Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 52—62

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 518.517

Задачи оптимального управления, возникающие при моделировании процессов химической ректификации *

А. В. Аргучинцев
Иркутский государственный университет

В. П. Поплевко
Иркутский государственный университет

Аннотация. В статье рассматривается процесс химической ректификации в вертикальной колонне, описываемый системами дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Для задачи оптимального управления процессами разделения смеси в ректификационной колонне в классе гладких граничных управлений получены неклассические необходимые условия оптимальности.

Ключевые слова: ректификация, управление потоком, гладкое управление, вариационный принцип максимума.

1. Постановка задачи

Исследование процессов химической технологии представляет собой сложную задачу, так как эти процессы описываются достаточно громоздкими системами дифференциальных уравнений в частных производных.

Основу процесса ректификации составляют тепломассообмен и гидродинамика взаимодействующих потоков. Этот процесс характеризуется большим количеством параметров, связанных между собой сложными зависимостями. Значительная часть параметров является функциями временной и пространственной координат.

При исследовании процесса ректификации в основном интерес представляет распределение концентраций компонентов по длине колонны в

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 08–01–00709, 08–01–98007.

статических и динамических режимах ее работы. Поэтому, как правило, математическая модель процесса ректификации представляет собой систему уравнений, записанных относительно концентраций компонентов. Примером такой математической модели является следующая система уравнений [1]:

$$\frac{\partial(H_x x_i)}{\partial t} - \frac{\partial(L x_i)}{\partial s} = k_{y_i}(y_i - y_i^*) + \Phi_{x_i},$$

$$\frac{\partial(H_y y_i)}{\partial t} + \frac{\partial(V y_i)}{\partial s} = k_{y_i}(y_i^* - y_i) + \Phi_{y_i},$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{N} y_i = 1, \quad i = \overline{1, N}.$$

Здесь $x_i = x_i(s,t)$, $y_i = y_i(s,t)$ – концентрации i-го компонента в жидкой и паровой фазах; $L = L(s,t)$, $V = V(s,t)$ – потоки жидкости и пара в колонне; $H_x = H_x(s,t)$, $H_y = H_y(s,t)$ – удерживающие способности колонны по жидкости и пару; $\Phi_{x_i} = \Phi_{x_i}(s,t)$, $\Phi_{y_i} = \Phi_{y_i}(s,t)$ – плотности вводимых потоков i-го компонента исходной смеси в жидкой и паровой фазах; $s \in [s_0, s_1]$ – координата вдоль ректификационной колонны; $t \in [t_0, t_1]$ – время. Коэффициент массопередачи в паровой фазе имеет вид:

$$k_{y_i} = k_y \equiv kV(s,t), \quad k = const.$$

Концентрация паровой компоненты в равновесной ситуации находится по формуле:

$$y_i^*(s,t) = \widetilde{p}(s,t) x_i(s,t),$$

где $\widetilde{p}(s,t)$ определяется из эксперимента.

Вверху и внизу колонны имеются две емкости – дефлегматор («d») и куб («k»), в которых накапливаются соответствующие «легкие» и «тяжелые» компоненты разделения исходной смеси. Исследуем подробнее процессы массообмена, проходящие в кубе. Поток ректификационной жидкости $L_k(t) = L(s_0, t)$, выходящий из нижней части колонны, поступает в куб ($s = s_0$). Часть потока испаряется в кипятильнике и возвращается в колонну в виде пара $V_k(t) = V(s_0, t)$. Другая часть отбирается в виде готового продукта $W(t)$. Таким образом, концентрация компонентов жидкости $x_{ki}(t)$, находящейся в кубе, определяется из уравнения материального баланса

$$\frac{d(H_{xk}(t) x_{ki}(t))}{dt} = L_k(t) x_i(s_0, t) - V_k(t) y_i(s_0, t) - W(t) x_{ki}(t),$$

$$x_{ki}(t_0) = x_{i0}(s_0), \quad i = \overline{1, N}.$$

Здесь $y_i(s_0, t)$ находится из дополнительного соотношения, учитывающего различные типы кипятильников, стоящих в кубе,

$$y_i(s_0, t) = (y_i^*(s_0, t) - x_{ki}(t))a_k + x_{ki}(t),$$

$a_k = 0$ – для полного испарителя и $a_k = 1$ – для парциального испарителя. Общее количество жидкости в кубе $H_{xk}(t)$ рассчитывается из уравнения

$$\frac{dH_{xk}(t)}{dt} = L_k(t) - V_k(t) - W(t), \quad H_{xk}(t_0) = H_{xk0}.$$

Исследуем уравнения массообмена в дефлегматоре ($s = s_1$). Паровой поток $V_d(t) = V(s_1, t)$, выходящий вверху колонны, поступает в дефлегматор, где конденсируется. Часть потока жидкости, выходящего из дефлегматора, отбирается в виде готового продукта $D(t)$, другая часть поступает в верхнюю часть колонны в виде потока орошения $L_d(t) = L(s_1, t)$. Уравнение покомпонентного материального баланса для концентрации жидкости в дефлегматоре $x_{di}(t)$:

$$\frac{d(H_{xd}(t)x_{di}(t))}{dt} = V_d(t)y_{di}(t) - (L_d(t) + D(t))x_{di}(t),$$

$$x_{di}(t_0) = x_{i0}(s_1), \quad i = \overline{1, N},$$

где

$$y_{di}(t) = y_i(s_1, t) + a_d(y_i^*(s_1, t) - y_i(s_1, t)),$$

a_d – эффективность дефлегматора ($a_d = 0$ – для полного конденсатора и $a_d = 1$ – для парциального конденсатора). Количество жидкости в дефлегматоре $H_{xd}(t)$ определяется из уравнения общего материального баланса потоков:

$$\frac{dH_{xd}(t)}{dt} = V_d(t) - L_d(t) - D(t), \quad H_{xd}(t_0) = H_{xd0}.$$

Введем основные предположения:

1) подвод сырья осуществляется только в жидкой фазе в σ–окрестности точки $s = s_*$

$$\Phi_{y_i}(s, t) = 0,$$

$$\Phi_{x_i}(s, t) = F_x(t)\phi_{x_i}(s), \quad s_* - \sigma \le s \le s_* + \sigma,$$

где $F_x(t)$, $\phi_{x_i}(s)$ – заданные функции;

2) в ректификационной колонне с увеличением потоков $L(s, t)$ и $V(s, t)$ увеличиваются удерживающие способности $H_x(s, t)$ и $H_y(s, t)$. Будем считать эту зависимость прямо пропорциональной

$$\frac{L(s, t)}{H_x(s, t)} = c_1 = const, \quad \frac{V(s, t)}{H_y(s, t)} = c_2 = const;$$

3) поток пара в колонне зависит только от времени t и равен потокам пара в дефлегматоре и кубе:

$$V(s,t) \equiv V(t), \quad V(t) = V_d(t) = V_k(t);$$

4) потоки жидкости в колонне, дефлегматоре и кубе зависят только от времени t и определяются следующим образом:

$$L(s,t) \equiv L(t) + L^*(t),$$

$$L^*(t) = \begin{cases} F_x(t), & s_0 \le s < s_* - \sigma, \\ F_x(t) \int\limits_{s_*-\sigma}^{s_*+\sigma} \phi_{x_i}(s)\,ds, & s_* - \sigma \le s \le s_* + \sigma, \\ 0, & s_* + \sigma < s \le s_1, \end{cases}$$

$$L_d(t) = L(t), \qquad L_k(t) = L(t) + F_x(t);$$

5) должно выполняться следующее условие между количеством исходной смеси, вводимой в колонну, и потоками готовых продуктов, отбираемых в дефлегматоре и кубе: $F_x(t) \ge D(t) + W(t)$. Если колонна работает в «статическом» режиме (количество исходной смеси равно количеству готового продукта), справедливо строгое равенство: $F_x(t) = D(t) + W(t)$.

Окончательно система уравнений, описывающая разделение смеси в ректификационной колонне, примет вид:

$$\frac{\partial x_i(s,t)}{\partial t} - c_1 \frac{\partial x_i(s,t)}{\partial s} = A_1(s,t)x_i(s,t) + B_1(s,t)y_i(s,t) + F_1(s,t),$$

$$\frac{\partial y_i(s,t)}{\partial t} + c_2 \frac{\partial y_i(s,t)}{\partial s} = A_2(s,t)x_i(s,t) + B_2(s,t)y_i(s,t) + F_2(s,t), \quad (1.1)$$

где

$$A_1(s,t) = \frac{c_1 F_x(t)\phi_{xi}(s) - c_1 k V(t)\widetilde{p}(s,t) - (L(t) + L^*(t))'}{L(t) + L^*(t)},$$

$$A_2(s,t) = c_2 k \widetilde{p}(s,t), \quad F_1(s,t) = \frac{c_1 F_x(t)\phi_{xi}(s)}{L(t) + L^*(t)}, \quad F_2(s,t) = 0,$$

$$B_1(s,t) = \frac{c_1 k V(t)}{L(t) + L^*(t)}, \quad B_2(s,t) = -(kc_2 + \frac{V'(t)}{V(t)}),$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i(s,t) = 1, \quad \sum_{i=1}^{N} y_i(s,t) = 1, \quad x_i(s,t) > 0, \quad y_i(s,t) > 0,$$

$$s_0 < s < s_1, \quad t_0 < t \le t_1, \quad i = \overline{1,N}.$$

Начальные условия имеют вид:

$$x_i(s,t_0) = x_{i0}(s), \quad y_i(s,t_0) = y_{i0}(s), \quad s_0 \le s \le s_1, \quad i = \overline{1,N}. \quad (1.2)$$

Граничные условия при $t_0 \le t \le t_1$ на границе $s = s_0$:

$$y_i(s_0,t) = (y_i^*(s_0,t) - x_{ki}(t))a_k + x_{ki}(t),$$

$$\frac{d(H_{xk}(t)x_{ki}(t))}{dt} = [L(t) + F_x(t)]x_i(s_0,t) -$$

$$-V_k(t)[(y_i^*(s_0,t) - x_{ki}(t))a_k + x_{ki}(t)] -$$

$$-W(t)x_{ki}(t), \quad x_{ki}(t_0) = x_{i0}(s_0), \ \ i = \overline{1,N};$$

$$\frac{dH_{xk}(t)}{dt} = L(t) + F_x(t) - V(t) - W(t), \quad H_{xk}(t_0) = H_{xk0}; \tag{1.3}$$

и на границе $s = s_1$:

$$x_i(s_1,t) = x_{di}(t),$$

$$\frac{d(H_{xd}(t)x_{di}(t))}{dt} = V(t)[y_i(s_1,t) + a_d(y_i^*(s_1,t) - y_i(s_1,t))] -$$

$$-(L(t) + D(t))x_{di}(t), \quad x_{di}(t_0) = x_{i0}(s_1), \ \ i = \overline{1,N};$$

$$\frac{dH_{xd}(t)}{dt} = V(t) - L(t) - D(t), \quad H_{xd}(t_0) = H_{xd0}. \tag{1.4}$$

Параметры задачи c_1, c_2, k, a_k, a_d, s_0, s_1, s_*, t_0, t_1, σ, H_{xk0}, H_{xd0}, $\widetilde{p}(s,t)$, $F_x(t)$, $\phi_{x_i}(s)$, $x_{i0}(s)$, $y_{i0}(s)$ считаются заданными.

Рассмотрим задачу оптимального управления процессами разделения смеси в ректификационной колонне, описываемую гиперболической системой первого порядка (1.1) с начальными условиями (1.2) и граничными условиями (1.3), (1.4). В качестве управлений выбираются потоки готовых продуктов, отбираемых в кубе $W(t)$ и дефлегматоре $D(t)$. Особенностью поставленной задачи является то, что управления входят в правые части дифференциальных связей (1.3), (1.4) на границах потока $s = s_0$ и $s = s_1$. Предполагается, что $W(t)$ и $D(t)$ принадлежат классу гладких функций, принимающих значения в промежутках

$$W_{min} \le W(t) \le W_{max}, \ D_{min} \le D(t) \le D_{max}. \tag{1.5}$$

В качестве целевого функционала J задается суммарное отклонение концентраций в выходных потоках $x_{di}(t), x_{ki}(t)$ от заданных значений θ_{1i}, θ_{2i}, $i = \overline{1,N}$:

$$J = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_0}^{t_1} [K_{1i}(x_{di}(t) - \theta_{1i})^2 + K_{2i}(x_{ki}(t) - \theta_{2i})^2]\, dt \to min, \tag{1.6}$$

где K_{1i}, K_{2i} – весовые коэффициенты, определяющие ценность продукта.

2. Формула приращения

Для дальнейшего исследования поставленную задачу оптимального управления удобно записать в форме:

$$\frac{\partial x(s,t)}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x(s,t)}{\partial s} = f(x(s,t),s,t),$$

$$x(s,t) \in E^n,\ (s,t) \in \Pi,\ \Pi = S \times T,\ S = [s_0, s_1], T = [t_0, t_1]$$

с начально-краевыми условиями более общего вида:

$$x(s,t_0) = x^0(s), \quad s \in S;$$

$$x^-(s_1,t) = q(t), \quad t \in T,$$

$$\frac{dx^+(s_0,t)}{dt} = g(x^+(s_0,t), u(t), t) + M(t)x^-(s_0,t), \quad t \in T$$

$$x^+(s_0,t_0) = (x^0(s_0))^+.$$

Управления $u(t)$ – непрерывно дифференцируемые на отрезке T вектор-функции, удовлетворяющие ограничениям типа включения

$$u(t) \in U \in E^r, \ \ t \in T,$$

где U компакт. Целью задачи оптимального управления является минимизация функционала

$$J(u) = \int\limits_S \varphi(x(s,t_1),s)\,ds + \iint\limits_\Pi F(x(s,t),s,t)\,ds\,dt,$$

Поставленная задача описывает задачу оптимального управления ректификационной колонной (1.1)–(1.6) с точностью до основных обозначений:

$$x(s,t) = (x_1(s,t), \ldots x_N(s,t), y_1(s,t), \ldots, y_N(s,t));$$

$$y(s,t) = (y_1(s,t), \ldots, y_N(s,t), x_1(s,t), \ldots x_N(s,t));$$

$$u(t) = (W(t), D(t));$$

$$A(s,t) = diag(-c_1, \ldots, -c_1, c_2, \ldots, c_2);$$

$$f(x(s,t),s,t) = \langle A_{1,2}(s,t), x(s,t)\rangle + \langle B_{1,2}(s,t), y(s,t)\rangle + F_{1,2}(s,t)$$

и вида граничных условий в виде дифференциальных связей как при $s = s_0$, так и при $s = s_1$.

Введем вспомогательные функции

$$H(\psi, x, s, t) = \langle \psi, f(x,s,t)\rangle - F(x,s,t),$$

$h(p,x^+(s_0,t),x^-(s_0,t),u(t),t) = \langle p(t), g(x^+(s_0,t),u(t),t) + M(t)x^-(s_0,t)\rangle.$

Представим приращения $\Delta\varphi(x(s,t_1),s)$, $\Delta H(\psi,x,s,t)$ по формуле Тейлора первого порядка и потребуем, чтобы функции $\psi = \psi(s,t)$ и $p = p(t)$ удовлетворяли сопряженной задаче:

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_A + A_s\psi = -H_x(\psi,x,y,s,t), \quad \psi(s,t_1) = -\frac{\partial\varphi(x(s,t_1),s)}{\partial x},$$

$$\psi^+(s_1,t) = 0,\ \psi^-(s_0,t) = -[A^-(s_0,t)]^{-1}M^T p,$$

$$p_t = -h_{x^+} - A^+(s_0,t)\psi^+(s_0,t), \quad p(t_1) = 0. \tag{2.1}$$

Тогда формула приращения функционала примет следующий вид:

$$\Delta J(u) = -\int\limits_T \Delta_{\tilde{u}} h(p(t),x^+(s_0,t),x^-(s_0,t),u(t),t)\,dt + \eta, \tag{2.2}$$

где

$$\eta = \int\limits_S o_\varphi(||\Delta x(s,t_1)||)\,ds - \iint\limits_\Pi o_H(||\Delta x(s,t)||)\,dsdt -$$

$$-\int\limits_T [o_h(||\Delta x^+||) + < \Delta_{\tilde{u}} h_{x^+}, \Delta x^+(s_0,t) > + < \Delta_{\tilde{u}} h_{x^-}, \Delta x^-(s_0,t) >]\,dt.$$

Формула приращения (2.2) представляет собой удобный промежуточный результат при доказательстве необходимых условий оптимальности.

3. Гладкая вариация управления

Дальнейший вариационный анализ исследуемой задачи основан на использовании неклассических вариаций, обеспечивающих гладкость допустимых управлений. Проварьированное управление строится по правилу [2]

$$u_{\varepsilon,\delta}(t) = u(t + \varepsilon\delta(t)), \quad t \in T, \tag{3.1}$$

$\varepsilon \in [0,1]$ – параметр, характеризующий малость вариации, $\delta(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$t_0 \le t + \delta(t) \le t_1,\ t \in T.$$

Выбирая управление по правилу (3.1) и используя разложение

$$\Delta u = u_t(t)\varepsilon\delta(t) + o(\varepsilon),$$

перепишем формулу приращения целевого функционала

$$\Delta J(u) = -\int\limits_T \Delta h(p(t), x^+(s_0,t), x^-(s_0,t), u(t), t)\,dt + \eta =$$

$$= -\int\limits_T \langle h_u, \Delta u\rangle\,dt - \int\limits_T o(||\Delta u||)\,dt + \eta =$$

$$= -\varepsilon \int\limits_T \langle h_u, u_t(t)\rangle \delta(t)\,dt + \eta_1,$$

где

$$\eta_1 = \eta - \int\limits_T o(||\Delta u||)\,dt - \int\limits_T \langle h_u, o(\varepsilon)\rangle\,dt =$$

$$= \int\limits_S o_\varphi(||\Delta x(s,t_1)||)\,ds - \iint\limits_\Pi o_H(||\Delta x(s,t)||)\,dsdt - \int\limits_T [o_h(||\Delta x^+||) +$$

$$+ < \Delta_{\widetilde{u}} h_{x^+}, \Delta x^+(s_0,t) > + < \Delta_{\widetilde{u}} h_{x^-}, \Delta x^-(s_0,t) >]\,dt -$$

$$-\int\limits_T o(||\Delta u||)\,dt - \int\limits_T \langle h_u, o(\varepsilon)\rangle\,dt.$$

Учитывая оценки

$$||\Delta x^+(s_0,t)|| \le K_1 \int\limits_{t_0}^{t} ||\Delta u||\,d\tau, \quad K_1 = L_2 e^{L_1(t_1-t_0)},$$

$$||\Delta x(s,t)|| \le K_2 \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t} ||\Delta u||\,d\tau\,d\tau, \quad K_2 = K_1 e^{M_1(t_1-t_0)},$$

где M_1 – константа Липшица для функции f, получаем:

$$|\eta_1| \le |\int\limits_S o(\varepsilon)\,ds| + |\iint\limits_\Pi o(\varepsilon)\,dsdt| + |\int\limits_T o(\varepsilon)\,dt| +$$

$$+|\int\limits_T o(\varepsilon)\,dt| + |\int\limits_T \langle h_u, o(\varepsilon)\rangle\,dt|.$$

Следовательно,

$$\Delta J(u) = -\varepsilon \int\limits_T \langle h_u, u_t(t)\rangle \delta(t)\,dt + o(\varepsilon).$$

Отсюда, в силу произвольности $\delta(t)$, следует

Теорема 1. *Пусть процесс $\{u, x\}$ является оптимальным в рассматриваемой задаче. Тогда выполняется условие*

$$\langle h_u(p(t), x^+(s_0, t), x^-(s_0, t), u(t), t), u_t(t)\rangle = 0, \ t \in T,$$

где $p(t)$ решение сопряженной задачи (2.1) при $u = u(t)$.

4. Численный метод

Для реализации численного метода [3] введем в рассмотрение скалярную функцию

$$\omega(p(t), x^+, x^-, u(t), u_t(t), t) = \langle h_u(p(t), x^+, x^-, u(t), t), u_t(t)\rangle.$$

Пусть задано начальное приближение из класса допустимых функций $u^0 = u^0(t)$. Опишем k-ю итерацию метода, т.е. переход от $u^k(t)$ к $u^{k+1}(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Для управления $u^k(t)$ вычисляются $p^k = p^k(t), \psi^k = \psi^k(s, t)$ решения сопряженной системы гиперболических уравнений, строится $\omega_k(t) = \omega(p^k(t), x^{+k}, x^{-k}, u^k(t), u^k_t(t), t)$. Если $\omega_k(t) = 0$, $t \in T$, то управление u^k удовлетворяет необходимому условию оптимальности, и алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае выделим области

$$\Omega^+_k = \{t \in T : \omega_k(t) > 0\},$$
$$\Omega^-_k = \{t \in T : \omega_k(t) < 0\}.$$

Определим гладкую функцию $\delta_k(t)$, удовлетворяющую условиям

$$\delta_k(t) = \begin{cases} > 0, & t \in \Omega^+_k, \\ < 0, & t \in \Omega^-_k, \\ 0, & t \notin \Omega^+_k \cup \Omega^-_k. \end{cases}$$

Построим однопараметрическое семейство управлений

$$u^k_\varepsilon(t) = u^k(t + \varepsilon\delta_k(t))$$

и решим задачу одномерной минимизации

$$\varepsilon_k : \ J(u^k_\varepsilon) \to min, \ \varepsilon \in [0, 1].$$

Следующее приближение находится по формуле

$$u^{k+1} = u^k_{\varepsilon_k}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Сформулируем утверждение о сходимости метода.

Теорема 2. *Пусть в дополнение к сделанным ранее предположениям на параметры задачи*
1) целевой функционал $J(u)$ ограничен снизу на множестве допустимых процессов,
2) вектор-функции $\varphi_x(x,s)$, $F_x(x,s,t)$и матричные функции $f_x(x,s,t)$ удовлетворяет условию Липшица по x с одной константой для всех допустимых процессов,
3) вектор-функция $g_u(x^+(t),u,t)$удовлетворяет условию Липшица по u и x^+ для всех допустимых процессов.

Тогда последовательность управлений, генерируемая методом, является релаксационной:

$$J(u^{k+1}) \leq J(u^k),\ k = 0,1,2,\ldots,$$

и сходится в смысле

$$\mu(u^k) = \int\limits_T \delta_k(t)\omega_k(t)dt \to 0,\ k \to \infty.$$

В классе гладких управляющих воздействий игольчатая вариация не обеспечивает гладкость управления, поэтому применялась специальная вариация (3.1).

Если бы исходная задача оптимального управления исследовалась в классе ограниченных и измеримых управлений,тогда на основе формулы (2.2) можно было сформулировать необходимое условие оптимальности первого порядка типа классического принципа максимума Л.С. Понтрягина. Для решения таких задач применяются итерационные методы последовательных приближений.

Список литературы

1. Демиденко Н. Д. Моделирование и оптимизация систем с распределенными параметрами / Н. Д. Демиденко, В. И. Потапов, Ю. И. Шокин. — Новосибирск: Наука, 2006. — 551 с.
2. Аргучинцев А. В. Оптимальное управление гиперболическими системами / А. В. Аргучинцев. — М.: Физматлит, 2007. — 168 с.
3. Аргучинцев А. В. Оптимизация одного класса гиперболических систем с гладкими управлениями / А. В. Аргучинцев, В. П. Поплевко // Известия вузов. Математика. — 2009. — № 7. — С.71–76.

A. V. Arguchintsev, V. P. Poplevko

Optimal control problems arising in mathematical modeling of processes of chemical fractionization

Abstract. A process of chemical fractionization in a vertical tower is considered. This process is described by a system of first-order partial differential equations. Non-classic necessary optimality conditions are given for the optimal control problem in a class of smooth admissible controls.

Keywords: fractionization, flows control, optimal control, variational maximum principle.

Аргучинцев Александр Валерьевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952) 20-13-07, (prorectornir@isu.ru)

Поплевко Василиса Павловна, преподаватель, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952) 20-13-07, (vasilisa@math.isu.ru)

Arguchintsev Alexander, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003, Phone: (3952) 20-13-07, (prorectornir@isu.ru)

Poplevko Vasilisa, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003, Phone: (3952) 20-13-07, (vasilisa@math.isu.ru)