t_1), y(t_1))'\Delta x + o_1(|\Delta x|), \quad (4.1)$$

$$Q(t, x(t), y(t), y^I(t-0)) = Q(t, x^I(t), y(t), y(t-0))+$$
$$+Q_x(t, x^I(t), y(t), y(t-0))'\Delta x + o_2(|\Delta x|), \quad (4.2)$$

$$R(t, x(t), y(t), u^I(t)) = R(t, x^I(t), y(t), u^I(t))+$$
$$+R_x(t, x^I(t), y(t), u^I(t))'\Delta x + R_u(t, x^I(t), y(t), u^I(t))'\Delta u + o_3(|\Delta x, \Delta u|) \quad (4.3)$$

Потребуем, чтобы выражения (4.1)–(4.3) не зависели от Δx, т.е.

$$G_x(x^I(t_1), y(t_1)) = 0, \; Q_x(t, x^I(t), y(t), y(t-0)) = 0,$$

$$R_x(t, x^I(t), y(t), u^I(t)) = 0,$$

получим

$$H_x(t, x^I(t), y(t), p, u^I(t)) + \varphi_{tx}(t, x^I(t), y(t)) = 0, \tag{4.4}$$

$$F_x(x^I(t_1), y(t_1)) + \varphi_x(t_1, x^I(t_1), y(t_1)) = 0, \tag{4.5}$$

$$\varphi_x(t, x^I(t), y(t)) - \varphi_x(t-0, x^I(t), y(t-0)) - g^0_x(t, x^I(t), y(t), y(t-0)) = 0, \tag{4.6}$$

где $p = \varphi_x(t, x^I(t), y(t))$.

Функцию $\varphi(t, x, y)$ будем искать в классе линейных, т.е. $\varphi(t, x, y) = \psi'(t, y)(x - x^I(t))$, где $\psi(t, y)$ – вектор-функция размерности n, кусочно дифференцируемая по t. Тогда соотношения (4.4)–(4.6) примут вид

$$\psi_t(t, y(t)) = -H_x(t, x^I(t), y(t), \psi(t, y(t)), u^I(t)), \tag{4.7}$$

$$\psi(t_1, y(t_1)) = -F_x(x^I(t_1), y(t_1)), \tag{4.8}$$

$$\psi(t, y(t)) - \psi(t-0, y(t-0)) = g^0_x(t, x^I(t), y(t), y(t-0)). \tag{4.9}$$

Заметим, что $R_u(t, x, y, u) = H_u(t, x, y, \psi(t, y), u)$, тогда пусть

$$\tilde{u}(t, y(t)) = u^I(t) + \alpha\Delta u, \text{ где } \Delta u = H_u(t, x^I(t), y(t), \psi(t, y(t)), u^I(t)). \tag{4.10}$$

Для определения нового состояния логической части системы на $[\xi, t_1]$ решим задачу:

$$\tilde{y}(t, x(t)) = \arg \max_{y \in Y(t, x(t), y(t-0))} R(t, x(t), y(t), \tilde{u}(t)). \tag{4.11}$$

Причем, в точках разрыва максимум функции $R(t, x(t), y(t), \tilde{u}(t))$ ищется при дополнительном условии:

$$Q(t, x(t), \tilde{y}(t, x(t)), \tilde{y}(t-0, x(t-0))) \geq Q(t, x(t), y^I(t), y^I(t-0)), \tag{4.12}$$

А в точке t_1 требуется выполнение неравенства:

$$G(x(t_1), \tilde{y}(t_1, x(t_1))) \leq G(x(t_1), y^I(t_1)). \tag{4.13}$$

Итак, сформулируем полученный алгоритм.

Алгоритм 1. 1. Задаются $u^I(t), y^I(t)$ и из системы (2.1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ находится $x^I(t)$. Тогда $v^I(t) = (x^I(t), y^I(t), u^I(t))$.

2. На интервале $[\xi, t_1]$ для всех y интегрируется система (4.7)–(4.9), где $\xi \in [t_0, t_1]$.
3. Задается $\tilde{u}(t, y(t))$ по формуле (4.10), $t \in [\xi, t_1]$
4. Функция $\tilde{y}(t, x(t))$ ищется из решения задачи (4.11)–(4.13), тогда пусть $\tilde{u}(t, x(t)) = \tilde{u}(t, \tilde{y}(t, x(t)))$.

5. Интегрируется система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), \tilde{y}(t, x(t)), \tilde{u}(t, x(t)), \quad x(\xi) = x^I(\xi - 0), \quad t \in [\xi, t_1].$$

6. Параметр α ищется из решения задачи минимизации функционала $I(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{u}(t))$, при $t \in [\xi, t_1]$.
7. Новый процесс $v^{II}(t) = (x^{II}(t), y^{II}(t), u^{II}(t))$ задается как

$$x^{II}(t) = \begin{cases} x^I(t), & t \in [t_0, \xi), \\ \tilde{x}(t), & t \in [\xi, t_1], \end{cases} \qquad y^{II}(t) = \begin{cases} y^I(t), & t \in [t_0, \xi), \\ \tilde{y}(t, \tilde{x}(t)), & t \in [\xi, t_1], \end{cases}$$

$$u^{II}(t) = \begin{cases} u^I(t), & t \in [t_0, \xi), \\ \tilde{u}(t, \tilde{x}(t)), & t \in [\xi, t_1]. \end{cases}$$

8. Начальный процесс задается как $v^I(t) = v^{II}(t)$ и процедура повторяется со второго шага.

5. Теорема о релаксационности

Для алгоритма первого порядка неулучшаемым процессом является процесс, удовлетворяющий условию стационарности, т.е. процесс $(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t))$ неулучшаемый, если $H_u(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \psi(t, \bar{y}(t)), \bar{u}(t)) = 0$.

Для алгоритма слабого улучшения доказана теорема о неулучшаемом элементе.

Теорема 2. *Пусть $v^I(t) = (x^I(t), y^I(t), u^I(t))$ – допустимый управляемый процесс, $F(x, y)$ – непрерывна и дифференцируема по x, функция $H(t, x, y, p, u)$ – непрерывна и непрерывно-дифференцируема по x и не выполняется условие стационарности, тогда алгоритм определяет новый допустимый процесс $v^{II}(t) = (x^{II}(t), y^{II}(t), u^{II}(t))$ такой, что $I(v^{II}) < I(v^I)$.*

Доказательство. Если условие стационарности не выполняется, то алгоритм всегда определяет новый допустимый процесс $v^{II}(t) = (x^{II}(t), y^{II}(t), u^{II}(t))$. Докажем неравенство $I(v^{II}) < I(v^I)$.

Рассмотрим приращение функционала (2.5). Учитывая, что на D функционалы I и D равны, приращение имеет вид:

$$\Delta I(x(t), y(t), u(t)) = I(x^{II}(t), y^{II}(t), u^{II}(t)) - I(x^I(t), y^I(t), u^I(t)) =$$
$$= L(x^{II}(t), y^{II}(t), u^{II}(t)) - L(x^I(t), y^I(t), u^I(t)) =$$
$$G(x^{II}(t_1), y^{II}(t_1)) - G(x^I(t_1), y^I(t_1)) -$$
$$-\int_{\xi}^{t_1} \Big[R(t, x^{II}(t), y^{II}(t), u^{II}(t)) - R(t, x^I(t), y^I(t), u^I(t)) \Big] dt -$$

$$-\int\limits_{\xi}^{t_1}\Big[Q(t,x^{II}(t),y^{II}(t),y^{II}(t-0))-Q(t,x^{I}(t),y^{I}(t),y^{I}(t-0))\Big]\,d\theta(t).$$

На отрезке $[\xi, t_1]$ функция $y^{II}(t)$ ищется из решения задачи (4.11), а значит, имеет место неравенство: $R(t,x^{II}(t),y^{II}(t),u^{II}(t)) \geq R(t,x^{II}(t), y^{I}(t),u^{II}(t))$, тогда

$$\Delta I(x(t),y(t),u(t)) \leq G(x^{II}(t_1),y^{II}(t_1))-G(x^{I}(t_1),y^{I}(t_1))-$$
$$-\int\limits_{\xi}^{t_1}\Big[R(t,x^{II}(t),y^{I}(t),u^{II}(t))-R(t,x^{I}(t),y^{I}(t),u^{I}(t))\Big]\,dt-$$
$$-\int\limits_{\xi}^{t_1}\Big[Q(t,x^{II}(t),y^{II}(t),y^{II}(t-0))-Q(t,x^{I}(t),y^{I}(t),y^{I}(t-0))\Big]\,d\theta(t).$$

А в точках скачка дополнительно требовалось выполнение неравенства (4.12), таким образом $Q(t,x^{II}(t),y^{II}(t),y^{II}(t-0)) \geq Q(t,x^{II}(t),y^{I}(t), y^{I}(t-0))$, откуда следует, что

$$\Delta I(x(t),y(t),u(t)) \leq G(x^{II}(t_1),y^{II}(t_1))-G(x^{I}(t_1),y^{I}(t_1))-$$
$$-\int\limits_{\xi}^{t_1}\Big[R(t,x^{II}(t),y^{I}(t),u^{II}(t))-R(t,x^{I}(t),y^{I}(t),u^{I}(t))\Big]\,dt-$$
$$-\int\limits_{\xi}^{t_1}\Big[Q(t,x^{II}(t),y^{I}(t),y^{I}(t-0))-Q(t,x^{I}(t),y^{I}(t),y^{I}(t-0))\Big]\,d\theta(t).$$

И при $t = t_1$ выполняется неравенство (4.13), т.е. $G(x^{II}(t_1),y^{II}(t_1)) \leq G(x^{II}(t_1),y^{I}(t_1))$, и значит выполняется:

$$\Delta I(x(t),y(t),u(t)) \leq G(x^{II}(t_1),y^{I}(t_1))-G(x^{I}(t_1),y^{I}(t_1))-$$
$$-\int\limits_{\xi}^{t_1}\Big[R(t,x^{II}(t),y^{I}(t),u^{II}(t))-R(t,x^{I}(t),y^{I}(t),u^{I}(t))\Big]\,dt-$$
$$-\int\limits_{\xi}^{t_1}\Big[Q(t,x^{II}(t),y^{I}(t),y^{I}(t-0))-Q(t,x^{I}(t),y^{I}(t),y^{I}(t-0))\Big]\,d\theta(t).$$

Воспользуемся разложениями (4.1)–(4.3) и условиями на $G_x(x^{I}(t_1), y^{I}(t_1))$, $R_x(t,x^{I}(t),y^{I}(t),u^{I}(t))$, $Q_x(t,x^{I}(t),y^{I}(t),y^{I}(t-0))$. Тогда получим следующую оценку:

$$\Delta I(x(t),y(t),u(t)) \leq o_1(|\Delta x|)-\int\limits_{\xi}^{t_1} o_2(|\Delta x|)d\theta(t)-$$

$$-\int_{\xi}^{t_1}\Big[H_u(t,x^I(t),y^I(t),\psi(t,y^I(t)),u^I(t))'\Delta u+o_3(|\Delta x,\Delta u|)\Big]\,dt=$$

$$=o_1(|\Delta x|)-\int_{\xi}^{t_1}o_2(|\Delta x|)d\theta(t)-\int_{\xi}^{t_1}o_3(|\Delta x,\Delta u|)dt-$$

$$-\int_{\xi}^{t_1}H_u^2(t,x^I(t),y^I(t),\psi(t,y^I(t)),u^I(t))dt<0.$$

А значит верное неравенство: $I(v^{II})<I(v^I)$. □

6. Модифицированный алгоритм

Рассмотрим случай, когда функция Кротова φ не зависит от $y(t)$. Это возможно, когда функции f, f^0, F и g^0 не содержат слагаемых, в которых есть произведение вида $x^n(t)y^m(t)$. Тогда система (4.7)–(4.9) примет вид:

$$\psi_t(t)=-H_x(t,x^I(t),y(t),\psi(t),u^I(t)), \tag{6.1}$$

$$\psi(t_1)=-F_x(x^I(t_1)), \tag{6.2}$$

$$\psi(t)-\psi(t-0)=g_x^0(t,x^I(t),y(t),y(t-0)). \tag{6.3}$$

Алгоритм 2. 1. Задаются $u^I(t),y^I(t)$ и из системы (2.1) с начальным условием $x(t_0)=x_0$ находится $x^I(t)$. Тогда $v^I(t)=(x^I(t),y^I(t),u^I(t))$.

2. На интервале $[\xi,t_1]$ интегрируется система (6.1)–(6.3), где $\xi\in[t_0,t_1]$.
3. Задается $\tilde u(t,y(t))$ по формуле (4.10), $t\in[\xi,t_1]$
4. Функция $\tilde y(t,x(t))$ ищется из решения задачи (4.11)–(4.13), тогда пусть $\tilde u(t,x(t))=\tilde u(t,\tilde y(t,x(t)))$.
5. Интегрируется система

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x(t),\tilde y(t,x(t)),\tilde u(t,x(t))),\quad x(\xi)=x^I(\xi-0),\quad t\in[\xi,t_1].$$

6. Параметр α ищется из решения задачи минимизации функционала $I(\tilde x(t),\tilde y(t),\tilde u(t))$, при $t\in[\xi,t_1]$.
7. Новый процесс $v^{II}(t)=(x^{II}(t),y^{II}(t),u^{II}(t))$ задается как

$$x^{II}(t)=\begin{cases}x^I(t), & t\in[t_0,\xi),\\ \tilde x(t), & t\in[\xi,t_1],\end{cases}\qquad y^{II}(t)=\begin{cases}y^I(t), & t\in[t_0,\xi),\\ \tilde y(t,\tilde x(t)), & t\in[\xi,t_1],\end{cases}$$

$$u^{II}(t)=\begin{cases}u^I(t), & t\in[t_0,\xi),\\ \tilde u(t,\tilde x(t)), & t\in[\xi,t_1].\end{cases}$$

8. Начальный процесс задается как $v^I(t) = v^{II}(t)$ и процедура повторяется со второго шага.

7. Пример

Требуется минимизировать функционал:

$$I(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)) = \frac{1}{2}x^2(1)$$

при следующих ограничениях

$$\dot{x} = u + y, \quad t \in T = [0,1], \tag{7.1}$$

$$x(0) = 4.5, \quad |u| \le 1,$$

$$y(t) \in Y(t, x(t), y(t-0)), \quad y(-0) = 0,$$

$$Y(t, x(t), 0) = \begin{cases} \{0, -1\}, & x(t) > 4, \\ \{0, -1, -3\}, & x(t) \le 4, \end{cases}$$

$$Y(t, x(t), -1) = \{-1\}, \quad Y(t, x(t), -3) = \{-3\}.$$

Для того, чтобы снять ограничения на $u(t)$, перепишем систему (7.1) в следующем виде:

$$\dot{x} = \sin v + y, \quad t \in T = [0,1],$$

Для решения применим Алгоритм 2. В качестве начального приближения выберем $y^I(t) = 0$, $v^I(t) = 0$, тогда соответствующая траектория непрерывной части системы — $x^I(t) = 4.5$. На первом шаге возьмем $\xi = \frac{3}{4}$, далее на каждой итерации ξ уменьшается на $\frac{1}{4}$. После трех итераций получим:

$$v^{IV}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{4}), \\ -\frac{\pi}{2}, & t \in [\frac{1}{4}, 1], \end{cases} \qquad y^{IV}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{4}), \\ -1, & t \in [\frac{1}{4}, 1], \end{cases}$$

$$x^{IV}(t) = \begin{cases} 4.5, & t \in [0, \frac{1}{4}), \\ -2t + 5, & t \in [\frac{1}{4}, 1]. \end{cases}$$

На четвертой итерации (при $\xi = 0$) имеем $\tilde{v}(t) = -3\alpha$. Решая на этой итерации задачу максимизации R по y получим две точки локального максимума:

$$\tilde{y_1}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t^*), \\ -3, & t \in [t^*, 1], \end{cases} \qquad \text{где } t^* : x(t^*) = 4,$$

и $\tilde{y_2}(t) = -1, t \in [0,1]$.

Найдем соответствующие траектории:

$$\tilde{x_1}(t) = \begin{cases} 4.5 - t\sin 3\alpha, & t \in [0, t^*), \\ 4.5 + \frac{3}{2\sin 3\alpha} - (\sin 3\alpha + 3)t, & t \in [t^*, 1], \end{cases} \quad \text{где } t^* = \frac{1}{2\sin 3\alpha},$$

$$\tilde{x_2}(t) = -(\sin 3\alpha + 1)t + 4.5, t \in [0, 1].$$

Далее найдем значения функционалов для каждого процесса:

$$I(\tilde{x_1}, \tilde{y_1}, \tilde{v}) = \frac{1}{2}\left[-\sin 3\alpha + 1.5 + \frac{3}{2\sin 3\alpha}\right]^2,$$

$$I(\tilde{x_2}, \tilde{y_2}, \tilde{v}) = \frac{1}{2}\left[-\sin 3\alpha + 3.5\right]^2.$$

Решив задачу минимизации каждого функционала по α получим, что и для того и для другого случая $\alpha = \frac{\pi}{6}$, таким образом $I(\tilde{x_1}, \tilde{y_1}, \tilde{v}) = 2$, $I(\tilde{x_2}, \tilde{y_2}, \tilde{v}) = 3.125$. Итак, получили следующий процесс:

$$x^V(t) = \tilde{x_1}(t) = \begin{cases} 4.5 - t, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ 6 - 4t, & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \qquad y^V(t) = \tilde{y_1}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ -3, & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

$$v^V(t) = \tilde{v}(t) = -\frac{\pi}{2}, \quad t \in [0, 1].$$

Как показано в [5], данный управляемый процесс является оптимальным.

Список литературы

1. Бортаковский А. С. Достаточные условия оптимальности управления непрерывно-дискретными системами / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев // Автоматика и телемеханика. — 1987. — № 7. — С. 47–52.
2. Бортаковский А. С. Достаточные условия оптимальности управления детерминированными логико-динамическими системами / А. С. Бортаковский // Информатика, сер. Автоматизация проектирования. — 1992. — вып. 2–3. — С. 16–22.
3. Krotov V. F. Global Methods in Optimal Control Theory / V. F. Krotov. — Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker Inc., New York, 1996.
4. Батурин В. А. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения / В. А. Батурин, Д. Е. Урбанович. — Новосибирск: Наука, 1997. — 175 с.
5. Пантелеев А. В. Теория управления в примерах и задачах / А. В. Пантелеев, А. С. Бортаковский. — М.: Высшая школа, 2003.

V. A. Baturin, N. S. Maltugueva

A first order method of weak improvement for optimal control problems in logic-dynamic systems

Abstract. In this paper, an optimal control problem in logic-dynamic systems is considered. A first order algorithm of weak improvement has been obtained, a theorem on unimprovable element has been proved.

Keywords: optimal control, logical-dynamic systems, sufficient optimality conditions.

Батурин Владимир Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, (rozen@icc.ru)

Малтугуева Надежда Станиславовна, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, (malt@uude.icc.ru)

Baturin Vladimir, Institute of System Dynamics and Control Theory, 134, Lermontov St., Irkutsk, 664033 professor, (rozen@icc.ru)

Maltugueva Nadezhda, Institute of System Dynamics and Control Theory, 134, Lermontov St., Irkutsk, 664033, (malt@uude.icc.ru)