Серия «Математика»
2017. Т. 19. С. 184—194

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.97
MSC 49J15
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.19.184

Простейшая невыпуклая задача управления. Принцип максимума и достаточные условия оптимальности

В. А. Срочко
Иркутский государственный университет

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления относительно линейной фазовой системы и линейно-квадратичного по паре «состояние – управление» функционала. Переход от принципа максимума к достаточным условиям оптимальности проводится на основе понятия сильно экстремального управления. Это значит, что в задаче на максимум функции Понтрягина необходимо заменить фазовую или сопряженную траекторию на произвольную допустимую траекторию. Конструктивный характер достаточным условиям обеспечивает возможность получения явных выражений для экстремальных значений вспомогательных задач, фигурирующих в этих условиях. Результаты представляются в форме неравенств и равенств для функций одной переменной на промежутке времени, что вполне соответствует принципу максимума. Особая ситуация реализуется при анализе комбинированного управления с внутренними и граничными участками относительно ограничения. В точке сопряжения этих участков возникает нестандартное условие типа равенства как следствие состыковки двух неравенств.

Положительным фактором является двойственный характер полученных результатов: это пары симметричных соотношений, которые работают независимо. Их происхождение связано с двумя типами сильно экстремальных управлений относительно фазовых или сопряженных переменных.

Ключевые слова: задача оптимального управления; принцип максимума; достаточные условия оптимальности.

Введение

В рамках теории достаточных условий оптимальности в задачах управления необходимо выделить, как минимум, основополагающие монографии [5; 7] и отметить, например, развивающие это направление в качественном и конструктивном плане работы [2; 4; 6]. Одна из проблем теории достаточных условий связана с трудоемкостью их реализации (аналитической или вычислительной) в сравнении, например, с проверкой необходимых условий. В этой связи уместно выделять специальные классы невыпуклых задач с небольшим разрывом между необходимыми и достаточными условиями по критерию их проверочной трудоемкости.

В данной статье рассматривается простейшая невыпуклая задача: линейная фазовая система, скалярное управление, линейно-квадратичный относительно пары «состояние – управление» функционал. Переход от принципа максимума к достаточным условиям оптимальности осуществляется на основе понятия сильно экстремального управления. Далее проводится конструктивное преобразование условий. Специфика исходной задачи допускает аналитическое решение возникающих вспомогательных подзадач. В результате полученные условия оптимальности представляются в форме неравенств и равенств для функций одной переменной (времени) на промежутке управления. Остается отметить, что принцип максимума в данной задаче также связан с неравенствами для функции одной переменной.

1. Постановка задачи. Условия оптимальности

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\Phi(u) \to \max,\ u \in V, \tag{1.1}$$

в которой

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1)\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \Big(\langle a(t), x(t)\rangle u(t) - \frac{1}{2}\gamma u^2(t)\Big)dt,$$

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u,\ x(t_0) = x^0,$$

$$V = \{\, u(\cdot) \in \mathrm{PC}([t_0, t_1]) : |u(t)| \leqslant 1,\ t \in [t_0, t_1]\,\}.$$

Здесь $u(t) \in R$ – управление, $x(t) \in R^n$ – фазовое состояние, $\mathrm{PC}([t_0, t_1])$ – множество кусочно-непрерывных функций, $c, x^0, \gamma > 0$ – параметры задачи.

Предположим, что вектор-функции $a(t), b(t)$ и матричная функция $A(t)$ непрерывны на $[t_0, t_1]$.

Приведем соотношения принципа максимума (ПМ) для задачи (1.1). Введем функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, A(t)x\rangle + \langle \psi, b(t)\rangle u + \langle a(t), x\rangle u - \frac{1}{2}\gamma u^2$$

и сопряженную систему

$$\dot{\psi} = -A^T(t)\psi - a(t)u,\ \psi(t_1) = c.$$

Определим стационарную точку функции H по переменной u

$$w(\psi, x, t) = \frac{1}{\gamma}\Big(\langle a(t), x\rangle + \langle b(t), \psi\rangle\Big).$$

Тогда H-максимизирующее управление при ограничении $|u| \leqslant 1$ выражается по формуле

$$u^*(\psi, x, t) = \begin{cases} w(\psi, x, t), & \text{если } |w(\psi, x, t)| \leqslant 1, \\ \operatorname{sign} w(\psi, x, t), & \text{если } |w(\psi, x, t)| \geqslant 1. \end{cases}$$

Пусть $u(t)$ – допустимое управление ($u \in V$), $x(t, u)$, $\psi(t, u)$, $t \in \in [t_0, t_1]$ – соответствующие траектории. Обозначим

$$\overline{u}(t) = w(\psi(t, u), x(t, u), t).$$

Тогда принцип максимума для управления $u(t)$ (ПМ(u)) представляется следующим соотношением: $\forall t \in [t_0, t_1]$

$$u(t) = \begin{cases} \overline{u}(t), & \text{если } |\langle a(t), x(t, u)\rangle + \langle b(t), \psi(t, u)\rangle| \leqslant \gamma, \\ \operatorname{sign} \overline{u}(t), & \text{если } |\langle a(t), x(t, u)\rangle + \langle b(t), \psi(t, u)\rangle| \geqslant \gamma. \end{cases}$$

Следуя [1; 8], перейдем на уровень достаточных условий оптимальности. С этой целью достаточно в предыдущей формуле последовательно провести замены

$$x(t, u) \to x(t, v),\ v \in V \quad \text{или} \quad \psi(t, u) \to \psi(t, v),\ v \in V$$

(фиксированная траектория $\to$ любая траектория, экстремальное управление $\to$ сильно экстремальное управление).

В результате получаем достаточные условия оптимальности в начальном варианте.

Первое условие: $\forall v \in V$, $t \in [t_0, t_1]$

$$u(t) = \begin{cases} \overline{u}(t), & \text{если } |\langle a(t), x(t, v)\rangle + \langle b(t), \psi(t, u)\rangle| \leqslant \gamma, \\ \operatorname{sign} \overline{u}(t), & \text{если } |\langle a(t), x(t, v)\rangle + \langle b(t), \psi(t, u)\rangle| \geqslant \gamma. \end{cases} \tag{1.2}$$

Второе условие: $\forall v \in V$, $t \in [t_0, t_1]]$

$$u(t) = \begin{cases} \overline{u}(t), & \text{если } |\langle a(t), x(t, u)\rangle + \langle b(t), \psi(t, v)\rangle| \leqslant \gamma, \\ \operatorname{sign} \overline{u}(t), & \text{если } |\langle a(t), x(t, u)\rangle + \langle b(t), \psi(t, v)\rangle| \geqslant \gamma. \end{cases} \tag{1.3}$$

Представленные соотношения определены на множествах фазовых либо сопряженных траекторий, что существенно затрудняет их проверочную реализацию. В рамках данной задачи (1.1) имеется возможность конструктивно использовать экстремальные варианты полученных неравенств, что приводит к поточечным по времени $t \in [t_0, t_1]$ условиям оптимальности, характерным для принципа максимума.

2. Преобразование условий

Найдем экстремальные значения скалярных произведений

$$\langle a(t), x(t,v)\rangle, \langle b(t), \psi(t,v)\rangle$$

для момента $t \in [t_0, t_1]$ на множестве V.

Лемма 1. *Пусть вектор-функция* $p(\tau, t)$, $\tau \in [t_0, t]$, $t \in [t_0, t_1]$ *является решением задачи Коши*

$$p_\tau(\tau, t) = -A^T(\tau)p(\tau, t),\ p(t,t) = a(t).$$

Тогда справедливо представление

$$\langle a(t), x(t,v)\rangle = \int\limits_{t_0}^{t} \langle b(\tau), p(\tau, t)\rangle v(\tau) d\tau + \langle p(t_0, t), x^0\rangle.$$

Для доказательства необходимо найти производную

$$\frac{d}{d\tau}\langle p(\tau, t), x(\tau, v)\rangle$$

с последующим интегрированием по $\tau \in [t_0, t]$.

Следствие 1. *Экстремальные значения для* $\langle a(t), x(t,v)\rangle$ *выражаются по формуле*

$$\min_{v\in V}(\max_{v\in V})\langle a(t), x(t,v)\rangle = \langle p(t_0, t), x^0\rangle - (+) \int\limits_{t_0}^{t} |\langle b(\tau), p(\tau, t)\rangle| d\tau.$$

Лемма 2. *Пусть вектор-функция* $q(\tau, t)$, $\tau \in [t, t_1]$, $t \in [t_0, t_1]$ *является решением задачи Коши*

$$q_\tau(\tau, t) = A(\tau)q(\tau, t),\ q(t,t) = b(t).$$

Тогда справедливо представление

$$\langle b(t), \psi(t,v)\rangle = \int\limits_{t}^{t_1} \langle a(\tau), q(\tau, t)\rangle v(\tau) d\tau + \langle q(t_1, t), c\rangle.$$

Для доказательства необходимо найти производную

$$\frac{d}{d\tau}\langle q(\tau, t), \psi(\tau, v)\rangle$$

с последующим интегрированием по $\tau \in [t, t_1]$.

Следствие 2. *Экстремальные значения для $\langle b(t), \psi(t,v)\rangle$ выражаются по формуле*

$$\min_{v\in V}\,(\max_{v\in V})\langle b(t), \psi(t,v)\rangle = \langle q(t_1,t), c\rangle -\, (+)\int\limits_t^{t_1} |\langle a(\tau), q(\tau,t)\rangle| d\tau.$$

Приступим теперь к преобразованию достаточных условий оптимальности. Раскроем модульное неравенство в первом условии для некоторого момента $t\in[t_0,t_1]$

$$-\gamma \leqslant \langle a(t), x(t,v)\rangle + \langle b(t), \psi(t,u)\rangle \leqslant \gamma,\ v\in V. \tag{2.1}$$

Перейдем к эквивалентной экстремальной форме

$$\max_{v\in V}\langle a(t), x(t,v)\rangle + \langle b(t), \psi(t,u)\rangle \leqslant \gamma,$$

$$\min_{v\in V}\langle a(t), x(t,v)\rangle + \langle b(t), \psi(t,u)\rangle \geqslant -\gamma.$$

Учитывая следствие 1, получаем

$$\langle b(t), \psi(t,u)\rangle + \langle p(t_0,t), x^0\rangle + \int\limits_{t_0}^{t} |\langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle| d\tau \leqslant \gamma, \tag{2.2}$$

$$\langle b(t), \psi(t,u)\rangle + \langle p(t_0,t), x^0\rangle - \int\limits_{t_0}^{t} |\langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle| d\tau \geqslant -\gamma.$$

Объединим эти неравенства одним выражением

$$|\langle b(t), \psi(t,u)\rangle + \langle p(t_0,t), x^0\rangle| + \int\limits_{t_0}^{t} |\langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle| d\tau \leqslant \gamma. \tag{2.3}$$

Таким образом, полученное неравенство для функции одной переменной t эквивалентно соотношению (2.1).

Аналогичным образом обрабатывается модульное неравенство во втором условии с учетом следствия 2. В итоге приходим к дополнительному к (2.3) неравенству в момент $t\in[t_0,t_1]$

$$|\langle a(t), x(t,u)\rangle + \langle q(t_1,t), c\rangle| + \int\limits_{t}^{t_1} |\langle a(\tau), q(\tau,t)\rangle| d\tau \leqslant \gamma. \tag{2.4}$$

Сформулируем первый результат об оптимальности «внутреннего» управления $u(t) = \overline{u}(t)$, $|u(t)| \leqslant 1$, $t \in [t_0,t_1]$ которое определяется условием стационарности функции Понтрягина

$$H_u(\psi(t,u), x(t,u), u(t), t) = 0,\ t\in[t_0,t_1]\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ u(t) = \frac{1}{\gamma}\Big(\langle a(t), x(t,u)\rangle + \langle b(t), \psi(t,u)\rangle\Big).$$

Теорема 1. *Пусть для управления $u(t) = \overline{u}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ выполнено неравенство (2.3) или (2.4) для всех $t \in [t_0, t_1]$. Тогда это управление является оптимальным в задаче (1.1).*

Пример 1.

$$\Phi(u) = x_1(1) + \int\limits_0^1 \Big[\Big(x_1(t) + x_2(t)\Big)u(t) - \frac{1}{2}\gamma u^2(t)\Big]dt \to \max,$$

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u,\ x_1(0) = -2,\ x_2(0) = 1,\ |u(t)| \leqslant 1,\ t \in [0,1].$$

В данном случае

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u + x_1 u + x_2 u - \frac{1}{2}\gamma u^2,$$

$$\dot{\psi}_1 = -u,\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 - u,\ \psi_1(1) = 1,\ \psi_2(1) = 0.$$

Рассмотрим управление $u = 0$. Ему соответствуют траектории

$$x_1(t,0) = t - 2,\ x_2(t,0) = 1,\ \psi_1(t,0) = 1,\ \psi_2(t,0) = 1 - t.$$

Условие стационарности выполняется $\forall \gamma > 0$: $H_u[t,0] = 0$, $t \in [0,1]$, т. е. управление $u = 0$ удовлетворяет принципу максимума.

Проверим условие (2.3). Вспомогательная вектор-функция $p(\tau, t)$: $p_1 = 1$, $p_2 = t - \tau + 1$. Следовательно,

$$\langle b, \psi(t,0)\rangle = 1 - t,\ \langle p(0,t), x^0\rangle = t - 1,\ \langle b, p(\tau,t)\rangle = t - \tau + 1.$$

Неравенство (2.3) принимает вид

$$\frac{t^2}{2} + t \leqslant \gamma,\ t \in [0,1].$$

Таким образом, для $\gamma \geqslant 3/2$ неравенство выполнено, т. е. управление $u = 0$ является оптимальным.

К аналогичному результату приводит второе условие (2.4). Заключительное неравенство имеет вид

$$\frac{t^2}{2} - 2t + \frac{3}{2} \leqslant \gamma,\ t \in [0,1]\ \Rightarrow\ \gamma \geqslant \frac{3}{2}.$$

Рассмотрим далее вопрос об оптимальности граничных управлений $u = \pm 1$ на основе соотношений (1.2), (1.3). Для управления $u = 1$ достаточные условия представляются следующим образом

$$\min_{v \in V}\langle a(t), x(t,v)\rangle + \langle b(t), \psi(t,1)\rangle \geqslant \gamma,$$

$$\langle a(t), x(t,1)\rangle + \min_{v\in V}\langle b(t), \psi(t,v)\rangle \geqslant \gamma,\ t\in[t_0,t_1].$$

В итоговой форме получаем неравенства для $t\in[t_0,t_1]$

$$\langle b(t), \psi(t,1)\rangle + \langle p(t_0,t), x^0\rangle - \int\limits_{t_0}^{t} |\langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle| d\tau \geqslant \gamma, \tag{2.5}$$

$$\langle a(t), x(t,1)\rangle + \langle q(t_1,t), c\rangle - \int\limits_{t}^{t_1} |\langle a(\tau), q(\tau,t)\rangle| d\tau \geqslant \gamma. \tag{2.6}$$

Сформулируем результат.

Теорема 2. *Пусть для управления $u(t) = 1$, $t\in[t_0,t_1]$ выполнено неравенство (2.5) или (2.6) для всех $t\in[t_0,t_1]$. Тогда это управление является оптимальным в задаче (1.1).*

Установим связь полученных условий с принципом максимума для управления $u=1$ (ПМ(1)).

Предположим, что выполнено неравенство

$$\langle b(\tau), p(\tau,t)\rangle \leqslant 0,\ \tau\in[t_0,t],\ t\in[t_0,t_1]. \tag{2.7}$$

Тогда на основании леммы 1 и следствия 1 заключаем, что

$$\min_{v\in V}\langle a(t), x(t,v)\rangle = \langle a(t), x(t,1)\rangle,\ t\in[t_0,t_1].$$

При этом условие (2.5) представляется в виде

$$\langle a(t), x(t,1)\rangle + \langle b(t), \psi(t,1)\rangle \geqslant \gamma,\ t\in[t_0,t_1].$$

Получили ПМ(1) как достаточное условие оптимальности в предположении (2.7).

Аналогично, неравенство

$$\langle a(\tau), q(\tau,t)\rangle \leqslant 0,\ \tau\in[t,t_1],\ t\in[t_0,t_1] \tag{2.8}$$

также гарантирует достаточность ПМ(1).

Замечание 1. В [1] показано, что (2.7), (2.8) эквивалентны.

Пример 2.

$$\Phi(u) = \int\limits_0^1 \Big[\Big(x_1(t)+x_2(t)\Big)u(t) - \frac{1}{2}\gamma u^2(t)\Big] dt \to \max,$$

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u,\ x_1(0) = x_1^0,\ x_2(0) = x_2^0,\ |u(t)|\leqslant 1,\ t\in[0,1].$$

Сопряженная система:

$$\dot{\psi}_1 = -u,\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 - u,\ \psi_1(1) = 0,\ \psi_2(1) = 0.$$

Рассмотрим управление $u = 1$. Соответствующие траектории:

$$x_1(t,1) = \frac{1}{2}t^2 + x_2^0 t + x_1^0,\ x_2(t,1) = t + x_2^0,$$

$$\psi_1(t,1) = 1 - t,\ \psi_2(t,1) = \frac{1}{2}(t-1)^2 - (t-1).$$

Вспомогательная вектор-функция $p(\tau, t)$:

$$p_1(\tau,t) = 1,\ p_2(\tau,t) = t - \tau + 1.$$

В результате первое условие принимает вид

$$x_1^0 + x_2^0(t+1) - 3t + \frac{3}{2} \geqslant \gamma,\ t \in [0,1],$$

что эквивалентно двум неравенствам

$$x_1^0 + x_2^0 + \frac{3}{2} \geqslant \gamma,\ x_1^0 + 2x_2^0 - \frac{3}{2} \geqslant \gamma. \tag{2.9}$$

Второе неравенство после несложных вычислений конкретизируется в виде

$$x_1^0 + x_2^0(t+1) + 3t - \frac{3}{2} \geqslant \gamma,\ t \in [0,1],$$

что приводит к неравенствам

$$x_1^0 + x_2^0 - \frac{3}{2} \geqslant \gamma,\ x_1^0 + 2x_2^0 + \frac{3}{2} \geqslant \gamma. \tag{2.10}$$

Подведем итог. Если начальное состояние фазовой системы (x_1^0, x_2^0) и параметр $\gamma > 0$ удовлетворяют условиями(2.9) или (2.10), то управление $u = 1$ является оптимальным.

Замечание 2. Управление $u = -1$ обслуживается аналогичным образом: неравенство $(\cdots \leqslant -\gamma)$ и переход к операции $\max\limits_{v \in V}$.

3. Комбинированное управление

Рассмотрим, наконец, вопрос об оптимальности гибридного управления, которое принимает внутренние и граничные значения относительно своего ограничения. Здесь возможны различные комбинации, однако схема вывода достаточных условий остается, вообще говоря, типичной в рамках уже проведенных построений.

Зададимся, например, следующей структурой управления

$$u(t) = \begin{cases} \overline{u}(t), & t \in [t_0, \theta], \\ 1, & t \in [\theta, t_1], \end{cases} \tag{3.1}$$

где

$$\theta \in (t_0, t_1),\ \overline{u}(t) = \frac{1}{\gamma}\Big(\langle a(t), x(t,u)\rangle + \langle b(t), \psi(t,u)\rangle \Big).$$

Принцип максимума для управления $u(t)$ обеспечивается неравенствами

$$|\langle a(t), x(t,u)\rangle + \langle b(t), \psi(t,u)\rangle| \leqslant \gamma,\ t \in [t_0, \theta],$$
$$\langle a(t), x(t,u)\rangle + \langle b(t), \psi(t,u)\rangle \geqslant \gamma,\ t \in [\theta, t_1].$$

Первое достаточное условие оптимальности получается после замены $x(t,u) \to x(t,v)$, $v \in V$ и перехода к экстремальным значениям для $\langle a(t), x(t,v)\rangle$. В результате приходим к неравенству (2.3) для $t \in [t_0, \theta]$ и к неравенству (2.5) для $t \in [\theta, t_1]$. Отметим, что для $t \in [\theta, t_1]$ $\psi(t,u) = \psi(t,1)$.

Особого внимания требует точка θ сопряжения двух участков управления, в которой должны выполняться неравенства (2.2), (2.5) при $t{=}\theta$

$$\langle b(\theta), \psi(\theta,u)\rangle + \langle p(t_0,\theta), x^0\rangle + \int\limits_{t_0}^{\theta} |\langle b(\tau), p(\tau,\theta)\rangle| d\tau \leqslant \gamma,$$

$$\langle b(\theta), \psi(\theta,u)\rangle + \langle p(t_0,\theta), x^0\rangle - \int\limits_{t_0}^{\theta} |\langle b(\tau), p(\tau,\theta)\rangle| d\tau \geqslant \gamma.$$

Отсюда получаем два условия типа равенства

$$\int\limits_{t_0}^{\theta} |\langle b(\tau), p(\tau,\theta)\rangle| d\tau = 0 \ \Rightarrow\ \langle b(\tau), p(\tau,\theta)\rangle = 0,\ \tau \in [t_0, \theta],$$

$$\langle b(\theta), \psi(\theta,u)\rangle + \langle p(t_0,\theta), x^0\rangle = \gamma.$$

С учетом утверждения леммы 1 первое условие приводит к соотношениям

$$\langle a(\theta), x(\theta,v)\rangle = \langle a(\theta), x(\theta,u)\rangle = \langle p(t_0,\theta), x^0\rangle,\ v \in V.$$

Следовательно, второе условие есть условие стационарности в точке θ

$$H_u(\psi(\theta,u), x(\theta,u), u(\theta), \theta) = 0,$$

которое выполняется в силу ПМ(u).

Таким образом, два неравенства ($\leqslant \gamma$, $\geqslant \gamma$) эквивалентны одному условию типа равенства

$$\langle b(\tau), p(\tau,\theta)\rangle = 0,\ \tau \in [t_0, \theta]. \tag{3.2}$$

Сформулируем итоговое утверждение.

Теорема 3. *Пусть для управления $u(t)$ вида (3.1) выполнены следующие условия:*
1) неравенство (2.3) для $t \in [t_0, \theta]$;
2) неравенство (2.5) для $t \in [\theta, t_1]$;
3) равенство (3.2) для точки $\theta \in (t_0, t_1)$.
Тогда $u(t)$ – оптимальное управление в задаче (1.1).

Замечание 3. Условие типа равенства (условие ортогональности) появляется в точке θ сопряжения двух участков управления $u(t)$ и является условием состыковки двух неравенств, связанных с этой точкой. Следует отметить, что аналогичный результат имеет место для задачи с билинейным функционалом в точке переключения управления [3].

Замечание 4. Другие варианты комбинированного управления $u(t)$ в рамках набора $\{\pm 1, \overline{u}(t)\}$ обрабатываются по аналогичной схеме.

Список литературы

1. Аксенюшкина Е. В. Достаточные условия оптимальности для одного класса невыпуклых задач управления / Е. В. Аксенюшкина, В. А. Срочко // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2015. — Т. 55. — № 10. — С. 1070–1080.
2. Антипина Н. В. Линейные функции Ляпунова – Кротова и достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума / Н. В. Антипина, В. А. Дыхта // Известия вузов. Математика. — 2002. — №12. — С. 11–22.
3. Антоник В. Г. Условия оптимальности типа принципа максимума в билинейных задачах управления / В. Г. Антоник, В. А. Срочко // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2016. — Т. 56. — № 12. — С. 2054–2064.
4. Батурин В. А. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения / В. А. Батурин, Д. Е. Урбанович. — Новосибирск : Наука, 1997. — 175 с.
5. Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления / В. И. Гурман. — М. : Наука, 1985. — 288 с.
6. Дыхта В. А. Неравенство Ляпунова – Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении / В. А. Дыхта // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. — 2006. — Т. 110. — С. 76–108.
7. Кротов В. Ф. Методы и задачи оптимального управления / В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. — М. : Наука, 1973. — 446 с.
8. Срочко В. А. Достаточные условия оптимальности экстремальных управлений на основе формул приращения функционала / В. А. Срочко, В. Г. Антоник // Известия вузов. Математика. — 2014. — №8. — С. 96–102.

Владимир Андреевич Срочко, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики,экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: +7 (3952) 521276 (e-mail: `srochko@math.isu.ru`)

V. A. Srochko

The Simplest Nonconvex Control Problem. The Maximum Principle and Sufficient Optimality Conditions

Abstract. The optimal control problem with linear phase system and linear-quadratic functional is considered. The transition from the maximum principle to sufficient optimality conditions is fulfilled with the help of the notion of strongly extremal control. It means that in the problem of maximization of Pontryagin's function phase or conjugate trajectory should be replaced with any admissible trajectory. Sufficient conditions give opportunity to obtain explicit expressions for extremal values of auxiliary problems contained in these conditions. Results are presented in the form of inequalities and equalities for a function with one variable with respect to time segment. A special situation is implemented in the analysis of the combined control with interior and boundary segments with respect to the constraint. At the point of connection of these segments there is a non-standard condition of maximum type.

A positive factor is dual nature of obtained results: it is a pair of symmetrical relations, which operate independently. Their origin is connected with two types of strongly extremal controls with respect to phase or conjugate variables.

Keywords: optimal control problem; the maximum principle; sufficient optimality conditions.

References

1. Aksenyushkina E. V., Srochko V. A. Sufficient optimality conditions for one class of nonconvex control problems . *Zhurnal vichislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2015, Vol. 55, №10, pp. 1070–1080. (in Russian)
2. Antipina N. V., Dychta V. A. Linear funtions of Lyapunov – Krotov and sufficient optimality conditions in the form of maximum principle. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2002, №12, pp. 11—22. (in Russian)
3. Antonik V. G., Srochko V. A. Optimality conditions of the maximum principle type in bilinear control problems. *Zhurnal vichislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2016, Vol. 56, №12, pp. 2054–1064. (in Russian)
4. Baturin V. A., Urbanovich D. E. *Approximate optimal control methods based on the extension principle*. Novosibirsk, Nauka, 1997, 175 p. (in Russian)
5. Gurman V. I. *The extension principle in control problems*. Moscow, Nauka, 1985, 288 p. (in Russian)
6. Dychta V. A. The inequality of Lyapunov – Krotov and sufficient conditions in optimal control theory. *Itogi nauki i tehniki. Sovremennaya matematika i eyo prilozheniya*, 2006, Vol. 110, pp. 76–108.(in Russian)
7. Krotov V. F., Gurman V. I. *Methods and problems of optimal control*. Moscow, Nauka, 1988, 446 p.(in Russian)
8. Srochko V. A., Antonik V. G. Sufficient optimality conditions of extremal controls based on functional increment formulas. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2014, №8, pp. 96—102. (in Russian)

Vladimir A. Srochko, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003, professor, Phone: +7(3952)521276 (e-mail: srochko@math.isu.ru)

Известия Иркутского государственного университета.
2017. Т. 19. Серия «Математика». С. 184–194