Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 324—327

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 519.853.4

О задачах двухуровневого программирования с равновесием на нижнем уровне *

А. В. Орлов
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. В статье предложена новая формулировка задачи двухуровневого программирования с обобщенной биматричной игрой на нижнем уровне. Произведена редукция оптимистической постановки этой задачи к невыпуклой задаче математического программирования.

Ключевые слова: двухуровневое программирование, оптимистическое решение, обобщенная биматричная игра, невыпуклая задача, теория глобального поиска.

1. Введение и постановка задачи

Управление в рамках экономических, экологических и финансовых систем, которые, как правило, обладают иерархической структурой, приводит чаще всего к конфликтным постановкам задач оптимизации [1], [2]. Это объясняется тем, что отдельные элементы системы управления имеют свои собственные цели, вообще говоря, не совпадающие с целью развития системы в целом. Анализ таких систем не укладывается в рамки обычной теории оптимизации и требует нового математического аппарата. Одним из способов их исследования является представление конфликта в виде иерархической игры (игры с фиксированной последовательностью ходов) [2], или задачи двухуровневого программирования [3].

Обычно в иерархической двухуровневой задаче верхний уровень («центр») зависит от нижнего через целевую функцию и/или допустимое множество, и нижний от верхнего аналогичным образом. При этом предполагается, что «центр» делает свой ход первым [2], [3].

* Работа поддержана грантами президента РФ МК-1497.2008.1 и НШ-1676.2008.1 и Фондом содействия отечественной науке.

С помощью оптимизационной задачи на нижнем уровне могут моделироваться либо один, либо несколько игроков, зависящих от «центра». В последнем случае обязательно предполагается, что эти игроки не зависят друг от друга [2]. Тогда можно считать, что фактически на нижнем уровне действует один «агрегированный» игрок. С одной стороны, такая модель позволяет исследовать случаи, когда игроку верхнего уровня подчинены несколько игроков нижнего уровня, и которые преобладают на практике (например, корпорация обычно имеет несколько филиалов). С другой — предположение о независимости игроков может снизить степень адекватности модели.

В работе рассматривается новая постановка задачи двухуровневого программирования, в которой на нижнем уровне вместо параметрической оптимизационной задачи рассматривается параметрическая игровая задача между игроками нижнего уровня. Линейная целевая функция верхнего уровня в этой задаче максимизируется при линейных ограничениях и дополнительном ограничении, которое представляет собой задачу отыскания равновесия по Нэшу. В качестве игровой задачи рассматривается обобщенная биматричная игра с матрицами B_1 и B_2 в смешанных стратегиях, рассматриваемая не на канонических симплексах, а на симплексах, зависящих от переменной верхнего уровня (см. также [4]).

Такая задача в оптимистической постановке [3] может быть сформулирована следующим образом:

$$\left.\begin{array}{c} \langle c,x\rangle + \langle d_1,y\rangle + \langle d_2,z\rangle \uparrow \max\limits_{x,y,z}, \\ x\in X=\{x\in I\!R^m \mid Ax\le a,\ x\ge 0,\ \langle b_1,x\rangle+\langle b_2,x\rangle=1\}, \\ (y,z)\in NE(\Gamma(x)), \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{BP}_\Gamma)$$

где $NE(\Gamma(x))$ — множество ситуаций равновесия по Нэшу в игре

$$\left.\begin{array}{l} \langle y,B_1z\rangle \uparrow \max\limits_{y}, y\in Y(x)=\{y\in I\!R^{n_1}|y\ge 0,\langle e_{n_1},y\rangle=\langle b_1,x\rangle\}, \\ \langle y,B_2z\rangle \uparrow \max\limits_{z}, z\in Z(x)=\{z\in I\!R^{n_2}|z\ge 0,\langle e_{n_2},z\rangle=\langle b_2,x\rangle\}. \end{array}\right\} \quad (\Gamma(x))$$

Здесь $c,b_1,b_2\in I\!R^m$, $b_1\ge 0$, $b_1\ne 0$, $b_2\ge 0$, $b_2\ne 0$; $d_1\in I\!R^{n_1}$; $d_2\in I\!R^{n_2}$; $a\in I\!R^p$; A,B_1,B_2 — матрицы соответствующего размера; e_{n_1}, e_{n_2} — векторы из единиц соответствующей размерности.

Можно проинтерпретировать выражение $\langle b_1,x\rangle+\langle b_2,x\rangle$ как некий ресурс, который требуется распределить между игроками нижнего уровня.

2. Редукция к задаче математического программирования

Одним из самых распространенных подходов к отысканию решения в стандартной двухуровневой задаче является сведение этой задачи к задаче математического программирования путем замены задачи нижнего уровня ее условиями оптимальности [3]. При решении задачи $(\mathcal{BP}_\Gamma)$ предлагается действовать аналогичным образом. Условия оптимальности для обобщенной биматричной игры $(\Gamma(x))$ при фиксированнном $x \in X$ формулируются следующим образом [4].

Теорема 1. *Для того, чтобы пара $(y, z) \in Y \times Z$ являлась ситуацией равновесия по Нэшу в игре $(\Gamma(x))$ необходимо и достаточно, чтобы существовали числа α и β, для которых выполняются соотношения:*

$$\left.\begin{array}{c} B_1 z \leq \dfrac{\alpha}{\langle b_1, x\rangle} e_{n_1}, \qquad y B_2 \leq \dfrac{\beta}{\langle b_2, x\rangle} e_{n_2}, \\ \langle y, (B_1 + B_2) z\rangle = \alpha + \beta. \end{array}\right\}$$

Таким образом, для решения двухуровневой задачи $(\mathcal{BP}_\Gamma)$ в оптимистической постановке нужно отыскать глобальное решение в следующей задаче математического программирования с невыпуклым допустимым множеством:

$$\left.\begin{array}{c} \langle c, x\rangle + \langle d_1, y\rangle + \langle d_2, z\rangle \uparrow \max\limits_{x,y,z,\alpha,\beta}, \\ x \in X, \quad y \in Y, \quad z \in Z, \\ \langle B_1 z, e^i\rangle\langle b_1, x\rangle \leq \alpha, \quad i = 1, ...n_1, \\ \langle y B_2, e^j\rangle\langle b_2, x\rangle \leq \beta, \quad j = 1, ...n_2, \\ \langle y, (B_1 + B_2) z\rangle = \alpha + \beta, \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P})$$

где $e^i \in I\!R^{n_1}$, $e^j \in I\!R^{n_2}$ — стандартные орты.

Теорема 2. *Для того, чтобы тройка (x^*, y^*, z^*) была глобальным решением задачи $(\mathcal{BP}_\Gamma)$, необходимо и достаточно существования чисел α_* и β_* таких, чтобы пятерка $(x^*, y^*, z^*, \alpha_*, \beta_*)$ являлась глобальным решением задачи $(\mathcal{P})$.*

Невыпуклость в задаче $(\mathcal{P})$ порождается тремя группами (n_1+n_2+1) билинейных ограничений. Отметим, что ограничения в каждой группе билинейны по своим парам переменных. Данную задачу предлагается решать с помощью теории глобального поиска, предложенной А.С. Стрекаловским [5], с учетом ее билинейной специфики [6].

Список литературы

1. Горелик В. А. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах / В. А. Горелик, А. Ф. Кононенко. — М.: Радио и связь, 1982. — 144 с.

2. Гермейер Ю. Б. Игры с непротивоположными интересами / Ю. Б. Гермейер. — М.: Наука, 1976. — 328 с.
3. Dempe S. Foundations of Bilevel Programming / S. Dempe. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 312 p.
4. Стрекаловский А. С. Биматричные игры и билинейное программирование / А. С. Стрекаловский, А. В. Орлов. — М.: Физматлит, 2007. — 224 с.
5. Стрекаловский А. С. Элементы невыпуклой оптимизации / А. С. Стрекаловский. — Новосибирск: Наука, 2003. — 356 с.
6. Орлов А. В. Численное решение задач билинейного программирования / А. В. Орлов // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 2008. — Т. 48, № 2. — С. 45–62.

A. V. Orlov

On bilevel programming problems with equilibrium at the lower level

Abstract. The new formulation of bilevel programming problems with generalized bimatrix games at the lower level is proposed. The reduction of the problem in optimistic statement to the nonconvex mathematical programming problem is realized.

Keywords: bilevel programming, optimistic solution, generalized bimatrix games, nonconvex problem, global search theory.

Орлов Андрей Васильевич, кандидат физико-математических наук, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 644033, Иркутск, ул. Лермонтова 134, тел.: (3952) 45-30-82, (anor@icc.ru)

Orlov Andrey, Institute for system dynamics and control theory SB RAS, 134, Lermontov St., Irkutsk, 664033, Ph.D., Phone: (3952) 45-30-82, (anor@icc.ru)