Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 221—232

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.97

Минимаксное оценивание в задаче оптимизации динамики пучков заряженных частиц

Д. А. Овсянников
Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация. Рассматривается задача управления пучком взаимодействующих частиц. Исследуется минимаксный критерий оценки качества динамики пучка. Динамика частиц описывается интегро-дифференциальными уравнениями. Даются представления для вариации оптимизируемого функционала и необходимые условия оптимальности.

Ключевые слова: минимакс, пучок, взаимодействие частиц, оптимизация.

Введение

Математические проблемы управления в системах обыкновенных дифференциальных уравнений, включая управление пучками (ансамблями) траекторий, интенсивно исследуются уже многие годы. Особый интерес к задачам управления и оптимизации в последние годы вызван постоянно расширяющейся сферой приложений и, конечно, новыми существенно возросшими возможностями вычислительной техники. В данной статье рассматривается проблема управления пучками заряженных частиц с учетом их взаимодействия. Такие проблемы возникают при проектировании и расчете ускорителей заряженных частиц различного назначения. Специальному рассмотрению эти задачи обязаны и перспективности моделирования работы создаваемой современной электрофизической аппаратуры, в частности, моделирования динамики пучков заряженных частиц и плазмы в электромагнитных полях [6]–[10], [12]–[14]. Усложняющей моделирование особенностью последних является учет взаимодействия частиц. В математическом отношении подобные взаимодействия приводят к исследованию интегро-дифференциальных уравнений. В статье ставится задача оптимального управления ансамблем траекторий системы интегро-дифференциальных уравнений по минимаксному критерию. Дается представление вариации функционала на траекториях таких систем и доказываются необходимые условия минимума максимума значений функционала по пучку траекторий. При этом используется техника введения сопряженной системы, позволяющая в дальнейшем строить приближенные методы оптимизации.

1. Постановка задачи

Пусть эволюция пучка частиц описывается уравнениями

$$dx/dt = f(t, x, u), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} f(t, x, u) + \rho \, \mathrm{div}_x f(t, x, u), \tag{1.2}$$

где

$$f(t, x, u) = f_1(t, x, u) + \int_{M_{t,u}} f(t, x, y_t) \rho(t, y_t) dy_t, \tag{1.3}$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0 \in M_0 \subset \Omega, \quad \rho(0, x) = \rho_0(x). \tag{1.4}$$

Здесь t – время, $t \in T_0 = [0, T]$, T – фиксировано, x – n-мерный вектор фазовых координат, $\rho = \rho(t, x)$ – плотность распределения частиц в фазовом пространстве в момент t, $u = u(t)$ – r-мерная вектор-функция управления, M_0 – компакт в R^n ненулевой меры, Ω – область в R^n, $\rho_0(x)$ – неотрицательная непрерывно-дифференцируемая функция, множество $M_{t,u}$ есть сечение в момент t пучка траекторий, исходящих из множества M_0 и соответствующих управлению $u = u(t)$, т. е.

$$M_{t,u} = \{x_t = x(t, x_0, u) : x_0 \in M_0\}, \quad y_t \in M_{t,u}. \tag{1.5}$$

Считаем, что допустимые управления $u = u(t)$ составляют класс D векторных кусочно-непрерывных на T_0 функций со значениями в компактном множестве $U \in R^r$. Предполагаем, что вектор-функции $f_1(t, x, u)$ и $f_2(t, x, y)$ определены и непрерывны по совокупности своих аргументов на множествах $T_0 \times \Omega \times U$ и $T_0 \times \Omega \times \Omega$ соответственно вместе с частными производными по x и y до второго порядка включительно.

Решением системы (1.1), (1.2) при начальных условиях (1.4) и фиксированном управлении u будет совокупность вектор-функций $x = x(t, x_0, u)$, описывающих пучок траекторий, исходящих из множества M_0 и функция $\rho = \rho(t, x)$, определенная на этом пучке траекторий.

Введенная математическая модель управления учитывает взаимодействие частиц в пучке. В выражении (1.3) вектор-функция f_1 определяет воздействие внешних полей на частицу, функция f_2 – взаимодействие частиц. Следует отметить, что введенную математическую модель динамики заряженных частиц можно рассматривать, как систему уравнений Власова [4]. Однако, функция f_2, выражающая взаимодействие частиц, в данном случае является достаточно гладкой и описывает некоторое сглаженное взаимодействие частицы со всем ансамблем частиц. Такие "сглаженные" модели получаются при различных численных решениях уравнения Власова, например, методом крупных частиц [3, 9, 10]. Существование и единственность решений уравнения Власова (классических и обобщенных) рассмотрены в работах [1, 2].

В данном случае можно говорить о классических решениях системы (1.1), (1.2). Заметим, что решение уравнения (1.1) можно рассматривать независимо от уравнения (1.2). А именно, если в уравнении (1.1) с учетом (1.3) перейти к интегрированию по множеству M_0, то уравнение (1.1) может быть представлено в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u) = f_1(t,x,u) + \int_{M_0} f_2(t, x(t,x_0,u), x(t,y_0,u))\rho_0(y_0)dy_0. \tag{1.6}$$

Можно показать [9], что при сделанных предположениях относительно функции (1.3) решение уравнения (1.6), т. е. совокупность непрерывно-дифференцируемых по t вектор-функций $x = x(t,x_0,u)$, $x_0 \in M_0$, существует и единственно на некотором отрезке $[0,h]$. Далее предполагаем, что эти решения можно единственным образом продолжить на весь отрезок T_0 при любом допустимом управлении $u \in D$.

Существование и единственность классического решения уравнения (1.2) следует из уравнения

$$\frac{d\rho(t,x(t,x_0,u))}{dt} = -\rho(t,x(t,x_0,u))\mathrm{div}_x f(t,x(t,x_0,u),u(t)) \tag{1.7}$$

с учетом единственности и непрерывной дифференцируемости $x(t, x_0,u)$ по начальным данным [11]. Заметим, что уравнения (1.1) и (1.7) являются уравнениями характеристик для уравнения (1.2). Отметим также, что для наших целей вместо уравнения (1.2) можно сразу рассматривать уравнение (1.7), определяющее плотности распределения частиц вдоль всего пучка траекторий. Однако, на наш взгляд, естественнее сначала записать уравнения (1.1), (1.2).

Рассмотрим функционал

$$I(u) = \max_{t\in TN} \max_{x\in M_{t,u}} \varphi(t,x,\rho(t,x)), \tag{1.8}$$

характеризующий динамику управляемого процесса. Здесь TN – дискретное множество, состоящее из моментов $t_i \in T_0$, $i = \overline{1,N}$, N фиксировано, $\varphi(t,x,\rho) \in C^1(T_0 \times \Omega \times R^1)$ – неотрицательная функция.

Используя определение сечения пучка траекторий (1.5), функционал (1.8) очевидно, можно представить также в виде

$$I(u) = \max_{t\in TN} \max_{x_0\in M_0} \varphi(t, x(t,x_0,u), \rho(t,x(t,x_0,u))). \tag{1.9}$$

Далее рассмотрим задачу минимизации функционала (1.9) по управлениям $u \in D$.

2. Вспомогательные соотношения и леммы

Рассмотрим при каждом $t \in TN$ множество $R_t(u)$, зависящее от управления и определяемое соотношениями

$$\begin{aligned} R_t(u) = \{\bar{x}_0 : \bar{x}_0 \in M_0, \varphi(t, \bar{x}_0, u), \rho(t, x(t, \bar{x}_0, u))) = \\ = \max\nolimits_{x_0 \in M_0} \varphi(t, x_0, u), \rho(t, x(t, x_0, u)))\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Введем также множество

$$T(u) = \{\bar{t} : \bar{t} \in TN, \varphi(\bar{t}, x(\bar{t}, \bar{x}_0, u), \rho(\bar{t}, x(\bar{t}, \bar{x}_0, u))) = I(u)\}. \tag{2.2}$$

Лемма 1. *Пусть $R_t(u)$ и $R_t(\tilde{u})$ – множества, определяемые соотношениями (2.1) при всех $t \in TN$ и соответствующие допустимым управлениям $u = u(t)$ и $\tilde{u} = u(t) + \triangle u(t)$. Тогда имеет место соотношение*

$$\max_{x_0'' \in R_t(\tilde{u})} \min_{x_0' \in R_t(u)} \|x_0'' - x_0'\| \longrightarrow 0 \tag{2.3}$$

при $\|\triangle u\|_L \to 0$ равномерно по $t \in TN$.

Здесь и далее под $\|\triangle u\|_L \to 0$ понимаем, что $\tilde{u} \to u$ по норме в пространстве $L[0,T]$.

Доказательство. Соотношение (2.3) означает, что по любому $\varepsilon > 0$ найдется $\bar{\delta} > 0$, такое, что при $\|\triangle u\|_L < \bar{\delta}$ для произвольных $t \in TN$ и $x_0'' \in R_t(\tilde{u})$ можно указать $x_0' \in R_t(u)$, при котором $\|x_0'' - x_0'\| < \varepsilon$. Предположим противное. Тогда найдется последовательность допустимых управлений, такая, что $\|\triangle u_k\| < \delta_k$, где $\delta_k > 0$ и $\delta_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. При этом найдутся такие $z_k \in R_t(u + \triangle u_k)$ при некотором $t \in TN$, что

$$\min_{x_0 \in R_t(u)} \|z_k - x_0\| \geq \varepsilon. \tag{2.4}$$

По определению имеем

$$\varphi(t, x(t, z_k, \tilde{u}), \tilde{\rho}(t, x(t, z_k, \tilde{u}))) = \max_{x_0 \in M_0} \varphi(t, x(t, x_0, \tilde{u}), \tilde{\rho}(t, x(t, x_0, \tilde{u}))), \tag{2.5}$$

где $\tilde{u} = u(t) + \triangle u_k(t)$. Все точки $z_k \in M_0$. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать последовательность $\{z_k\}$ сходящейся к точке $z_0 \in M_0$. Пусть $x(t) = x(t, x_0, u)$; $\triangle x(t) = x(t, x_0, \tilde{u}) - x(t, x_0, u)$; $\triangle\rho(t, x(t)) = \tilde{\rho}(t, \tilde{x}(t)) - \rho(t, x(t))$. Можно показать [9], что

$$\|\triangle x(t)\|_c = \|x(t, x_0, u + \triangle u_k) - x(t, x_0, u)\|_c \to 0, \tag{2.6}$$

$$\|\triangle\rho(t,x(t))\|_c = \|\tilde{\rho}(t,x(t,x_0,u+\triangle u_k)) - \rho(t,x(t,x_0,u))\|_c \to 0 \quad (2.7)$$

равномерно по $x_0 \in M_0$ при $\|\triangle u_k\|_L \to 0$. Учитывая это, перейдем в равенстве (2.5) к пределу при $k \to +\infty$. Получим

$$\varphi(t,z_0,u),\rho(t,x(t,z_0,u))) = \max_{x_0 \in M_0} \varphi(t,x(t,x_0,u),\rho(t,x(t,x_0,u))),$$

что означает принадлежность z_0 множеству $R_t(u)$ и противоречит тем самым неравенству (2.4). □

Лемма 2. *Пусть $T(u)$ и $T(u+\triangle u)$ – множества, определяемые соотношениями (2.2). Тогда существует $\bar{\delta} > 0$, такое, что при $\|\triangle u\|_L < \bar{\delta}$ множества $T(u)$ и $T(u+\triangle u)$ совпадают, т. е. $T(u) = T(u+\triangle u)$.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда для любой последовательности положительных чисел $\{\delta_j\}$, стремящейся к нулю при $j \to \infty$, можно указать последовательности $\{t_j\}$ и $\{x_{0j}\}$, такие, что

$$t_j \in T(u+\triangle u_j), \quad x_{0j} \in R_{t_j}(u+\triangle u_j), \quad t_j \bar{\in} T(u), \quad (2.8)$$

где $\|\triangle u_j\|_L < \delta_j$. Не ограничивая общности, считаем, что последовательность $\{t_j\}$ сходится к $\bar{t}$, а последовательность $\{x_{0j}\}$ — к $\bar{x}_0$. В силу конечности множества TN и сходимости последовательности $\{t_j\}$, начиная с некоторого номера k, имеем $t_j = t_{j+1} = \bar{t}$, $j = k, k+1, \ldots$. Отсюда и из (2.8) следует, что $\bar{t} \,\bar{\in}\, T(u)$.

Кроме того, по определению

$$\begin{aligned} &\varphi(t_j, x(t_j,x_{0j},\tilde{u}), \tilde{\rho}(t_j,x_{0j},\tilde{u})) = \\ &= \max_{t \in TN} \max_{x_0 \in R_t(\tilde{u})} \varphi(t,x(t,x_0,\tilde{u}),\tilde{\rho}(t,x(t,x_0,\tilde{u}))) = I(\tilde{u}) = \\ &= \max_{t \in TN} \max_{x_0 \in M_0} \varphi(t,x(t,x_0,\tilde{u}),\tilde{\rho}(t,x(t,x_0,\tilde{u}))), \end{aligned}$$

где $\tilde{u} = u + \triangle u_j$. Переход в этом равенстве к пределу с учетом (2.6), (2.7) дает $\varphi(\bar{t}, x(\bar{t},\bar{x}_0,u)), \rho(\bar{t},\bar{x}_0,u) = I(u)$, а это означает по определению (2.2), что $\bar{t} \in T(u)$. Получили противоречие. □

Рассмотрим множества

$$Q_t(u,\triangle u) = R_t(u) \cup R_t(u+\triangle u), \quad S(u,\triangle u) = T(u) \cup T(u+\triangle u).$$

Используя их, получим

$$\begin{aligned} I(\tilde{u}) &= \max_{t \in TN} \max_{x_0 \in M_0} \varphi(t,x(t,x_0,\tilde{u}),\tilde{\rho}(t,x(t,x_0,\tilde{u}))) = \\ &= \max_{t \in T(\tilde{u})} \max_{x_0 \in R_t(\tilde{u})} \varphi(t,x(t,x_0,\tilde{u}),\tilde{\rho}(t,x(t,x_0,\tilde{u}))) = \\ &= \max_{t \in S(u,\triangle u)} \max_{x_0 \in Q_t(u,\triangle u)} \varphi(t,x(t,x_0,\tilde{u}),\tilde{\rho}(t,x(t,x_0,\tilde{u}))). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Представим функцию $\varphi(t, x(t, x_0, \tilde{u}), \tilde{\rho}(t, x(t, x_0, \tilde{u})))$ в виде

$$\varphi(t, x(t) + \triangle x(t), \rho(t, x(t)) + \triangle\rho(t, x(t))) =$$
$$= \varphi(t, x(t), \rho(t, x(t))) + \frac{\partial\varphi(t, x(t), \rho(t, x(t)))}{\partial x}\delta x(t) +$$
$$+ \frac{\partial\varphi(t, x(t), \rho(t, x(t)))}{\partial\rho}\delta\rho(t, x(t)) + o(t, x_0, \|\triangle x(t)\|_c + \|\triangle\rho(t, x(t))\|_c). \tag{2.10}$$

Здесь и далее вариация $\delta x(t) = \delta x(x_t) = \delta x(t, x(t))$, $\mathrm{div}\delta x = \mathrm{div}_{x_t}\delta x(x_t)$ и

$$\triangle_{\tilde{u}} f_1(t, x(t), u(t)) = f_1(t, x(t), \tilde{u}(t)) - f_1(t, x(t)u(t)),$$
$$\triangle_{\tilde{u}}\mathrm{div}_x f_1(t, x(t), u(t)) = \mathrm{div}_x\triangle_{\tilde{u}} f_1(t, x(t), u(t)).$$

Вариация δx и дивергенция δx удовлетворяют уравнениям [9]

$$\frac{d\delta x}{dt} = \frac{\partial f(t, x(t), u(t))}{\partial x}\delta x + \triangle_{\tilde{u}} f_1(t, x(t), u(t)) + \\ + \int_{M_{t,u}} \frac{\partial f_2(t, x(t), y_t)}{\partial y}\delta x(y_t)\rho(t, y_t)dy_t, \tag{2.11}$$

$$\frac{d\mathrm{div}\delta x}{dt} = \frac{\partial\mathrm{div}_x f(t, x(t), u(t))}{\partial x}\delta x(t) + \triangle_{\tilde{u}}\mathrm{div}_x f_1(t, x(t), u(t)) + \\ + \int_{Mt,u} \frac{\partial\mathrm{div}_x f_2(t, x(t), y_t)}{\partial y}\delta x(y_t)\rho(t, y_t)dy_t, \tag{2.12}$$

с начальными условиями

$$\delta x(0) = 0, \quad \mathrm{div}\delta x(0) = 0. \tag{2.13}$$

При этом $\delta\rho = \delta\rho(x(t))$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\delta\rho}{dt} = -\delta\rho\mathrm{div}_x f(t, x(t)u(t)) - \rho\frac{d}{dt}\mathrm{div}\delta x$$

или

$$\frac{d}{dt}(\delta\rho + \rho\mathrm{div}\delta x) = -(\delta\rho + \rho\mathrm{div}\delta x)\mathrm{div}_x f.$$

Отсюда с учетом $\delta\rho(0) = 0$ следует

$$\delta\rho + \rho\,\mathrm{div}_x\delta x = 0. \tag{2.14}$$

Введем далее для краткости следующие обозначения:

$$y^*(t, x_0, u) = (x^*(t, x_0, u), \rho(t, x_0, u)),$$
$$\delta y^*(t, y_0) = (\delta x^*(t, x_0), \delta\rho(x(t, x_0, u))).$$

Из равенства (2.9) с учетом (2.10) имеем

$$\begin{gathered} I(\tilde{u}) \leq \max_{t\in S(u,\triangle u)} \max_{x_0\in Q_t(u,\triangle u)} \varphi(t,y(t,x_0,u))+ \\ + \max_{t\in S(u,\triangle u)} \max_{x_0\in Q_t(u,\triangle u)} \frac{\partial\varphi(t,y(t,x_0,u))}{\partial y}\delta y(t,x_0)+o_1 = \\ = \max_{t\in T(u)} \max_{x_0\in R_t(u)} \varphi(t,y(t,x_0,u))+ \\ + \max_{t\in T(u)} \max_{x_0\in R_t(u)} \frac{\partial\varphi(t,y(t,x_0,u))}{\partial y}\delta y(t,x_0)+o_1+o_2, \end{gathered} \tag{2.15}$$

где

$$o_1 = \max_{t\in[0,T]} \max_{x_0\in M_0} |o(t,x_0,\|\triangle x\|_c+\|\triangle\rho\|_c)|, \tag{2.16}$$

$$\begin{gathered} o_2 = \max_{t\in S(u,\triangle u)} \max_{x_0\in Q_t(u,\triangle u)} \frac{\partial\varphi(t,y(t,x_0,u))}{\partial y}\delta y(t,x_0)- \\ - \max_{t\in T(u)} \max_{x_0\in R_t(u)} \frac{\partial\varphi(t,y(t,x_0,u))}{\partial y}\delta y(t,x_0). \end{gathered} \tag{2.17}$$

Используя (2.10), (2.16) получаем

$$\begin{gathered} I(\tilde{u}) \geq \max_{t\in TN} \max_{x_0\in M_0} \Big\{\varphi(t,y(t,x_0,u))+ \\ +\frac{\partial\varphi(t,y(t,x_0,u))}{\partial y}\delta y(t,x_0)\Big\} - o_1 \geq \\ \geq \max_{t\in T(u)} \max_{x_0\in R_t(u)} \Big\{\varphi(t,y(t,x_0,u))+ \\ +\frac{\partial\varphi(t,y(t,x_0,u))}{\partial y}\delta y(t,x_0)\Big\} - o_1 = \\ = \max_{t\in T(u)} \max_{x_0\in R_t(u)} \varphi(t,y(t,x_0,u))+ \\ + \max_{t\in T(u)} \max_{x_0\in R_t(u)} \frac{\partial\varphi(t,y(t,x_0,u))}{\partial y}\delta y(t,x_0)-o_1. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Поскольку

$$I(u) = \max_{t\in T(u)} \max_{x_0\in R_t(u)} \varphi(t,y(t,x_0,u)),$$

то из соотношений (2.15) и (2.18) следует

$$\delta I - o_1 \leq \triangle I \leq \delta I + o_1 + o_2, \tag{2.19}$$

где $\triangle I = I(\tilde{u}) - I(u)$ — полное приращение функционала (1.9);

$$\delta I = \max_{t\in T(u)} \max_{x_0\in R_t(u)} \frac{\partial\varphi(t,y(t,x_0,u))}{\partial y}\delta y(t,x_0). \tag{2.20}$$

Преобразуем правую часть равенства (2.20). В связи с этим при $\bar{t} \in T(u), \bar{x}_0 \in R_t(u)$ рассмотрим

$$\delta\varphi(\bar{t}, \bar{x}_0) = \frac{\partial\varphi(\bar{t}, y(\bar{t}, \bar{x}_0, u))}{\partial y}\delta y(\bar{t}, \bar{x}_0). \tag{2.21}$$

Введем вспомогательные вектор-функции $\psi(t,x)$ и $\bar{\psi}(t)$, используя уравнения (2.11), (2.12) и равенства (2.13), (2.14), и преобразуем $\delta\varphi$.

Обозначим $\bar{x}(t) = x(t, \bar{x}_0, u)$, $\bar{\rho}(t) = \rho(t, \bar{x}_0(t))$. Пусть

$$\bar{\lambda}(t, \bar{t}, x_0) = \bar{\lambda}(t) \equiv \bar{\lambda} = \frac{\partial\varphi(\bar{t}, \bar{x}(\bar{t}), \bar{\rho}(\bar{t}))}{\partial\rho}\bar{\rho}(\bar{t}), \quad t \in [0, \bar{t}], \tag{2.22}$$

а вектор-функции $\bar{\psi}(t)$ и $\psi(t,x)$ удовлетворяют на пучке траекторий, соответствующих управлению $u = u(t)$, уравнениям

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} = -\Big(\frac{\partial f(t, \bar{x}(t), u(t))}{\partial\bar{x}}\Big)^*\bar{\psi} - \bar{\lambda}\Big(\frac{\partial\,\mathrm{div}_{\bar{x}} f(t, \bar{x}(t), u(t))}{\partial\bar{x}}\Big)^*, \tag{2.23}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\psi(t, x(t))}{dt} = -\Big(\frac{\partial f(t, x(t), u(t))}{\partial x}\Big)^*\psi - \\ -\Big(\frac{\partial f_2(t, \bar{x}(t), x(t))}{\partial x}\Big)^*\bar{\psi}(t) - \Big(\frac{\partial\,\mathrm{div}_{\bar{x}} f_2(t, \bar{x}(t), x(t))}{\partial x}\Big)^*\bar{\lambda} - \\ -\int_{M_{t,u}}\Big(\frac{\partial f_2(t, y_t, x_t)}{\partial x}\Big)^*\psi(t, y_t)\rho(t, y_t)dy_t\end{gathered} \tag{2.24}$$

при конечных условиях

$$\bar{\psi}(\bar{t}) = -\Big(\frac{\partial\varphi(\bar{t}, \bar{x}(t), \bar{\rho}(\bar{t}))}{\partial x}\Big)^*, \tag{2.25}$$

$$\psi(\bar{t}, x) \equiv 0, \quad x \in M_{\bar{t},u}. \tag{2.26}$$

Вариация (2.21) с учетом (2.22)–(2.26) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}\delta\varphi(\bar{t}, \bar{x}_0) = -\int_0^{\bar{t}}[\bar{\psi}^*(t)\triangle_{\tilde{u}} f_1(t, \bar{x}(t), u(t)) + \bar{\lambda}\triangle_{\tilde{u}}\mathrm{div}_x f_1(t, \bar{x}(t), u(t))]dt - \\ -\int_0^{\bar{t}}\int_{M_{t,u}}\psi^*(t, x_t)\triangle_{\tilde{u}} f_1(t, x_t, u(t))\rho(t, x_t)dx_t dt.\end{gathered} \tag{2.27}$$

Заметим, что по построению функции $\bar{\psi}(t)$ и $\bar{\lambda}(t)$ зависят от $\bar{x}_0$ и определены на интервале $[0, \bar{t}]$. Подчеркивая это, будем записывать $\bar{\psi}(t) = \bar{\psi}(t, \bar{t}, \bar{x}_0)$, $\bar{\lambda}(t) = \bar{\lambda}(t, \bar{t}, \bar{x}_0)$. Аналогично $\psi(t,x)$ определена на сечениях $M_{t,u}$ при $t \in [0, \bar{t}]$. Поэтому будем также использовать запись $\psi(t, \bar{t}, x)$ для вектор-функции $\psi(t,x)$. Для упрощения записи в дальнейшем доопределим указанные выше функции на весь интервал $[0, T]$

следующим образом:

$$\bar{\psi}(t, \bar{t}, \bar{x}_0) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t > \bar{t};$$
$$\bar{\lambda}(t, \bar{t}, \bar{x}_0) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t > \bar{t};$$
$$\psi(t, \bar{t}, x) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t > \bar{t}.$$

3. Необходимые условия оптимальности.

Используя представление вариации $\delta\varphi$ в виде (2.27) с учетом (2.19)–(2.21), докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $u^0 = u^0(t)$ — оптимальное управление, тогда при $t \in [0, T]$ выполняется соотношение*

$$\begin{aligned} \min_{u\in U} \max_{\bar{t}\in T(u^0)} \max_{\bar{x}_0\in R_{\bar{t}}(u^0)} \{ & \bar{\psi}^{0*}(t, \bar{t}, \bar{x}_0)\triangle_{u^0} f_1(t, \bar{x}^0(t), u) + \\ & + \bar{\lambda}^0(t, \bar{t}, \bar{x}_0)\triangle_{u^0}\mathrm{div} f_1(t, \bar{x}^0(t), u) + \\ & + \int_{M_{t,u^0}} \psi^{0*}(t, \bar{t}, y_t)\triangle_{u^0} f_1(t, y_t, u)\rho^0(t, y_t)dy_t\} = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь $\bar{x}^0(t) = x(t, \bar{x}_0, u)$; $\rho^0(t, x)$ соответствует управлению u^0, а $\bar{\psi}^0$, $\bar{\lambda}^0$, ψ^0 удовлетворяют (2.22)–(2.26) на оптимальном процессе, т.е. на решении системы (1.1), (1.2) при $u = u^0(t)$.

Доказательство. Доказательство проводится стандартным образом с использованием игольчатой вариации

$$\triangle u_\delta(t) = \begin{cases} \bar{u} - u^0(t), & t \in [0, \bar{t}] \cap [\hat{t}, \hat{t} + \delta), \\ 0, & t \,\bar{\in}\, [\hat{t}, \hat{t} + \delta). \end{cases}$$

Очевидно, с учетом неравенств (2.19) и представления (2.27) достаточно показать, что величины o_1 и o_2, определенные равенствами (2.16), (2.17), имеют более высокий порядок малости, чем δ из игольчатой вариации. Нетрудно показать, что $o(t, x_0, \|\triangle x\|_c + \|\triangle\rho\|_c)$ из равенства (2.10) более высокого порядка малости, чем

$$\|\triangle_u f_1\|_L + \|\triangle_u \mathrm{div}_x f_1\|_L,$$

и, следовательно, более высокого, чем δ. Из непрерывной зависимости $o(t, x_0, \|\triangle x_c\| + \|\triangle\rho\|_c)$ по t и x_0, и компактности множеств T_0 и M_0 следует, что o_1, определенное равенством (2.10) так же более высокого порядка малости, чем δ.

Рассмотрим теперь величину o_2. Отметим прежде всего, что вектор-функция $\partial\varphi(t, y(t, x_0, u))/\partial y$ непрерывна по совокупности переменных $(t, x_0) \in T_0 \times M_0$ и, следовательно, равномерно непрерывна на множестве $T_0 \times M_0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $\gamma > 0$, такое, что при $\|x_0'' - x_0'\| < \gamma$ выполняется

$$\left|\frac{\partial\varphi(t, y(t, x_0'', u))}{\partial y} - \frac{\partial\varphi(t, y(t, x_0', u))}{\partial y}\right| < \varepsilon$$

для всех $t \in T_0$ и $x_0', x_0'' \in M_0$. По полученному γ выберем согласно лемме 1 $\bar\delta > 0$ так, что при любом $\delta < \bar\delta$ для всякого $x_0'' \in R_t(u^0 + \triangle u_\delta)$, $t \in T(u^0)$, можно найти $x_0' \in R_t(u)$, при котором $|x_0'' - x_0'| < \gamma$. Будем считать $\bar\delta$ достаточно малым, таким, чтобы при $\delta < \bar\delta$ имело место утверждение леммы 2, а именно $T(u^0) = T(u^0 + \triangle u_\delta)$. Фиксируем некоторое $\delta < \bar\delta$. Пусть $\bar t$ и $\bar x_0''$ таковы, что

$$\max_{t \in S(u^0, \triangle u_\delta)} \max_{x_0 \in Q_t(u^0, \triangle u_\delta)} \left\{\frac{\partial\varphi(t, y(t, x_0, u))}{\partial y}\delta y(t, x_0)\right\} = \\ = \frac{\partial\varphi(\bar t, y(\bar t, \bar x_0'', u))}{\partial y}\delta y(\bar t, \bar x_0'').$$

В силу непрерывности $\delta y(t, x_0)$ по x_0 выбираем γ так, что

$$|\delta y(\bar t, \bar x_0'') - \delta y(\bar t, \bar x_0')| < \varepsilon|\delta y(\bar t, \bar x_0'')|.$$

Тогда, учитывая, что $T(u^0) = S(u^0, \triangle u_\delta)$, $R_t(u^0) \subset Q_y(u^0, \triangle u_\delta)$, имеем

$$0 \le \alpha_\delta = \frac{\partial\varphi(\bar t, y(\bar t, \bar x_0'', u))}{\partial y}\delta y(\bar t, \bar x_0'') - \frac{\partial\varphi(\bar t, y(\bar t, \bar x_0', u))}{\partial y}\delta y(\bar t, \bar x_0') \le \\ \le \left|\frac{\partial\varphi(\bar t, y(\bar t, \bar x_0'', u))}{\partial y} - \frac{\partial\varphi(\bar t, y(\bar t, \bar x_0', u))}{\partial y}\right| |\delta y(\bar t, \bar x_0'')| + \\ + \left|\frac{\partial\varphi(\bar t, y(\bar t, \bar x_0', u))}{\partial y}\right| |\delta y(\bar t, \bar x_0'') - \delta y(\bar t, \bar x_0')|.$$

В силу ограниченности

$$\left|\frac{\partial\varphi(t, y(t, x_0, u))}{\partial y}\right| \le K, \quad (t, x_0) \in T_0 \times M_0,$$

и предыдущих неравенств получим $\alpha_\delta \le \varepsilon(K+1)|\delta y(\bar t, x_0'')|$, а так как $|\delta y(t, x_0)|$ имеет порядок малости, не меньший δ, то $\alpha_\delta = o(\delta)$, и, следовательно, o_2 имеет такой же порядок малости.

Отметим также, что в точках разрыва управления $u_0 = u_0(t)$ в соотношении (3.1) необходимо рассматривать соответствующие односторонние пределы. $\square$

4. Заключение

На основе полученной вариации оптимизируемого функционала в виде (2.27), выбирая тот или иной способ варьирования управления (см. например [5]), можно получить необходимые условия оптимальности и в другой форме. Отметим также, что исследование динамики частиц с учетом их взаимодействия привело к необходимости введения интегро-дифференциального уравнения (2.24). Таким образом, в отличие от случая $f_2 \equiv 0$, не учитывающего взаимодействие частиц [8], необходимые условия оптимальности дополнились слагаемыми, содержащими распределенное влияние пучка через сопряженную переменную $\psi(t,x)$. Однако, общая схема построения направленных методов оптимизации с использованием полученных условий оптимальности и вариации функционала, очевидно, сохраняются [8, 9].

Список литературы

1. Арсеньев А. А. Единственность и существование в малом классического решения системы уравнений Власова / А. А. Арсеньев // Докл. АН СССР. — 1974. — Т. 218, № 1. — С. 11—12.
2. Арсеньев А. А. Существование в целом слабого решения системы уравнений Власова / А. А. Арсеньев // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1975. — Т. 16, № 1. — С. 136–147.
3. Березин Ю. А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы / Ю. А. Березин, В. А. Вшивков. — Новосибирск, 1980. — 96 с.
4. Власов А. А. Теория многих частиц / А. А. Власов. — М.; Л., 1950. — 348 с.
5. Демьянов В. Ф. Негладкие задачи теории оптимизации и управления / В. Ф. Демьянов, Т. К. Виноградова, В. Н. Никулина и др. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. — 324 с.
6. Дривотин О. И. О самосогласованных распределениях для пучка заряженных частиц в продольном магнитном поле / О. И. Дривотин, Д. А. Овсянников // Докл. РАН. — 1994. — Т. 33, № 3. — С. 284–287.
7. Овсянников А. Д. Управление пучком заряженных частиц с учетом их взаимодействия / А. Д. Овсянников // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. — 2009. — Вып. 2. — С. 81–91.
8. Овсянников Д. А. Математические методы управления пучками / Д. А. Овсянников. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. — 228 с.
9. Овсянников Д. А. Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц / Д. А. Овсянников. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. — 312 с.
10. Овсянников Д. А. Моделирование интенсивных пучков заряженных частиц / Д. А. Овсянников, О. И. Дривотин. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2003. — 174 с.
11. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М.; Л.: Гостехиздат, 1945. — 406 с.
12. Ovsyannikov D. A. Modeling and Optimization Problems of Charged Particle Beams Dynamics / D. A. Ovsyannikov // Proc. of the 4th European Control Conference. Brussels, 1997. — P. 390–394.

13. Ovsyannikov D. Proceeding of the International Computational Accelerator Physics Conference (ICAP 2004). – St. Petersburg, Russia, 2004 / D. Ovsyannikov, M. Berz, K. Makino // Special Issue of Nuclear Instruments and Methods in Physics Reseach A. — 2006. — Vol. 558. — № 1.
14. Ovsyannikov D. Proceeding of the 15th International Workshop on Beam Dynamics and Optimization (BDO 2008). – St. Petersburg, Florida, USA, 2008 / D. Ovsyannikov, M. Berz, K. Makino // Special Issue of International Journal of Modern Physics A. — 2009. — Vol. 24. — № 5.

D. A. Ovsyannikov

Minimax in the optimization problem of charged particle beam dynamics

Abstract. The control problem of charged particle beam with taking into account their interaction is considered. Minimax criteria is investigated. Particle dynamics is described by a system of integro-differential equations. Functional variation and necessary optimality conditions are presented.

Keywords: minimax, beam, interaction of particles, optimization.

Овсянников Дмитрий Александрович, доктор физ.-мат. наук профессор, Санкт-Петербургский государственный университет, 198508 СПб, Старый Петергоф, Университетский пр.35, тел.: (812) 428-47-29, (dovs@mail.ru)

Ovsyannikov Dmitry Alexandrovich, Doctor of physical & mathematical sciences, Professor, Saint-Petersburg State University, 198504 SPb, St. Petergoff, Universitetskij pr.35, Phone: (812) 428-47-29, (dovs@mail.ru)