Серия «Математика»
2017. Т. 19. С. 105—112

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 518.517
MSC 35L05, 45D05
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.19.105

Идентификация динамики внешней силы при моделировании колебаний

А. И. Дрегля
Иркутский государственный университет

Н. А. Сидоров
Иркутский государственный университет

Аннотация. Рассматривается линейное неоднородное волновое уравнение с начальными и граничными условиями. Предполагается, что неоднородные члены, описывающие в модели внешнюю силу, раскладываются в ряды Фурье равномерно сходящиеся вместе с производными до второго порядка. При этом коэффициенты разложения, зависящие от времени, подлежат определению. С целью однозначного определения искомых коэффициентов вводятся нелокальные граничные условия в соответствии с требуемой в модели усредненной динамикой колебаний. Используемое в работе нелокальное условие дает возможность наблюдать усредненную динамику колебаний. Приведены достаточные условия, когда поставленная задача идентификации имеет единственное классическое решение. Указан способ нахождения решения поставленной задачи сведением к системе интегральных уравнений Вольтерры первого рода, явно построенной в работе. Решение строится в явном виде в общем случае сведением к интегральным уравнениям Вольтерры второго рода с ядрами, допускающими построение резольвенты с помощью преобразования Лапласа. Таким образом, в работе дан способ решения проблемы идентификации в явном аналитическом виде. Приведен иллюстративный пример, демонстрирующий эффективность предложенного подхода. Постановка проблемы идентификации и способ ее решения допускают обобщения и в случае системы неоднородных уравнений колебаний. Изложенные результаты могут быть полезны при постановке и решении некоторых задач в оптимизации граничным управлением процесса колебаний.

Ключевые слова: начальные и граничные задачи, волновое уравнение, нелокальные граничные условия, ряды Фурье, резольвента, преобразование Лапласа, уравнения Вольтерры, интегральные наблюдения, идентификация внешней силы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим неоднородное волновое уравнение, описывающее вынужденные колебания струны под действием внешней силы, при нулевых начальных и граничных условиях

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t), \;\; 0 < x < l, \;\; 0 \leq t \leq T < \infty. \tag{1.1}$$

Функция $F(x,t) = f(x) + \sum_{j=1}^{N} d_i(x) w_j(t)$ описывает выражение плотности (нагрузки) внешней силы в точке $x \in (0,l)$ в момент времени t, [11], с.26.

Предполагается, что непрерывные функции $f(x)$, $d_j(x)$ заданы при $x \in [0,l]$ и имеют непрерывные производные в интервале $(0,l)$ до 2−го порядка, непрерывно-продолжаемые на концы интервала, третьи производные кусочно-непрерывны, и кроме того,

$$f(0) = f(l) = f^{(2)}(0) = f^{(2)}(l) = d_j(0) = d_j(l) = d_j^{(2)}(0) = d_j^{(2)}(l) = 0,$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \;\; d_j(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{jn} \sin \frac{n\pi x}{l}, \;\; j = 1, ..., N,$$

$$|c_n| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right), \;\; |d_{jn}| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Функции $w_j(t)$, характеризующие динамику внешней силы $F(x,t)$, подлежат определению.

Будем рассматривать простейший процесс колебаний с однородными краевыми и начальными условиями

$$\begin{cases} u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

С целью единственности определения функций $w_j(t)$ предполагается, что усредненная динамика колебаний удовлетворяет N нелокальным условиям:

$$\int_0^l L_i(x) u(x,t) dx = \Delta_i(t), \;\; i = 1, ..., N, \;\; 0 \leq t < \infty, \tag{1.3}$$

в которых функции $\Delta_i(t)$ и $L_i(x)$ заданы, причем

$$L_i(x) = \sum_{j=1}^{N} b_{ij} \sin \frac{m_j \pi x}{l}, \;\; m_j \in \mathbb{N}, \Delta_i(0) = \Delta_i^{(1)}(0) = 0.$$

Замечание 1. Нелокальное условие (1.3) естественно трактовать, как возможность наблюдения усредненной динамики колебаний. Интегральные условия наблюдений ранее использовались при решении ряда обратных задач для гиперболических уравнений [4]–[6], [9; 10].

Таким образом, далее будет решаться вопрос об идентификации функций $w_j(t)$, $j = 1, ..., N$ при моделировании простейших колебаний, описываемых уравнением (1.1) с условиями (1.2)–(1.3).

2. Теорема существования и единственности классического решения

Приведем достаточные условия, когда идентифицируемые функции $w_j(t)$ непрерывны и определяются однозначно.

Теорема 1. *Пусть* $\det[b_{ij}]_{i,j=1}^N \neq 0$, $\det[d_{jm_i}]_{i,j}^N \neq 0$. *Тогда задача идентификации функций* $w_j(t)$, $j = 1, ..., N$ *имеет единственное решение в классе непрерывных функций. Более того, эти функции определятся однозначно из системы интегральных уравнений Вольтерры.*

Доказательство. Следуя [11], стр. 96, решение $u(x,t)$ задачи (1.1)–(1.2) будем строить в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{2.1}$$

Тогда в силу начальных условий, отвечающих (1.2), функции $u_n(t)$ должны удовлетворять задачам Коши

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 u_n(t) = c_n + \sum_{j=1}^N d_{jn} w_j(t), \\ u_n(0) = 0, \ u_n'(0) = 0, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{2.2}$$

Решение задач (2.2) имеет вид

$$u_n(t) = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin\left(\frac{\pi n}{l} a(t-s)\right) (c_n + \sum_{j=1}^N d_{jn} w_j(s))\, ds, \ n = 1, 2, \ldots . \tag{2.3}$$

Таким образом, разложение (2.1) искомого решения $u(x,t)$ принимает вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin\left(\frac{\pi n}{l} a(t-s)\right) \left(c_n + \sum_{j=1}^N d_{jn} w_j(s)\right) ds \sin\frac{\pi n x}{l}, \tag{2.4}$$

где

$$\int_0^t \sin\left(\frac{\pi n}{l} a(t-s)\right) ds = \frac{l}{\pi n a}\left(1 - \cos\frac{\pi n}{l} a t\right).$$

С другой стороны, подставив разложение (2.1) в нелокальные граничные условия (1.3), приходим к равенствам

$$\int\limits_0^l \sum_{j=1}^N b_{ij} \sin \frac{m_j \pi x}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{l} u_n(t)\, dx = \Delta_i(t), i = 1, \dots N. \tag{2.5}$$

Так как

$$\int_0^l \sin \frac{m_j \pi x}{l} \sin \frac{\pi n x}{l}\, dx = \begin{cases} 0 \text{ при } n \neq m_j, \\ 2/l \text{ при } n = m_j, \end{cases} \tag{2.6}$$

то равенства (2.5) переписываются в виде следующей СЛАУ

$$\frac{2}{l} B v(t) = \Delta(t), \tag{2.7}$$

где по условию теоремы $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^N$ — невырожденная матрица,

$$v(t) = (u_{m_1}(t), \dots, u_{m_N}(t))^T,\ \Delta(t) = (\Delta_1(t), \dots, \Delta_N(t))^T.$$

Таким образом, вектор-функция $v(t)$ определяется по формуле

$$(u_{m_1}(t), \dots, u_{m_N}(t))^T = \frac{l}{2} B^{-1} \Delta(t). \tag{2.8}$$

Поэтому для определения искомых функций $w_1(t), \dots, w_N(t)$ используя равенства (2.3) при $n = m_1, \dots, m_N$, получим систему

$$u_{m_i}(t) = \frac{l}{\pi m_i a} \int_0^t \sin\left(\frac{\pi m_i}{l} a(t-s)\right) \sum_{j=1}^N d_{j m_i} w_j(s)\, ds + \tag{2.9}$$

$$+ \left(\frac{l}{\pi m_i a}\right)^2 \left(1 - \cos \frac{\pi m_i a}{l} t\right) c_{m_i},$$

где $i = 1, 2, \dots, N$. Согласно формуле (2.8) в левой части системы (2.9) стоит известная вектор-функция аргумента t

$$(u_{m_1}(t), \dots, u_{m_N}(t))^T = \frac{l}{2} B^{-1} \Delta(t). \tag{2.10}$$

Для определения из системы (2.9) искомых функций $w_1(s), \dots, w_N(s)$, введем N вспомогательных функций

$$\hat{w}_{m_i}(s) \equiv \sum_{j=1}^N d_{j m_i} w_j(s)\, ds, i = 1, ..., N. \tag{2.11}$$

Введенные нами вспомогательные функции $\hat{w}_{m_i}(s)$ в виду формул (2.9), (2.10), должны удовлетворять интегральным уравнениям 1го рода

$$\frac{l}{\pi m_i a} \int_0^t \sin\left(\frac{\pi m_i}{l} a(t-s)\right) \hat{w}_{m_i}(s)\, ds =$$

$$- \left(\frac{l}{\pi m_i a}\right)^2 \left(1 - \cos \frac{\pi m_i a}{l} t\right) c_{m_i} + \delta_i(t), \tag{2.12}$$

где $i = 1, 2, \dots, N$, а в правой части использованы обозначения

$$(\delta_1(t), \dots, \delta_N(t))^T = \frac{l}{2} B^{-1} (\Delta_1(t), \dots, \Delta_N(t))^T.$$

Так как $\Delta_i(0) = \Delta_i'(0) = 0$, то и $\delta_i(0) = \delta_i'(0) = 0$. Поэтому в точке $t = 0$ правые части в уравнениях (2.12) и их производные равны нулю. Следовательно, уравнения (2.12) сводятся к интегральным уравнениям Вольтерры второго рода и все непрерывные функции $\hat{w}_{m_i}(s)$, $i = \overline{1, N}$ определятся единственным образом. Подставляя их в левую часть формулы (2.11), однозначно найдем искомую вектор-функцию $w(t) = (w_1(t), \dots, w_N(t))^T$ по формуле

$$w(t) = D^{-1} \hat{w}(t),$$

где $D = [d_{jm_i}]_{i,j=1}^N$, и $\det D \neq 0$ по условию. Для завершения доказательства остается отметить, что ввиду оценок на коэффициенты $|c_n|, |d_{jn}|$, справедливых в силу введенных требований на гладкость функций $f(x)$, $d_j(x)$, ряд Фурье (2.4), представляющий искомое решение $u(x,t)$, будет сходиться равномерно вместе с производными до 2-го порядка. Все функции $w_j(t)$ в выражении внешней силы определяются однозначно, решение (2.4) является классическим. Теорема доказана. □

Пример 1.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x w_1(t), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \;\; u(x,0) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \\ \int_0^\pi \sin x u(x,t)\, dx = \frac{\pi}{4} t^2. \end{cases} \qquad (2.13)$$

Функция $w_1(t)$ является искомой. В этом примере $N = 1$, $l = \pi$, $L_1(x) = \sin x$, $\Delta(t) = \frac{\pi}{4} t^2$. Для вычисления функции $w_1(t)$ получим интегральное уравнение

$$\int_0^\pi \sin^2 x\, ds \int_0^t \sin(t-s) w_1(s)\, ds = \frac{\pi}{4} t^2,$$

которое очевидно имеет единственное решение $w_1(t) = 1 + t^2/2$.

Замечание 2. Решение интегральных уравнений (2.12) и в общем случае легко построить явно, сведя их к интегральным уравнениям Вольтерры второго рода с ядрами вида $\cos A(t-s)$. В нашем случае $A = \{\frac{\pi m_i a}{l}, i = 1, \dots, N\}$. Действительно, резольвента $R(t-s)$ такого ядра с помощью преобразования Лапласа [2] строится явно по формуле $R(t-s) = \frac{a e^{a(t-s)} - b e^{b(t-s)}}{a-b}$, где a и b — корни квадратного уравнения $p^2 - p + A^2 = 0$.

Отметим, что изложенные результаты могут быть использованы при постановке и решении некоторых задач оптимизации граничным управлением процесса колебаний [3].

3. Возможное обобщение

Аналогичный результат получается в задаче идентификации функций w_{ij}, $i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N}$ в системе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t), \tag{3.1}$$

где A – невырожденная квадратная матрица размерности $m \times m$, $u = (u_1(x,t), \ldots, u_m(x,t))^T$, $F = (F_1(x,t), \ldots, F_m(x,t))^T$, $F_i(x,t) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{N} w_{ij}(x) w_{ij}(t), i = \overline{1, M}$, при локальных условиях (3.2), (3.3)

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{3.3}$$

и нелокальных условиях

$$\int_0^l L_{ij}(x) u_j(x,t)\, dx = \Delta_{ij}(t), \tag{3.4}$$

где $L_{ij}(x) = \sum_{s=1}^{N} b_{ijs} \sin \frac{m_j \pi x}{l}$, $m_j \in \mathbb{N}$.

Для определения функции $w_{i,j}(t)$ в представлении внешней силы $F(x,t)$ в системе (3.1) можно построить системы интегральных уравнений Вольтерры.

При решении соответствующих интегральных уравнений можно использовать приближенные методы, см. например, [1; 8].

Список литературы

1. Верлань А. Ф. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – Киев : Наук. думка, 1978.
2. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования / Г. Деч. – М. : Физматлит, 1971.
3. Ильин В. А. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны / В. А. Ильин, Е. И. Моисеев // Успехи мат. наук, – 2005. – Т. 69, № 6. – С. 89–114.
4. Камынин В.Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения / В. Л. Камынин // Мат. заметки. – 2013. – Т. 94, № 2. – С. 207–217.
5. Камынин В. Л. Две обратные задачи определения коэффициента в параболическом уравнении / В. Л. Камынин, А. Б. Костин // Дифференц. Уравнения. – 2010. – Т. 46, № 3. – С. 372–383.

6. Кожанов А.И. Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче / А. И. Кожанов // Мат. заметки. – 2004. – Т. 76, № 6. – С. 840–853.
7. Муфтахов И. Р. О роли уравнений Вольтерра в обратной задаче теплопроводности с нелокальным граничным условием / И. Р. Муфтахов, Д. Н. Сидоров, А. И. Дрегля// Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы X Междунар. науч.–техн. конф. мол. специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 23-27 мая 2016 г.) / под ред. И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во НГУ, 2016. – С. 15–19.
8. Муфтахов И. Р. О регуляризации по Лаврентьеву интегральных уравнений первого рода в пространстве непрерывных функций / И. Р. Муфтахов, Д. Н. Сидоров, Н. А. Сидоров // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2016. – Т. 15. – С. 62—77.
9. Прилепко А. И. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. I / А. И. Прилепко, А. Б. Костин // Сиб. мат. журн. – 1992. – Т. 33, № 3. – С. 146-–155.
10. Прилепко А. И. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. II / А. И. Прилепко, А. Б. Костин // Сиб. мат. журн. – 1993. – Т. 34, № 5. – С. 147-–162.
11. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А.Самарский. – М. : Наука, 1977.

Дрегля Алена Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент, исторический факультет, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)242210 (e-mail: adreglea@gmail.com)

Сидоров Николай Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)242210 (e-mail: sidorovisu@gmail.com)

A. I. Dreglea, N. A. Sidorov

The Identification of External Force Dynamics in The Modeling of Vibration

Abstract. The linear homogeneous wave equations with initial and boundary conditions are considered. It is assumed that the non-uniform terms describing an external force, are expanded into Fourier series, and the objective is to determine its N time depending coefficients. In order to determine these coefficients uniquely, N non-local boundary conditions are introduced in accordance with the required averaged dynamics of oscillations. The sufficient conditions are given when the formulated problem enjoy unique classical solution, which can be found by solving the system of Volterra integral equations, explicitly built in this work. Kernels of such integral equations enable resolvent construction using Laplace transform. This problem statement and method can be generalized and applied for system of inhomogeneous wave equations. These results can be useful in the formulation and solution of some problems arising in the optimization of boundary controls of string vibrations.

Keywords: initial and boundary problems, hyperbolic equation, the wave equation, nonlocal boundary conditions, Fourier series, resolvent, Laplace transform, Volterra equation, integral observations, identification of an external force.

References

1. Verlan A.F., Sizikov V.S. *Methods for the Solution of Integral Equations using Computer Programs.* Nauk. Dumka, Kiev, 1978.
2. Doetsch G. *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation under der Z-Transformation.* R. Oldenburg Verlag, Munchen, 1981.
3. Il'in V.A., Moiseev E.I. *Optimization of boundary controls of string vibrations*, *Russian Mathematical Surveys*, 2005, vol. 60, no 6, pp. 1093-1119. https://doi.org/10.1070/RM2005v060n06ABEH004283
4. Kamynin V.L. The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equations with integral observation. *Math. Notes*, 2013, vol. 94, no 1, pp. 205-213. https://doi.org/10.1134/S0001434613070201
5. Kamynin V.L., Kostin A.B. Two inverse problems of finding a coefficient in a parabolic equation. *Differ. Eq.*, 2010, vol. 46, no 3, pp. 375-386. https://doi.org/10.1134/S0012266110030079
6. Kozhanov A. I. A nonlinear loaded parabolic equation and a related inverse problem. *Math. Notes,* 2004, vol. 76, no 5-6, pp. 784-795. https://doi.org/10.1023/B:MATN.0000049678.16540.a5
7. Muftahov I.R., Sidorov D.N., Dreglea A.I. On the role of Volterra equations in the inverse heat conduction problem with a nonlocal boundary condition. In: *“Mathematical and computer modeling of natural-scientific and social issues*”, X Intern. scientific. conf. of young professionals and students (Russia, Penza, 23-27 May 2016), Editor I.V. Boikov. Penza, Publishing House of Penza State University, 2016, pp. 15-19.
8. Muftahov I.R., Sidorov D.N., Sidorov N.A. The Lavrentiev regularization of integral equations of the first kind in the space of continuous functions. *Izv. Irkutsk. Gos. Univ. Ser. Mat.*, 2016, vol. 16, pp. 62–77.(in Russian)
9. Prilepko A.I., Kostin A.B. Inverse problems of the determination of the coefficient in parabolic equations. I, *Siberian Math. J.*, 1992, vol. 33, no 3, pp. 489–496. https://doi.org/10.1007/BF00970897
10. Prilepko A.I., Kostin A.B. On inverse problems of determining a coefficient in a parabolic equation. II, *Siberian Math. J.*, 1993, vol. 34, no 5, pp. 923–937. https://doi.org/10.1007/BF00971406
11. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *The equations of mathematical physics.* Moscow, Nauka Publ., 1977.

Dreglea Aliona Ivanovna, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, professor, tel.: (3952)242210 (e-mail: adreglea@gmail.com)

Sidorov Nikolay Alexandrovich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, tel.: (3952)242210 (e-mail: sidorovisu@gmail.com)