Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 317—319

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 518.517

Разрешимость интегрально-операторного уравнения типа Вольтерры

А. В. Красник
Иркутский государственный университет

Аннотация. В работе рассматривается нелинейное интегрально-операторное уравнение типа Вольтерры. Доказана теорема о существовании и единственности решения этого уравнения.

Ключевые слова: интегральные уравнения, банаховы пространства, локальные решения.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$B(u(t),t) + \int_0^t K(u(s),s,t)\,ds = 0, \tag{1}$$

где $B(u,t):\ E_1 \oplus \mathbf{R} \to E_2$, $K(u,s,t):\ E_1 \oplus \mathbf{R} \oplus \mathbf{R} \to E_2$ — нелинейные операторы.

К уравнениям вида (1) редуцируются нелинейные уравнения Вольтерры 1-го рода, различные начальные задачи для дифференциально-операторных уравнений не разрешенных относительно старшей производной а также другие некорректно поставленные задачи.

Уравнение (1) будем рассматривать в области

$$\Omega(u_0) = \{(u,t) \in E_1 \oplus \mathbf{R}:\ \|u - u_0\| < R, \|t\| < P\}.$$

Далее будем считать, что оператор, стоящий в левой части уравнения (1) непрерывен на $\Omega(u_0)$ и непрерывно дифференцируем по u на $\Omega(u_0)$.

Теорема 1. *Пусть $B(u_0,0) = 0$ и выполнены следующие условия*

1. $\left\| B_u(u,t) + \int_0^t K_u(u,s,t)\,ds - B_u(u_0,0) \right\| \le c\,[\|u - u_0\| + |t|]$ *на* $\Omega(u_0)$;
2. $\exists\ B_u^{-1}(u_0,0)$, *причем* $\|B_u^{-1}(u_0,0)\| \le m$;
3. $\left\| B(u_0,t) + \int_0^t K(u_0,s,t)\,ds \right\| \le k\,|t|$, *для* $\forall\ t \in S_P(0)$.

Здесь c, k и m зависят только от области $\Omega(u_0)$ и операторов B и K.

Тогда при каждом $t \in S_\rho(0)$, *где* $\rho = \min\left(P, \frac{1}{mc}\frac{1}{(\sqrt{1+km}+\sqrt{km})^2}\right)$, *в шаре* $S_r(u_0)$, *где* $r = \min\left(R, \frac{1}{mc}\frac{\sqrt{km}}{\sqrt{1+km}+\sqrt{km}}\right)$, *существует единственное решение* $u = u(t)$ *уравнения (1), непрерывное в* $S_\rho(0)$ *и* $u(0) = u_0$. *Решение* $u(t)$ *можно получить модифицированным итерационным процессом Ньютона-Канторовича*

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - B_u^{-1}(u_0,0)\left(B(u_n(t),t) + \int_0^t K(u_n(s),s,t)\,ds\right).$$

Справедлива следующая оценка скорости сходимости $\|u_n(t) - u(t)\| \le \frac{q^n}{1-q}mk\rho$, *где* $q = \frac{\sqrt{1+km}}{\sqrt{1+km}+\sqrt{km}}$.

Доказательство. Будем считать положительные R и P достаточно большими. Рассмотрим оператор

$$F(u,t) = u(t) - B_u^{-1}(u_0,0)B(u(t),t) - \int_0^t B_u^{-1}(u_0,0)K(u(s),s,t)\,ds.$$

Для оператора F воспользуемся следствием из принципа сжимающих отображений: если F отображает замкнутое выпуклое множество $D \subset E_1 \oplus \mathbf{R}$ в себя и на D F непрерывно дифференцируем и $\|F_u(u)\| \le q < 1$, тогда уравнение $u = F(u)$ имеет единственное в D решение, к которому сходится последовательные приближения $u_{n+1} = F(u_n)$ [1].

Рассмотрим $F_u(u,t)$

$$F_u(u,t) = I - B_u^{-1}(u_0,0)B_u(u(t),t) - \int_0^t B_u^{-1}(u_0,0)K_u(u(s),s,t)\,ds =$$

$$= B_u^{-1}(u_0,0)\left[B_u(u_0,0) - B_u(u(t),t) - \int_0^t K_u(u(s),s,t)\,ds\right].$$

Оценим последнее выражение по норме с использованием первого и второго условия теоремы при $\|u-u_0\| \le a, |t| \le b$

$$\|F_u(u,t)\| \le m\left\|B_u(u_0,0) - B_u(u(t),t) - \int_0^t K_u(u(s),s,t)\,ds\right\| \le$$

$$\le mc\left[\|u-u_0\| + |t|\right] \le mc(a+b).$$

Далее используем следствие 2 из теоремы 1 на стр. 382 [1]

$$\|F(u_0,t) - u_0\| = \left\|B_u^{-1}(u_0,0)B(u_0,t) + \int_0^t B_u^{-1}(u_0,0)K(u_0,s,t)\,ds\right\| \le$$

$$\le m\left\|B(u_0,t) + \int_0^t K(u_0,s,t)\,ds\right\| \le mk\,|t| \le mkb.$$

Исходя из полученных оценок, докажем, что a и b можно подобрать таким образом, чтобы $mc(a+b) = q$ и $mkb = (1-q)a$, где $q \in (0,1)$. В этом случае по указанной теореме при каждом $t \in S_b(0)$ в шаре $S_a(u_0)$ уравнение $u = F(u,t)$ будет иметь единственное решение.

Из системы $mc(a+b) = q$, $mkb = (1-q)a$ получаем, что

$$a = \frac{1}{mc}\frac{qmk}{mk+1-q}, \quad b = \frac{1}{mc}\frac{q(1-q)}{mk+1-q}.$$

Очевидно, что a и b зависят от параметра q, которым мы распорядимся так, чтобы время разрешимости было максимальным, т.е. $b(q) \to \max$, $q \in (0,1)$. При помощи стандартной процедуры исследования функции на максимум, находим, что при $\tilde{q} = \frac{\sqrt{1+km}}{\sqrt{1+km}+\sqrt{km}}$ получаем максимальное значение $\tilde{b} = \frac{1}{mc}\frac{1}{(\sqrt{1+km}+\sqrt{km})^2}$, при этом $\tilde{a} = \frac{1}{mc}\frac{\sqrt{km}}{\sqrt{1+km}+\sqrt{km}}$. Оценка на сходимость следует из утверждения принципа сжимающих отображений [1].

Если окажется, что $\tilde{a} \geq R$ или $\tilde{b} \geq P$, то, так как $a(q)$, $b(q)$ монотонно возрастают при $q \in (0, \tilde{q})$, найдется число $\check{q}: \ a(\check{q}) \leq R$, $b(\check{q}) \leq P$, причем одно из этих неравенств оказывается равенством. Следовательно, при $t \in S_{b(\check{q})}(0)$ в шаре $S_{a(\check{q})}(u_0)$ существует единственное непрерывное решение. Для этого решения справедлива оценка сходимости итерационного процесса $\|u_n(t) - u(t)\| \leq \frac{\check{q}^n}{1-q} mkb(\check{q})$, которая мажорируется оценкой, указанной в формулировке теоремы. $\square$

Список литературы

1. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М.: Физматлит, 2007.

A. V. Krasnik

Solvability of Volterra type integral-operator equation

Abstract. In this paper nonlinear integral-operator equation of Volterra type is considered. Theorem about existence and uniqueness of solution of this equation is proved.

Keywords: integral equations, Banah spaces, local solutions.

Красник Андрей Валерьевич, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952) 24-22-10, (krasnik_andrey@mail.ru)

Krasnik Andrew, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 Phone: (3952) 24-22-10, (krasnik_andrey@mail.ru)