Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 295—298

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.977

Метод нелокального улучшения в квадратичной задаче оптимального управления с ограничением

Е. В. Аксенюшкина
Байкальский государственный университет экономики и права

Аннотация. Исследуется квадратичная задача оптимального управления с функциональными ограничениями на основе процедуры нелокального (без варьирования) улучшения. В результате получен метод с итерационным поиском множителя из условия выполнения ограничения задачи.

Ключевые слова: оптимальное управление, приращение функционала, нелокальное улучшение.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления, связанную с линейной по состоянию системой общего вида

$$\dot{x} = A(u,t)x + b(u,t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Множество V доступных управлений введем как семейство измеримых вектор-функций $u(t), \quad t \in T$ с ограничением $u(t) \in U, \ t \in T$ относительно компакта $U \subset R^r$.

На множестве V определим пару квадратичных по фазовому состоянию функционалов

$$\Phi_i(u) = \langle c^i, x(t_1)\rangle + \frac{1}{2}\langle x(t_1), D_i x(t_1)\rangle +$$
$$+\frac{1}{2}\int_T \langle x(t), Q_i(t)x(t)\rangle dt, \quad i = 0, 1.$$

Поставим задачу с одним ограничением типа равенства

$$\Phi_0(u) \to \min, \quad \Phi_1(u) = 0, \quad u \in V. \qquad (1.1)$$

Пусть W – множество допустимых управлений в этой задаче. Построим метод последовательного улучшения целевого функционала Φ_0 в классе допустимых управлений. С этой целью будем использовать нелокальные формулы приращения для функционалов задачи [1], [2]

$$\Delta_v \Phi_i(u) = -\int_T \Delta_{v(t)} H^i(p^i(t,u,x(t,v)), x(t,v), u(t), t)dt,$$

где $p^i(t,u,x) = \psi^i(t,u) + \Psi_i(t,u)(x - x(t,u))$ – вспомогательная вектор-функция.

2. Метод улучшения

Перейдем к вопросам улучшения для базового допустимого управления $u \in W$. Сформулируем вспомогательную задачу на множестве доступных управлений

$$\int_T \Delta_{v(t)} H^0(p^0(t,u,x(t)), x(t), u(t), t)dt \to \max, \quad v \in V, \qquad (2.1)$$

$$\int_T \Delta_{v(t)} H^1(p^1(t,u,x(t)), x(t), u(t), t)dt = 0.$$

Здесь $x(t),\ t \in T$ – произвольная фазовая траектория (функциональный параметр задачи).

Согласно принципу максимума для заданной траектории $x(t)$ решение задачи (2.1) находится среди λ-параметрического семейства максимизирующих управлений

$$v_\lambda(t, x(t)) = \arg\max_{v \in U} H(p^\lambda(t,u,x(t)), x(t), v, t),$$

где $H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x,u,t) \rangle,\ \ p^\lambda(t,u,x) = p^0(t,u,x) + \lambda p^1(t,u,x)$.

Выделим семейство траекторий $x_\lambda(t)$, отвечающих управлению v_λ в силу фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, v_\lambda(t,x), t), \ \ x(t_0) = x^0.$$

Пусть $u_\lambda(t) = v_\lambda(t, x_\lambda(t)),\ t \in T$. Выбор параметра λ определяется интегральным условием

$$\int_T \Delta_{u_\lambda(t)} H^1(p^1(t,u,x_\lambda(t)), x_\lambda(t), u(t), t)dt = 0.$$

Поскольку $x_\lambda(t) = x(t, u_\lambda)$, то при $i = 1$ это равенство эквивалентно условию $\Phi_1(u_\lambda) = 0$. При этом целевой функционал из (2.1) при $v(t) = u_\lambda(t)$, $x(t) = x_\lambda(t)$ представляет собой разность $\Phi_0(u) - \Phi_0(u_\lambda)$.

Согласно построению, управление $u_\lambda(t)$ допустимо ($\Phi_1(u_\lambda) = 0$) и является решением задачи (2.1) при $x(t) = x_\lambda(t)$ (принцип максимума является достаточным условием оптимальности в этой задаче. Это значит, что $\Phi_0(u) - \Phi_0(u_\lambda) \geq 0$ (управление $u(t)$ является допустимым в задаче (1.1)).

В итоге, схема улучшения управления $u \in V$ с траекториями $x(t, u)$, $\psi^i(t, u)$, $\Psi_i(t, u)$, $i = 0, 1$ выглядит следующим образом. Предварительно найдем выражение для общего максимизирующего управления

$$u^*(\psi, x, t) = \arg\max_{u \in U} H(\psi, x, u, t), \quad H =< \psi, f(x, u, t) >$$

при произвольных ψ, $x \in R^n$, $t \in T$.

Далее, для выбранного λ действуем по правилу:
1) образуем сопряженные объекты

$$\psi^\lambda(t, u) = \psi^0(t, u) + \lambda\psi^1(t, u), \quad \Psi_\lambda(t, u) = \Psi_0(t, u) + \lambda\Psi_1(t, u)$$

и вспомогательную вектор-функцию

$$p^\lambda(t, u, x) = \psi^\lambda(t, u) + \Psi_\lambda(t, u)(x - x(t, u));$$

2) сформируем максимизирующее управление

$$v_\lambda(t, x) = u^*(p^\lambda(t, u, x), x, t)$$

и найдем соответствующее решение $x_\lambda(t)$ фазовой системы вместе с управлением $u_\lambda(t) = v_\lambda(t, x_\lambda(t))$, $t \in T$;
3) проверим выполнение ограничения $\Phi_1(u_\lambda) = 0$.

Выбор параметра λ осуществляется с целью приближенного решения уравнения $\Phi_1(u_\lambda) = 0$. Это задача одномерного поиска, которая реализуется на каждой итерации улучшения. Отметим, что улучшение носит нелокальный характер: $\Phi_0(u_\lambda) \leq \Phi_0(u)$, причем управления u, u_λ, вообще говоря, не являются «близкими» в том или ином смысле. Предельный случай $u_\lambda = u(t), \quad t \in T$ означает, что управление $u(t)$ удовлетворяет принципу максимума в задаче (1.1) с множителем λ :

$$p^\lambda(t, u, x_\lambda(t)) = \psi^\lambda(t, u),$$
$$u(t) = \arg\max_{v \in U} H(\psi^\lambda(t, u), x(t, u), v, t), \quad t \in T.$$

Список литературы

1. Васильев О. В. Лекции по методам оптимизации / О. В. Васильев. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1994. — 344 с.
2. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления / В. А. Срочко. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. — 160 с.

E. V. Aksenyushkina

Method of nonlocal improvement in the quadratic problem of optimal control with constraint

Abstract. Quadratic problem on the basis of the procedure of nonlocal (without the variation) improvement is investigated. As a result the multiplier method in the class of admissible controls is constructed.
Keywords: optimal control, functional increment, nonlocal improvement.

Аксенюшкина Елена Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент, Байкальский государственный университет экономики и права, 664015, Иркутск, ул. Ленина, 11 тел.: (3952) 24-28-19, (aksl@online.ru)

Aksenyushkina Elena, Baikal National University of Economics and Law, 11, Lenin St., Irkutsk, 664015, Phone: (3952) 24-28-19, (aksl@online.ru)