Серия «Математика»
2017. Т. 19. С. 205—216

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.977
MSC 93B03, 93C41, 49N25
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.19.205

Оценки множеств достижимости систем с импульсным управлением, неопределенностью и нелинейностью *

Т. Ф. Филиппова
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Аннотация. Рассматривается задача оценивания трубок траекторий нелинейной управляемой динамической системы с неопределенностью по начальным данным. Предполагается, что динамическая система имеет специальную структуру, в которой нелинейные члены определяются квадратичными формами по фазовым координатам, а значения неопределенных начальных состояний и допустимых управлений стеснены эллипсоидальными ограничениями. Матрица линейных слагаемых в фазовых скоростях системы также точно не известна, но принадлежит известному компакту в соответствующем пространстве, то есть динамика системы осложнена наличием билинейных составляющих в правых частях дифференциальных уравнений системы. В работе решается задача оценивания множеств достижимости нелинейной управляемой системы указанного вида, полученные результаты дают возможность построения соответствующих численных алгоритмов.

Ключевые слова: управляемая система, множество достижимости, импульсное управление, оценивание состояний, неопределенность.

Введение

В работе рассматриваются задачи оценивания множеств достижимости управляемой динамической системы, т. е. множеств состояний фазового пространства, куда фазовая точка может быть переведена из начального состояния (или множества начальных состояний) за заданное время при помощи допустимых управлений. Проблема нахождения

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект РНФ №16-11-10146).

точного множества достижимости управляемой системы или его приближения возникает при решении многих задач математической теории управления [5; 6; 7], дополнительные сложные вопросы возникают при определении областей достижимости систем с обобщенными управлениями импульсного типа. Исследованиям многих классических вопросов теории импульсного управления, в том числе условий оптимальности в нелинейных задачах динамической оптимизации с разрывными траекториями, системам с импульсными управлениями, содержащими дельта-функции Дирака, задачам с фазовыми ограничениями для систем с импульсными управлениями и другим вопросам теории посвящено большое число работ, отметим среди них исследования [1; 2; 3; 4; 20]. Следует подчеркнуть, что геометрия множеств достижимости нелинейных динамических систем может быть очень сложной даже для систем классического типа, не содержащих обобщенных управлений. В этих случаях актуально построение аппроксимаций множеств достижимости и интегральных воронок динамических систем [15], а также приближение множеств достижимости областями определенной канонической формы, например, эллипсоидами или многогранниками.

В последние годы разработана полная теория построения эллипсоидальных оценок (внешних и внутренних) множеств достижимости линейных управляемых систем с неопределенностью, основанная на технике эллипсоидального исчисления [11; 16; 17]. В рамках этого подхода основная задача состоит в нахождении эллипсоида (или семейства эллипсоидов) в фазовом пространстве, оценивающего сверху или снизу по отношению к операции включения множеств искомую область достижимости. Отметим, однако, что в силу специфики аппарата исследования и общих предположений о структуре динамики системы этот подход не может быть в полной мере использован в нелинейном случае для описания и оценивания траекторных трубок неопределенных систем общего вида. Для некоторых классов нелинейных динамических систем с неопределенностью в динамике и начальных данных в работах [8; 9; 10; 13] были намечены подходы к решению задач оценивания состояний таких нелинейных систем.

В данной работе техника эллипсоидального исчисления развивается для трубок траекторий нелинейных управляемых импульсных систем с неопределенностью по начальным данным. Предлагается, что импульсные управления в рассматриваемой системе задаются скалярными функциями ограниченной вариации. Неопределенность по начальным данным здесь состоит в том, что начальное состояние не известно точно, дано лишь, что начальный фазовый вектор системы принадлежит заданному эллипсоиду соответствующего фазового пространства. При помощи специальной разрывной замены времени [19; 20] рассматриваемая импульсная система преобразуется в обыкновенное дифференциальное включение, уже не содержащее обобщенных функций. Основная трудность далее состоит в одновременном присутствии в системе двух типов нелинейности в динамике, первый из них связан с квадратичными составляющими в фазовых скоростях, а второй тип – с неопределенностью в коэффициентах линейных членов правых частей дифференциальных уравнений (наличием эффекта билинейности). Основной результат работы состоит в определении внешних по отношению к операции включения оценок множеств достижимости систем исследуемого здесь класса.

1. Постановка задачи и предварительные сведения

Пусть $\mathbb{R}^n$ обозначает n-мерное евклидово пространство, comp$\mathbb{R}^n$ – множество всех компактных подмножеств из $\mathbb{R}^n$, conv$\mathbb{R}^n$ — множество всех компактных выпуклых подмножеств из $\mathbb{R}^n$. Символ (x, y) обозначает скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, символ $\| x \| = (x, x)^{1/2}$ — евклидова норма вектора x, $\,'$ – знак транспонирования, шар $B(a, r) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \| x - a \| \le r\}$, символ $E(y, Y) = \{x \in \mathbb{R}^n : (Y^{-1}(x - y), (x - y)) \le 1\}$ обозначает эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ с центром y и симметрической положительно определенной $n \times n$–матрицей Y, $\mathrm{Tr}(Y)$ — след (сумма диагональных элементов) $n \times n$-матрицы Y, I — единичная $n \times n$-матрица.

Рассмотрим управляемую систему следующего вида

$$dx(t) = (A(t)x + f(x)d + u(t))dt + Gdv(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t_0 \le t \le T, \quad (1.1)$$

с неизвестным, но ограниченным начальным состоянием

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in X_0 = E(a_0, Q_0), \quad (1.2)$$

и измеримым управлением $u(t)$, стесненным ограничением

$$u(t) \in E(\hat{a}, \hat{Q}), \quad t_0 \le t \le T, \quad (1.3)$$

$v(t)$ — скалярная функция ограниченной вариации, непрерывная справа на отрезке $[t_0, T]$ и удовлетворяющая ограничению (параметр $\mu > 0$ задан):

$$\mathrm{Var}_{t \in [t_0, T]}\, v(t) \le \mu.$$

Здесь $a, \hat{a}, d \in \mathbb{R}^n$; матрицы B и $\hat{Q}$ — симметрические и положительно определенные.

Будем предполагать, что нелинейная функция $f(x)$ в (1.1) является квадратичной формой:

$$f(x) = x'Bx, \ x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

где B — симметрическая положительно определенная $n \times n$–матрица.

Предположим, что матрица $A(t)$ (размерности $n \times n$) имеет вид $A(t) = A^0 + A^1(t)$, где $n \times n$–матрица A^0 задана, а измеримая $n \times n$–матрица $A^1(t)$ с элементами $\{a_{ij}^{(1)}(t)\}$ $(i, j = 1, \dots, n,\ t \in [t_0, T])$ точно не известна, но дано ограничение на неизвестные элементы $\{a_{ij}^{(1)}(t)\}$,

$$A^1(t) \in \mathcal{A} = \big\{A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n\times n} : |a_{ij}| \le c_{ij},\ i, j = 1, \dots n\big\}, \tag{1.5}$$

где числа $c_{ij} \ge 0$ $(i, j = 1, \dots n)$ заданы.

Обозначим символом $\mathcal{U}$ класс всех допустимых измеримых управлений $u(\cdot)$, символом $\mathcal{V}$ класс допустимых управлений-мер $v(\cdot)$ и символом $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot), A^1(\cdot))$ – решение системы (1.1)-(1.5) на промежутке $[t_0, T]$ при $x_0 \in X_0$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ и $A^1(\cdot) \in \mathcal{A}$.

Трубку траекторий системы (1.1)-(1.5) обозначим ($t_0 \le t \le T$)

$$X(\cdot) = \bigcup \big\{x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot), A^1(\cdot)) | x_0 \in X_0, u(\cdot) \in \mathcal{U}, v(\cdot) \in \mathcal{V}, A^1(\cdot) \in \mathcal{A}\big\}.$$

Отметим, что сечение $X(t) = X(t; t_0, X_0)$ трубки траекторий $X(\cdot)$ в момент времени $t \in [t_0, T]$ совпадает со множеством достижимости системы (1.1)-(1.5) в момент t из начального состояния $\{t_0, X_0\}$.

В работе рассмотрены схемы построения оценок трубок траекторий $X(\cdot)$ и множеств достижимости $X(t)$ системы (1.1)-(1.5), основанные на идеях и методах эллипсоидального исчисления.

Далее будем считать, что выполнено следующее предположение (детали и обсуждение можно найти в [9]).

П р е д п о л о ж е н и е. Будем считать, что все решения системы (1.1)-(1.5) определены на всем промежутке $[t_0, T]$ для любых допустимых x_0 и всех возможных $\{u(\cdot), v(\cdot), A^1(\cdot)\}$ и не выходят за пределы некоторой компактной области фазового пространства, то есть существует $k > 0$ такое, что

$$||x(\cdot)|| = ||x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot), A^1(\cdot))|| \le k, \quad \forall x_0 \in X_0,$$

$$\forall u(\cdot) \in \mathcal{U}, \forall v(\cdot) \in \mathcal{V}, A^1(\cdot) \in \mathcal{A}.$$

2. Вспомогательные оценки

Предположим далее, что начальное множество X_0 динамической системы системы (1.1)-(1.5) и множество U, задающее ограничение на измеримые управления $u(t)$ в (1.3), являются эллипсоидами

$$X_0 = E(a, k^2 B^{-1})\ (k \ne 0), \quad U = E(\hat{a}, \hat{Q}). \tag{2.1}$$

Предположим также дополнительно, что неопределенность по матричным коэффициентам в системе отсутствует, и матрица A задана.

Рассмотрим расширенное дифференциальное включение

$$\frac{d}{d\eta}\begin{pmatrix} z \\ \tau \end{pmatrix} \in H(\tau, z) \tag{2.2}$$

$$z(t_0) = x_0 \in X_0 = E(a, k^2 B^{-1}), \quad \tau(t_0) = t_0, \quad t_0 \le \eta \le T + \mu,$$

где

$$H(\tau, z) = \bigcup_{0 \le \ \nu \le 1} \left\{ (1-\nu) \begin{pmatrix} Az + f(z)d + E(\hat{a}, \hat{Q}) \\ 1 \end{pmatrix} \ + \ \nu \ \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{2.3}$$

Теорема 1. *Для всех $\sigma > 0$ справедлива внешняя оценка множества достижимости $W(t_0 + \sigma) = W(t_0 + \sigma; t_0, X_0 \times \{t_0\})$ включения* (2.2)–(2.3)

$$W(t_0 + \sigma) \subseteq \bigcup_{0 \le \ \nu \le 1} \begin{pmatrix} E(a^+(\sigma, \nu), Q^+(\sigma, \nu)) \\ t_0 + \sigma(1-\nu) \end{pmatrix} + o(\sigma) B_*(0, 1), \tag{2.4}$$

$$\lim_{\sigma \to +0} \sigma^{-1} o(\sigma) = 0.$$

Здесь $B_*(0,1)$ — единичный шар в пространстве R^{n+1} (с центром в начале координат и радиусом 1*), параметры эллипсоида*

$$E(a^+(\sigma, \nu), Q^+(\sigma, \nu))$$

определяются равенствами

$$\begin{gathered} a^+(\sigma, \nu) = a(\sigma, \nu) + \sigma(1-\nu)\hat{a} + \sigma\nu G, \\ Q^+(\sigma, \nu) = (p^{-1} + 1) Q(\sigma, \nu) + (p+1)\sigma^2 (1-\nu)^2 \hat{Q}, \end{gathered} \tag{2.5}$$

где $p = p(\sigma, \nu)$ — единственное положительное решение уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p + \lambda_i} = \frac{n}{p(p+1)},$$

а $\lambda_i = \lambda_i(\sigma, \nu) \ge 0$ — корни уравнения $|Q(\sigma, \nu) - \lambda \sigma^2 (1-\nu)^2 \hat{Q}| = 0$ и

$$\begin{gathered} a(\sigma, \nu) = a + \sigma(1-\nu)(Aa + a'Ba \cdot d + k^2 d), \\ Q(\sigma, \nu) = k^2 (I + \sigma R) B^{-1} (I + \sigma R)', \ R = (1-\nu)(A + 2da'B). \end{gathered} \tag{2.6}$$

Доказательство. Применяя схему работ [8; 9], с соответствующими поправками в подсчете параметров оценивающих эллипсоидов, вызванными наличием дополнительных множителей $(1-\nu)$ и ν в правых частях дифференциального включения (2.2)–(2.3), приходим к заключению теоремы. □

Замечание 1. Теорема 1 может быть использована для построения численных алгоритмов оценивания множеств достижимости систем рассматриваемого в данном разделе типа (см. также [8; 9; 10; 14]).

Рассмотрим еще один вспомогательный результат, нужный в дальнейшем. Пусть дана динамическая система следующего вида

$$\dot{x} = A(t)\,x, \quad t_0 \le t \le T, \quad x_0 \in X_0 = E(a_0, Q_0). \tag{2.7}$$

Здесь матричная функция $A(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$A(t) = A^0 + A^1(t), \tag{2.8}$$

где матрица A^0 задана, а $A^1(t)$ не известна, но ограничена: $A^1(t) \in \mathcal{A}^1$ $(t \in [t_0, T])$,

$$\mathcal{A}^1 = \big\{A{=}\{a_{ij}\}{\in}\mathbb{R}^{n\times n} : |a_{ij}|{\le}c_{ij},\ i,j{=}1,\dots n\big\}, \tag{2.9}$$

числа $c_{ij} \ge 0$ $(i,j = 1,\dots n)$ заданы.

Тогда внешнюю эллипсоидальную оценку множества достижимости $\mathcal{X}(T)$ системы (2.7) можно найти, применив следующий результат.

Теорема 2 ([12])**.** *Пусть функции $a^+(t)$ и $Q^+(t)$ удовлетворяют соотношениям*

$$\dot{a}^+ = A^0 a^+, \quad a^+(t_0) = a_0, \tag{2.10}$$

$$\dot{Q}^+ = A^0 Q^+ + Q^+ A^{0\prime} + qQ^+ + q^{-1}G, \quad Q^+(t_0) = Q_0, \quad t_0 \le t \le T, \tag{2.11}$$

$$q = \big(n^{-1}\,\mathrm{Tr}\,((Q^+)^{-1}G)\,\big)^{1/2},$$

$$G = \mathrm{diag}\,\Big\{(n-v)\Big(\sum_{i=1}^{n} c_{ji}|a_i^+| + \big(\max_{\sigma=\{\sigma_{ij}\}} \sum_{p,q=1}^{n} Q^+_{pq} c_{jp} c_{jq} \sigma_{jp}\sigma_{jq}\big)^{1/2}\Big)^2\Big\}, \tag{2.12}$$

максимум в (2.12) вычисляется по всем $\sigma_{ij} = \pm 1$, $i,j = 1,\dots,n$, таким, что $c_{ij} \ne 0$, и v равно числу индексов is i, для которых $c_{ij} = 0$ для всех $j = 1,\dots,n$. Тогда верна оценка

$$\mathcal{X}(t) \subseteq E(a^+(t), Q^+(t)), \quad t_0 \le t \le T. \tag{2.13}$$

Следствие 1. *Имеет место следующее включение*

$$\begin{aligned} &\mathcal{X}(t_0+\sigma) \subseteq (I+\sigma\mathcal{A})\,\mathcal{X}_0 + o_1(\sigma)B(0,1) \subseteq \\ &E(a^+(t_0+\sigma), Q^+(t_0+\sigma)) + o_2(\sigma)B(0,1), \end{aligned} \tag{2.14}$$

где $\sigma^{-1}o_i(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to +0$ $(i = 1,2)$ и

$$(I+\sigma\mathcal{A})\,\mathcal{X}_0 = \bigcup_{x\in\mathcal{X}_0} \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \{x + \sigma A x\}.$$

Заметим, что отдельные свойства систем указанного вида рассматривались также в работах [10; 18].

3. Импульсная система: общий случай

Рассмотрим следующую систему ($t_0 \le t \le T$, $x \in R^n$)

$$\begin{gathered} dx(t) = \big(Ax(t) + x'Bx \cdot d + u(t)\big)dt + C dv(t), \\ A(t) = A^0 + A^1(t), \quad A^1(t) \in \mathcal{A}^1, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где B — положительно определенная матрица, $A^0 \in R^{n\times n}$, $d, C \in R^n$, множество $\mathcal{A}^1$ определено в (2.9). Здесь $v : [t_0, T] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации на $[t_0, T]$, монотонно возрастающая и непрерывная справа,

$$\operatorname*{Var}_{t\in[t_0,T]} v(t) = \sup_{\{t_i\}} \sum_{i=1}^{k} |v(t_i) - v(t_{i-1})| \le \mu,$$

где $t_i : t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_k = T$. Предположим также, что $X_0 = E(a, k^2 B^{-1})$ ($k \ne 0$), $u(t) \in \mathcal{U} = E(\hat{a}, \hat{Q})$.

Введем, как в предыдущем разделе, дополнительные переменные времени ([19])

$$\eta(t) = t + \int_{t_0}^{t} dv(s)$$

и координаты

$$\tau(\eta) = \inf\{t \mid \eta(t) \ge \eta\}$$

и рассмотрим включение

$$\begin{gathered} \tfrac{d}{d\eta} \begin{pmatrix} z \\ \tau \end{pmatrix} \in H(\tau, z), \\ z(t_0) = x_0 \in \mathcal{X}_0, \quad \tau(t_0) = t_0, \quad t_0 \le \eta \le T + \mu, \end{gathered} \tag{3.2}$$

$$H(\tau, z) = \bigcup_{0\le\nu\le1} \left\{ \nu \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\nu) \begin{pmatrix} Az + z'Bz \cdot d + E(\hat{a}, \hat{Q}) \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Обозначим $w = \{z, \tau\}$ расширенный вектор состояния системы (3.2), множество достижимости системы (3.2) обозначим символом $\mathcal{W}(\eta) = \mathcal{W}(\eta; t_0, w_0, \mathcal{A}, \mathcal{X}_0 \times \{t_0\})$ ($t_0 \le \eta \le T + \mu$).

Теорема 3. *Верно включение (здесь $\sigma > 0$)*

$$\mathcal{W}(t_0+\sigma) \subseteq \bigcup_{0\le\nu\le1} \mathcal{W}(t_0,\sigma,\nu) + o(\sigma)B^*(0,1), \quad \lim_{\sigma\to+0} \sigma^{-1}o(\sigma) = 0,$$
$$\mathcal{W}(t_0,\sigma,\nu) = \begin{pmatrix} E\big(a^*(\sigma,\nu), Q^*(\sigma,\nu)\big) \\ t_0+\sigma(1-\nu) \end{pmatrix},$$
$$a^*(\sigma,\nu) = \tilde{a}(\sigma,\nu) + \sigma(1-\nu)(a'Ba\cdot d + k^2 d + \hat{a}) + \sigma\nu C,$$
$$Q^*(\sigma,\nu) = (p^{-1}+1)\tilde{Q}(\sigma,\nu) + (p+1)\sigma^2(1-\nu)^2\hat{Q}, \tag{3.3}$$

где функции $\tilde{a}(\sigma,\nu)$, $\tilde{Q}(\sigma,\nu)$ вычисляются аналогично $a^+(t_0+\sigma)$, $Q^+(t_0+\sigma)$ в Теореме 2 при подстановке вместо матриц Q_0 и A^0 в (2.10)–(2.12), соответственно, матриц

$$\tilde{Q}_0 = k^2B^{-1}, \quad \tilde{A}^0(\nu) = (1-\nu)(A^0 + 2d\cdot a_0'B).$$

Здесь $B^*(0,1)$ — единичный шар в расширенном пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, $p = p(\sigma,\nu)$ — единственный положительный корень уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p+\lambda_i} = \frac{n}{p(p+1)}$$

и $\lambda_i = \lambda_i(\sigma,\nu) \ge 0$ $(i = 1,\ldots,n)$ удовлетворяют соотношениям

$$|\tilde{Q}(\sigma,\nu) - \lambda\sigma^2(1-\nu)^2\hat{Q}| = 0.$$

Доказательство. Применяя теорему 2 и используя конструкции вспомогательной системы (3.2), приходим к соотношениям (3.3). □

Из теоремы 3 и конструкции вспомогательной системы вытекает следующая оценка множества достижимости системы (1.1)–(1.5) при малых сдвигах во времени, которая может быть использована в качестве базового элемента пошагового алгоритма построения внешней по включению оценки множества достижимости исследуемой системы на всем промежутке времени.

Следствие 2. *Справедливо включение:*

$$\mathcal{X}(t_0+\sigma) \subseteq \pi_z\mathcal{W}(t_0+\sigma) + o(\sigma)B(0,1), \quad \lim_{\sigma\to+0} \sigma^{-1}o(\sigma) = 0.$$

Замечание 2. Численные алгоритмы для близких по постановкам схем оценивания состояний неопределенных импульсных систем и соответствующие иллюстрирующие примеры приведены в работах [9; 10].

4. Заключение

В работе исследованы проблемы оценивания состояний неопределенной динамической системы импульсным управлением и с неточно известным начальным состоянием, а также неточно известной матрицей, входящей в дифференциальные уравнения динамики системы. Предполагается, что указанные неизвестные параметры являются элементами заданных (известных) множеств.

Изучен случай, когда кроме отмеченных факторов в системе присутствует квадратичная функция, воздействующая на фазовые скорости системы. Предложены новые модели и алгоритмы оценивания множеств достижимости нелинейной управляемой системы с указанной комбинированной нелинейностью. Исследования могут представлять интерес для моделирования и изучения конкретных прикладных моделей, в том числе в механике и робототехнике (например, системы с сухим трением), биологии (популяционные модели), экономике (оптимизация портфельных инвестиций) и других разделах.

Список литературы

1. Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления / В. И. Гурман. – М. : Наука, 1985.
2. Гурман В. И. Представление и реализация обобщенных решений управляемых систем с неограниченным годографом / В. И. Гурман, Ю. Л. Сачков // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 4. – С. 72–80.
3. Дыхта В. А. Оптимальное импульсное управление с приложениями / В. А. Дыхта, О. Н. Самсонюк. – М. : Физматлит, 2000.
4. Завалищин С. Т. Импульсные процессы: Модели и приложения / С. Т. Завалищин, А. Н. Сесекин. – М. : Наука, 1991.
5. Красовский Н. Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский – М.: Наука, 1968.
6. Кротов В. Ф. Методы и задачи оптимального управления / В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. – М. : Наука, 1973.
7. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А. Б. Куржанский. – М.: Наука, 1977.
8. Филиппова Т. Ф. Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с импульсным управлением / Т. Ф. Филиппова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2009. – Т. 15. – № 4. – С. 262–269.
9. Филиппова Т. Ф. Алгоритмы оценивания множеств достижимости импульсных управляемых систем с эллипсоидальными фазовыми ограничениями / Т. Ф. Филиппова, О. Г. Матвийчук // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 9. – С. 127–141.
10. Филиппова Т. Ф. Задачи импульсного управления в условиях неопределенности / Т. Ф. Филиппова, О. Г. Матвийчук // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014). ИПУ РАН, 16-19 июня 2014. — М., 2014. – С. 1024–1032.

11. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем / Ф. Л. Черноусько. – М. : Наука, 1988.
12. Черноусько Ф. Л. Эллипсоидальная аппроксимация множеств достижимости линейной системы с неопределенной матрицей / Ф. Л. Черноусько // Прикл. математика и механика. – 1996. – Т. 60, № 6. – С. 940–950.
13. Filippova T. F. Set-valued dynamics in problems of mathematical theory of control processes / T. F. Filippova // International Journal of Modern Physics B (IJMPB). – 2012. – Vol. 26, N 25. – P. 1–8.
14. Filippova T. F. Asymptotic behavior of the ellipsoidal estimates of reachable sets of nonlinear control systems with uncertainty / T. F. Filippova // Proceedings of the 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2014). Vienna, Austria, July 6-11, 2014, H. Ecker, A. Steindl and S. Jakubek (eds.), Institute of Mechanics and Mechatronics, TU–Vienna, Austria. CD-ROM volume (ISBN: 978-3-200-03433-4). Paper-ID 149. – Vienna, 2014. – P. 1–2.
15. Kurzhanski A. B. On the theory of trajectory tubes – a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control /A. B. Kurzhanski, T. F. Filippova // Advances in nonlinear dynamics and control: a report from Russia (A.B. Kurzhanski, ed.) / Progress in Systems and Control Theory. – Boston: Birkhauser, 1993. – Vol. 17. – Pp. 122–188.
16. Kurzhanski A. B. Ellipsoidal calculus for estimation and control / A. B. Kurzhanski, I. Valyi – Boston: Birkhäuser, 1997.
17. Kurzhanski A. B. Dynamics and control of trajectory tubes, theory and computation. Systems & control: foundations & applications, Vol. 85. / A. B. Kurzhanski, P. Varaiya – Basel: Birkhäuser, 2014.
18. Matviychuk O. G. Ellipsoidal estimates of reachable sets of impulsive control systems with bilinear uncertainty / O. G. Matviychuk // Cybernetics and Physics Journal. – 2016. – Vol. 5, no 3. – Pp. 96—104.
19. Rishel R. An extended Pontryagin principle for control system whose control laws contain measures /R. Rishel // SIAM J. Control. – 1965. – Vol. 3. – Pp. 191–205.
20. Vinter R. B. A maximum principle for optimal processes with discontinuous trajectories / R. B. Vinter, F. L. Pereira // SIAM J. Contr. and Optimization. – 1988. – Vol. 26, no 1. – Pp. 205–229.

Филиппова Татьяна Федоровна, доктор физико-математических наук, профессор, зав. отделом, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16; тел.: (343)3753442 (e-mail: ftf@imm.uran.ru)

T. F. Filippova

Estimates of Reachable Sets for Systems with Impulsive Control, Uncertainty and Nonlinearity

Abstract. The problem of estimating trajectory tubes for nonlinear controlled dynamical systems with uncertainty in the initial data is studied. It is assumed that the dynamic system has a special structure in which the nonlinear terms are defined by quadratic forms on state coordinates and the values of uncertain initial states and admissible controls are constrained by ellipsoidal restrictions. Matrix of linear terms in the state system velocities is also not exactly known, but it belongs to the known compact in the corresponding space, i.e. the dynamics of the system is complicated by the presence of bilinear components in the right-hand sides of the system of differential equations. We solve the problem of estimating the reachable sets of nonlinear control system of this kind, the results make it possible to construction of the corresponding numerical algorithms. We solve here the problem of estimating the reachable sets of nonlinear controlled system of this kind, the results make it possible to construct the corresponding numerical algorithms.

Keywords: control system, reachable set, impulse control, state estimation, uncertainty.

References

1. Gurman V. I. *Printsip rasshireniya v zadachakh upravleniya* [The Extension Principle in Control Problems]. Moscow, Nauka, 1985.
2. Gurman V. I., Sachkov Yu. L. Representation and Realization of the Generalized Solutions of the Unlimited-locus Controllable Systems. *Autom. Remote Control*, 2008, vol. 69, no 4, pp. 609–617. https://doi.org/10.1134/S0005117908040073
3. Dykhta V. A., Samsonyuk O. N. *Optimal'noe impul'snoe upravlenie s prilozheniyami* [Optimal Impulsive Control with Applications]. Moscow, Fizmatlit, 2000.
4. Zavalishchin S. T., Sesekin A. N. *Impul'snye processy: modeli i prilozhenija* [Impulse Processes: Models and Applications]. Moscow, Nauka, 1991.
5. Krasovskii N. N. Teoriya upravleniya dvizheniem [Theory of motion control]. Moscow, Nauka, 1968.
6. Krotov V. F., Gurman V. I. *Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya* [Methods and Problems of Optimal Control]. Moscow, Nauka, 1973.
7. Kurzhanski A. B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and Observation under Uncertainty]. Moscow, Nauka, 1977.
8. Filippova T. F. Construction of Set-valued Estimates of Reachable Sets for Some Nonlinear Dynamical Systems with Impulsive Control. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues)*, 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. 95–102. https://doi.org/10.1134/S008154381006009X
9. Filippova T. F., Matviichuk O. G. Algorithms to Estimate the Reachability Sets of the Pulse Controlled Systems with Ellipsoidal Phase Constraints. *Autom. Remote Control*, 2011, vol. 72, no 9, pp. 1911–1924. https://doi.org/10.1134/S000511791109013X
10. Filippova T. F., Matviichuk O. G. Problems of Impulse Control under Uncertainty [Zadachi impul'snogo upravleniya v usloviyakh neopredelennosti]. *Trudy XII vserossiyskogo soveshchaniya po problemam upravleniya* [Proc. XII All-Russia conference on control problems (VSPU-2014). IPU RAS, June 16–19 2014.]. Moscow, 2014, pp. 1024–1032.
11. Chernousko F. L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem* [Estimation of the Pphase State of Dynamical Systems]. Moscow, Nauka, 1988.
12. Chernousko F. L. Ellipsoidal'naya approksimatsiya mnozhestv dostizhimosti lineynoy sistemy s neopredelennoy matritsey [Ellipsoidal Approximation of the Attainability Sets of a Linear System with an Uncertain Matrix]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1996, vol. 60, no 6, pp. 940–950.
13. Filippova T. F. Set-valued Dynamics in Problems of Mathematical Theory of Control Processes. *International Journal of Modern Physics B (IJMPB)*, 2012, vol. 26, no. 25, pp. 1–8. https://doi.org/10.1142/S0217979212460101

14. Filippova T. F. Asymptotic Behavior of the Ellipsoidal Estimates of Reachable Sets of Nonlinear Control Systems with Uncertainty. Proc. of the 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2014). Vienna, Austria, July 6-11, 2014, H. Ecker, A. Steindl and S. Jakubek (Eds.), Institute of Mechanics and Mechatronics, TU–Vienna, Austria. CD-ROM volume (ISBN: 978-3-200-03433-4). Paper-ID 149. Vienna, 2014, pp. 1–2.
15. Kurzhanski A. B., Filippova T. F. On the Theory of Trajectory Tubes – a Mathematical Formalism for Uncertain Dynamics, Viability and Control. *Advances in Nonlinear Dynamics and Control: a Report from Russia (A.B. Kurzhanski, ed.)* Progress in Systems and Control Theory. Boston, Birkhauser, 1993, vol. 17, pp. 122–188.
16. Kurzhanski A. B., Valyi I. *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*. Boston, Birkhäuser, 1997. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0277-6
17. Kurzhanski A. B., Varaiya P. *Dynamics and Control of Trajectory Tubes, Theory and Computation. Systems* & *Control: Foundations* & *Applications*, vol. 85. Basel, Birkhäuser, 2014.
18. Matviychuk O. G. Ellipsoidal Estimates of Reachable Sets of Impulsive Control Systems with Bilinear Uncertainty. *Cybernetics and Physics Journal*, 2016, vol. 5, no 3, pp. 96—104.
19. Rishel R. An Extended Pontryagin Principle for Control System whose Control Laws Contain Measures. *SIAM J. Control*, 1965, vol. 3, pp. 191–205. https://doi.org/10.1137/0303016
20. Vinter R. B., Pereira F. L. A Maximum Principle for Optimal Processes with Discontinuous Trajectories. *SIAM J. Contr. and Optimization*, 1988, vol. 26, no 1, pp. 205–229. https://doi.org/10.1137/0326013

Filippova Tatiana Fedorovna, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Head of Department, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, 16, S. Kovalevskaya st., Ekaterinburg, 620990, tel.: (343)3753442 (e-mail: ftf@imm.uran.ru)