Серия «Математика»
2017. Т. 19. С. 195—204

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.948
MSC 45D05
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.19.195

Оптимизация приближённого метода решения линейных краевых задач интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с функциональными запаздываниями

Г. А. Шишкин
Бурятский государственный университет

Светлой памяти
профессора Владимира Иосифовича Гурмана

Аннотация. В данной статье исследуется возможность приближённого решения разрешающих уравнений для краевых задач линейных интегродифференциальных уравнений Вольтерра с функциональными запаздываниями. Эти разрешающие уравнения получены с помощью новой формы функции гибкой структуры выведенной с учётом краевых условий и начальных функций. С помощью этой формы было показано, что все линейные краевые задачи интегродифференциальных уравнений Вольтерра запаздывающего типа преобразуются к интегральным уравнениям смешанного типа Вольтерра – Фредгольма с обыкновенным аргументом. К разрешающим уравнениям такого же вида преобразуются и краевые задачи некоторых видов уравнений нейтрального и опережающего типов.

Далее встаёт вопрос решения полученных разрешающих уравнений. Так как в полученные формулы функций и ядер разрешающих интегральных уравнений входят неопределённые вначале решения краевой задачи параметры, то за счёт их оптимального выбора можно пытаться искать точное решение, если же это затруднительно или невозможно, то приближённое решение. Приближённое решение разрешающих интегральных уравнений смешанного типа Вольтерра – Фредгольма с обыкновенным аргументом в работе получено методом последовательных приближений. При его реализации, как и при применении других методов, за счёт оптимального выбора параметров можно сокращать объём выкладок и ускорять процесс сходимости метода. Для приближённых решений разрешающих уравнений получены формулы вычисления погрешности, а используя их и формулы вычисления погрешности первоначально поставленных краевых задач. Рассмотрен и возможный вариант решения в случае, когда за счёт выбора параметров можно сделать все ядра под интегралами с постоянными пределами интегрирования тождественно равными нулю. Приведённый пример подпадает под этот вариант решения. Для такого варианта решения также получены формулы оценки погрешностей разрешающих уравнений и первоначально поставленных краевых задач.

Ключевые слова: краевая задача, интегродифференциальные уравнения Вольтерра, разрешающее уравнение, функция гибкой структуры, приближённое решение.

Введение

В работе [6] начальные задачи интегродифференциальных уравнений Вольтерра с запаздывающим аргументом и в работах [3; 4; 5; 7] краевые задачи для всех уравнений запаздывающего, определённых видов нейтрального и опережающего типов преобразованы к разрешающим уравнениям с обыкновенным аргументом. Эти преобразования для краевых задач получены с помощью новой формы функции гибкой структуры, для вывода которой в работе [7] использовалась форма функции гибкой структуры для решения начальных задач, определённая Н. К. Куликовым в работе [2]. Определение типов уравнений осуществлялось в соответствии с классификацией, приведённой в работе [1]. В данной работе исследуем вопрос о возможности приближённого решения полученных в работах [3; 4; 5] разрешающих интегральных уравнений смешанного типа Вольтерра – Фредгольма.

1. Постановка задачи и её решение

Рассмотрим общий вид линейных интегродифференциальных уравнений Вольтерра с запаздывающим аргументом

$$\sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{n}\left[f_{ij}(x)y^{(i)}(u_j(x))+\lambda\int\limits_a^x K_{ij}(x,\eta)y^{(i)}(u_j(\eta))d\eta\right]=f(x), \qquad (1.1)$$

где $u_0(x)\equiv x$, $u_j(x)\le x\ \forall j=\overline{1,l}$ и $u_j(x)\not\equiv x$, функции $f_{ij}(x)$, $u_j(x)$ и $f(x)$ — непрерывны, ядра $K_{ij}(x,\eta)$ — регулярны в квадрате $a\le x,\ \eta\le b$.

Определим линейные двухточечные краевые условия для уравнения (1.1)

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[\alpha_{i\tau}y^{(i)}(x_0)+\beta_{i\tau}y^{(i)}(x_1)\right]=\gamma_\tau,$$
$$\tau=\overline{0,n-1},\quad a\le x_0<x_1\le b. \qquad (1.2)$$

Выпишем начальные функции в стандартной форме для краевых задач с запаздывающим аргументом

$$y^{(i)}(u_j(x))=y^{(i)}(x_0)\varphi^{(i)}(u_j(x)),\quad i=\overline{0,n-1},\quad x\in E_{x_0}, \qquad (1.3)$$

Известия Иркутского государственного университета.
2017. Т. 19. Серия «Математика». С. 195–204

где $E_{x_0} = \bigcup\limits_{j=0}^{l} E^j_{x_0}$, $E^j_{x_0}$ — множество точек, для которых соответствующие $u_j(x) \leq x$ при $x \geq x_0$ $\forall j = \overline{1, l}$ и $E^0_{x_0} = [a, x_0]$.

Решение задачи (1.1)–(1.3) существует и единственно при условии непрерывности всех функций и регулярности ядер. В работах [3; 4; 5] краевые задачи интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с запаздывающим аргументом для всех выше перечисленных видов уравнений преобразованы к разрешающим уравнениям с обыкновенным аргументом одного и того же вида

$$\mu(z) + \sum_{j=0}^{l} \Big[\int\limits_{x_0}^{x_1} T_j(z,t)\mu(t)dt + \lambda \int\limits_{x_0}^{\nu_j(z)} Q_j(z,t)\mu(t)dt \Big] = R(z), \qquad (1.4)$$

где для каждого типа и вида уравнений получены определённые формулы для ядер $T_j(z,t)$, $Q_j(z,t)$ и функций $R(z)$, $\nu_j(z)$ $\forall j = \overline{0, l}$.

Для решения смешанных интегральных уравнений типа Вольтерра – Фредгольма (1.4) применимы методы и способы приближённого решения интегральных уравнений. При этом наличие параметров в структуре функций в разрешающем уравнении (1.4) даёт возможность ускорить сходимость любого из известных приближённых методов за счёт оптимального выбора этих параметров.

Применив метод последовательных приближений к уравнению (1.4) и приняв за начальное приближение функцию $\mu_0(z) = R(z)$, выпишем рекуррентную формулу для последовательных приближений

$$\mu_k(z) = R(z) - \sum_{j=0}^{l} \left[\int\limits_{x_0}^{x_1} T_j(z,t)\mu_{k-1}(t)dt + \int\limits_{x_0}^{\nu_j(z)} Q_j(z,t)\mu_{k-1}(t)dt \right], \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (1.5)$$

Для доказательства сходимости метода и существования решения рассмотрим функциональный ряд

$$\mu_0(z) + [\mu_1(z) - \mu_0(z)] + [\mu_2(z) - \mu_1(z)] + \cdots + [\mu_k(z) - \mu_{k-1}(z)] + \ldots \qquad (1.6)$$

Частичная сумма ряда (1.6) равна $\mu_k(z)$. Тогда в силу равномерной и абсолютной сходимости этот ряд имеет непрерывную сумму $\mu(z) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu_k(z)$.

Примем за приближённое решение искомой функции $\mu(z)$ её k-ое приближение

$$\mu(z) \approx \mu_k(z). \qquad (1.7)$$

Погрешность приближённого решения не превосходит максимума остатка ряда (1.6). Обозначим это гарантированное значение погрешности через δ_{μ_k}. При условии ограниченности функций

$$|R(z)| \leq A, \quad |T_j(z,t)| \leq M_j, \quad |Q_j(z,t)| \leq N_j,$$

$$|\nu_j(z)| \leq x \leq b, \quad \forall j = \overline{0,l} \tag{1.8}$$

в квадрате $\alpha \leq z,\ t \leq \beta$ и, приняв за $B = \max\limits_{j=\overline{0,l}}(M_j, N_j)$, получим гарантированную оценку погрешности приближённого решения

$$\delta_{\mu_k} \leq [2(l+1)B|z_0 - x_0|]^{k+1} + [2(l+1)B|z_0 - x_0|]^{k+2} + \ldots \tag{1.9}$$

Ряд (1.9) составлен из членов геометрической прогрессии и поэтому сходится при

$$2(l+1)B|z_0 - x_0| \leq 1. \tag{1.10}$$

Если условие (1.10) выполняется, то погрешность приближённого решения δ_{μ_k} может быть вычислена по формуле

$$\delta_{\mu_k} \leq \frac{[2(l+1)B|z_0 - x_0|]^{k+1}}{1 - 2(l+1)B|z_0 - x_0|}. \tag{1.11}$$

Условие (1.10) в общем случае довольно жёсткое, поэтому рассмотрим ещё один возможный вариант приближённого решения. За счёт выбора части параметров минимизируем ядра $T_j(z,t)$, а остальные параметры далее используются для ускорения метода последовательных приближений. Если удалось сделать эти ядра достаточно малыми (для некоторых видов уравнений они автоматически равны нулю), то мы можем рассматривать разрешающее уравнение типа Вольтерра

$$\mu(z) + \sum_{j=0}^{l} \int\limits_{x_0}^{\nu_j(z)} Q(z,t)\mu(t)dt = R(z). \tag{1.12}$$

Рекуррентная формула для последовательных приближений будет

$$\mu_k(z) = R(z) - \sum_{j=0}^{l} \int\limits_{x_0}^{\nu_j(z)} Q(z,t)\mu_{k-1}(t)dt, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.13}$$

При тех же ограничениях $|\mu_0(z) = |R(z)| \leq A$ и при $|Q_j(z,t)| \leq N_j$ $\forall j = \overline{0,l}$ в квадрате $\alpha \leq z,\ t \leq \beta$, для членов ряда (1.6) получим оценки

$$|\mu_1(z) - \mu_0(z)| = \Big|\sum_{j=0}^{l} \int\limits_{x_0}^{\nu_j(z)} Q_j(z,t)\mu_0(t)dt\Big| \leq \Big|\sum_{j=0}^{l} \int\limits_{x_0}^{x} N_j A dt\Big| \leq A|x - x_0|N,$$

где $N = \sum\limits_{j=0}^{l} N_j$ и в силу соотношений $\nu_j(z) = u_j(u_l^{-1}(z)) = u_j(x) \leq x$, функции $\nu_j(z)$ в верхних пределах интегралов заменены на x, затем x на b, найдём

$$|\mu_k(z) - \mu_{k-1}(z)| \leq AN^k \frac{|x - x_0|^k}{k!}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.14}$$

Мажорирующий ряд для ряда (1.6), построенный из полученных оценок при $a \leq x \leq b$, будет

$$A\left[1+N|b-x_0|+N^2\frac{|b-x_0|^2}{2!}+\dots+N^k\frac{|b-x_0|^k}{k!}+\dots\right]. \qquad (1.15)$$

Ряд (1.15) по признаку Даламбера всегда сходится, так как

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A\cdot N^{k+1}\cdot|b-x_0|^{k+1}\cdot k!}{(k+1)!\cdot A\cdot N^k\cdot|b-x_0|^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{N|b-x_0|}{k+1}=0<1.$$

Следовательно, ряд (1.6) по критерию Вейерштрасса всегда сходится равномерно и абсолютно, и для решения уравнения (1.12) получаем оценку

$$|\mu(z)|\leq Ae^{N|b-x_0|}. \qquad (1.16)$$

Оценку погрешности δ_{μ_k} k-го приближения решения уравнения (1.12) для отрезка $z\in[\alpha,\beta]$ при $a\leq x\leq b$, воспользовавшись формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получим в виде

$$\delta_{\mu_k}\leq\frac{|b-x_0|^{k+1}}{(k+1)!}AN^{k+1}e^{N\theta|b-x_0|},\quad 0<\theta<1. \qquad (1.17)$$

Приближённое решение первоначально поставленной задачи получим, воспользовавшись формулой функции гибкой структуры (2^{**}) для краевой задачи в случаях **2** и **3** работы [7]

$$y(x)\approx y_k(x)=D^{-1}\Big\{\sum_{s=1}^{n}\Delta_s(x-x_0)\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{s\tau}}{\omega}\Big[\gamma_\tau-$$

$$-D^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k}\mu_k(t)dt\Big]+\int\limits_{x_0}^{x}\Delta_n(x-t)\mu_k(t)dt\Big\}. \qquad (2^{**})$$

Откуда следует, что гарантированная погрешность приближённого решения δ_{y_k} найдётся как максимум модуля разности $|y(x)-y_k(x)|$

$$\delta_{y_k}\leq\max_{a\leq x\leq b}|y(x)-y_k(x)|=\max_{a\leq x\leq b}\Big|D^{-1}\Big\{\sum_{s=1}^{n}\Delta_s(x-x_0)\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{s\tau}}{\omega}\cdot$$

$$\cdot\Big[\gamma_\tau-D^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k}\mu(t)dt\Big]+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta_n(x-t)\mu(t)dt\Big\}-D^{-1}\Big\{\sum_{s=1}^{n}\Delta_s(x-x_0)\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{s\tau}}{\omega}\Big[\gamma_\tau-$$

$$-D^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k}\mu_k(t)dt\Big]+\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta_n(x-t)\mu_k(t)dt\Big\}\Big|=$$

$$=\max_{a\le x\le b}\Big|D^{-2}\sum_{s=1}^{n}\Delta_s(x-x_0)\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{s\tau}}{\omega}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k}\cdot$$

$$\cdot[\mu(t)-\mu_k(t)]dt\Big|+\max_{a\le x\le b}\Big|D^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}\Delta_n(x-t)[\mu(t)-\mu_k(t)]dt\Big|\le$$

$$\le\delta_{\mu_k}\max_{a\le x\le b}\Big|D^{-2}\sum_{s=1}^{n}\Delta_s(x-x_0)\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{s\tau}}{\omega}\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k}dt+$$

$$+D^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}\Delta_n(x-t)dt\Big|.$$

Итак, гарантированную погрешность приближённого решения краевых задач для уравнений вида (1.1) можно вычислить по формуле

$$\delta_{y_k}\le\delta_{\mu_k}\max_{a\le x\le b}\Big|D^{-2}\sum_{s=1}^{n}\Delta_s(x-x_0)\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\omega_{s\tau}}{\omega}\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{k\tau}\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^k\Delta_n(x_1-t)}{\partial x_1^k}dt+$$

$$+D^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}\Delta_n(x-t)dt\Big|. \tag{1.18}$$

Задача. Найти решение краевой задачи на отрезке $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ с точностью $\alpha=0.0001$.

$$4y'\left(\frac{x}{2}\right)+2\int\limits_{0}^{x}(x-\eta)y'(\eta)d\eta=x,\quad 3y(0)+y(1)=1,$$

$$\text{и } y(x)=y(0),\quad y\left(\frac{x}{2}\right)=y(0)\text{ на }E_{x_0}.$$

Решение. В данной краевой задаче $x_0=0$, $x_1=1$, $u_0(x)\equiv x$, $u_1(x)=\frac{x}{2}$, $c_0=0$, $c_1=0$, $E_{x_0}=[0]$. Так как начальное множество состоит из одной точки, совпадающей со значением нижнего предела интегрирования, то начальные функции на значения интеграла влиять не будут.

Выпишем функцию гибкой структуры и её значение $y(x_1)$ для начальной задачи, учитывая условия краевой задачи

$$y(x) = y(0)e^{rx} + \int\limits_0^x e^{r(x-t)}\mu(t)dt, \quad y(1) = y(0)e^{r} + \int\limits_0^1 e^{r(1-t)}\mu(t)dt.$$

И повторим на этом примере вывод формулы функции гибкой структуры для краевой задачи. Подставив полученное выражение для $y(x_1)$ в краевые условия задачи, найдём

$$y(0) = \frac{1}{3+e^r} - \frac{1}{3+e^r}\int\limits_0^1 e^{r(1-t)}\mu(t)dt.$$

Затем, подставив это выражение для $y(0)$ в функцию гибкой структуры, найдём её выражение в соответствии с условиями краевой задачи

$$y(x) = \frac{e^{rx}}{3+e^r} - \frac{e^{rx}}{3+e^r}\int\limits_0^1 e^{r(1-t)}\mu(t)dt + \int\limits_0^x e^{r(x-t)}\mu(t)dt.$$

С целью сокращения объёма выкладок положим $r = 0$ (хотя это возможно не оптимальное значение параметра). Тогда выражения функции гибкой структуры и её производных упростятся

$$y(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \mu(t)dt + \int\limits_0^x \mu(t)dt \text{ и}$$

$$y\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \mu(t)dt + \int\limits_0^{\frac{x}{2}} \mu(t)dt, \quad y'(x) = \mu(x), \quad y'\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{x}{2}\right).$$

Подставив полученные выражения функции гибкой структуры и её производных для данной краевой задачи в исходное уравнение, получим разрешающее уравнение и рекуррентную формулу последовательных приближений к решению этого уравнения

$$\mu\left(\frac{x}{2}\right) + \int\limits_0^x (x-t)\mu(t)dt = \frac{x}{2}, \quad \mu_k\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} - \int\limits_0^x (x-t)\mu_{k-1}(t)dt.$$

Возьмем $\mu_0(x) = 0$, тогда $\mu_1\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} - \int\limits_0^x (x-t)0dt = \frac{x}{2}$, $\mu_1(t) = t$.

$$\mu_2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} - \int\limits_0^x (x-t)tdt = \frac{x}{2} - \frac{2^3}{6}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^3, \quad \mu_2(t) = t - \frac{4}{3}t^3.$$

Посчитаем погрешность второго приближения решения разрешающего уравнения по формуле (1.17), при $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $A = \max\limits_{0 \leq x \leq \frac{1}{2}} \left|\frac{x}{2}\right| = \frac{1}{4}$, $Q_0 = \max\limits_{0 \leq x,\ t \leq \frac{1}{2}} |x - t| = \frac{1}{2}$, $Q_1 = 0$, $N = \max(Q_0, Q_1) = \frac{1}{2}$, $x_0 = 0$, $l = 1$, $k = 2$.

$$\alpha_{\mu_2} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (2)^3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{4^3} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4^2}} = \frac{e^{\frac{1}{16}}}{4^4 \cdot 6} \approx \frac{1.00752}{1536} \approx 0.00066.$$

Так как краевую задачу фактически свели к решению начальной задачи, то найдем второе приближение к решению исходной задачи, подставив значение $\mu_2(t)$ в формулу функции гибкой структуры для начальной задачи

$$y_2(x) = D^{-1}\Big[\sum_{s=1} 2y^{(s-1)}(0)\Delta_s(x) + \int\limits_0^x \Delta_2(x-t)\mu_2(t)dt\Big] =$$

$$= 1 + \int\limits_0^x (x-t)\Big(t - \frac{4t^3}{3}\Big)dt = 1 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{15}.$$

Посчитаем погрешность второго приближения к решению исходной задачи

$$\alpha_{y_2} \leq \alpha_{\mu_2} \cdot \max_{0 \leq x \leq \frac{1}{2}} \Big| \int\limits_0^x D^{-1}\Delta_2(x-t)dt \Big| = \alpha_{\mu_2} \cdot \max_{0 \leq x \leq \frac{1}{2}} \Big| \int\limits_0^x (x-t)dt \Big| \frac{1}{8}\alpha_{\mu_2} \approx$$

$$\approx 0.000082 < 0.0001.$$

Как видим, требуемая точность по условию задачи достигнута.

Список литературы

1. Громова П. С. Некоторые вопросы качественной теории интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / П. С. Громова // Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Т. 5. – М., 1967. – С. 61–76.
2. Куликов Н. К. Решение и исследование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе функций с гибкой структурой / Н. К. Куликов // Тематический сборник МТИПП. – М., 1974. – С. 47-57.
3. Шишкин Г. А. Краевая задача одного вида интегродифференциальных уравнений Вольтерра нейтрального типа / Г. А. Шишкин // Вестн. Бурят. гос. ун-та. Математика, информатика. – 2014. – Вып. 2. – С. 67-70.
4. Шишкин Г. А. Краевые задачи интегродифференциальных уравнений Вольтерра запаздывающего типа / Г. А. Шишкин // Вестн. Бурят. гос. ун-та. Математика, информатика. – 2014. – Вып. 9(2). – С. 85-88.

5. Шишкин Г. А. Краевые задачи интегродифференциальных уравнений Вольтерра с функциональным аргументом опережающего типа / Г. А. Шишкин // Вестн. Бурят. гос. ун-та. Математика, информатика. – 2015. – Вып. 9. – С. 23-26.
6. Шишкин Г. А. Исследование и решение задачи Коши для линейных интегродифференциальных уравнений Вольтерры с с функциональным запаздыванием / Г. А. Шишкин // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 10, С. 1508–1512.
7. Шишкин Г. А. Функция гибкой структуры и её модификация при решении краевых задач для уравнений с функциональным запаздыванием / Г. А. Шишкин // Вестн. Бурят. гос. ун-та. Математика, информатика. – 2013. – Вып. 9. – С. 144-147.

Шишкин Геннадий Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики и информатики, Бурятский государственный университет, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а, тел.: (3012)219762 (e-mail: gnshishkin@mail.ru)

G. A. Shishkin

The Optimization of the Approximate Method of the Solution of Linear Boundary Value Problems for Volterra Integro-differential Equations with Functional Delays

Abstract. This article studies the possibility of approximate solution of resolving equations for boundary value problems of Volterra linear integer differential equations with functional delays. These resolving equations are obtained using a new form of function of flexible structure deduced by means of boundary conditions and initial functions. Using this form, it was shown that all the linear boundary value problems of Volterra integer differential equations of delay type are converted to integral equations of Volterra-Fredholm mixed type with the common argument. The boundary value problems of certain types of equations of neutral and advanced types are also transformed to the resolving equations of the same type.

Further on the issue arises to solve the obtained resolving equations. Since firstly uncertain parameters of solutions of the boundary value problem include these formulas of functions and cores of resolving integral equations, then due to their optimal choice, the exact solution can be found, or if it is difficult or impossible, the approximate solution. The approximate solution of the resolving integral equations of Volterra-Fredholm mixed type with the common argument in this work is obtained by the method of successive approximations. In its implementation, as well as in the use of other methods, due to the optimal choice of parameters, the amount of calculations can be reduced and the process of convergence of the method can be accelerated. The formulas for calculating the error are obtained for the approximate solutions of resolving equations, and using them also the error calculation formulas for initially set boundary value problems. The possible variant of the solution is also considered for the case when due to the choice of parameters all the cores for integrals with constant limits of integration can be identically equal to zero. The above example is subject to this variant of solution. The formulas of error estimation for resolving equations and initially set boundary value problems are also obtained for this variant of solution.

Keywords: boundary value problem; Volterra integer differential equations; resolving equation; function of flexible structure; approximate solution.

References

1. Gromova P.S. Nekotorye voprosy kachestvennoj teorii integro-differencial'nyh uravnenij s otklonjajushhimsja argumentom [Some Questions in the Qualitative Theory of Integral Differential Equations with Deviating Argument]. *Trudy seminara po teorii differencial'nyh uravnenij s otklonjajushhimsja argumentom*, Moscow, 1967, vol. 5, pp. 61-76.
2. Kulikov N.K. The Decision and Research of the Ordinary Differential Equations on the Basis of Functions with Flexible Structure [Reshenie i issledovanie obyknovennyh differencial'nyh uravnenij na osnove funkcij s gibkoj strukturoj]. *Tematicheskij sbornik MTIPP*, Moscow, 1974, pp. 47-57.(in Russian)
3. Shishkin G.A. Kraevaja zadacha odnogo vida integrodifferencial'nyh uravnenij Vol'terra nejtral'nogo tipa [Boundary Value Problem of One Kind for Volterra Integer Differential Equations of Neutral Type] . *Vestnik Burjatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika [Bulletin of the Buryat State University. Mathematics, Informatics]*, 2014, Issue 2, pp. 67-70.
4. Shishkin G.A. Kraevye zadachi integrodifferencial'nyh uravnenij Vol'terra zapazdyvajushhego tipa [The Boundary Value Problems of Volterra Integer Differential Equations of Retarding Type]. *Vestnik Burjatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika [Bulletin of the Buryat State University. Mathematics, Informatics]*, 2014, Issue 9(2), pp. 85-88.
5. Shishkin G.A. Kraevye zadachi integrodifferencial'nyh uravnenij Vol'terra s funkcional'nym argumentom operezhajushhego tipa [Boundary-Value Problems of Volterra Integer Differential Equations with Functional Argument of Advancing Type]. *Vestnik Burjatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika [Bulletin of the Buryat State University. Mathematics, Informatics]*, 2015, Issue 9, pp. 23-26.
6. Shishkin G.A. Research and Solution of the Cauchy Problem for Linear Integer Dfferential Volterra Equations with Functional Delay. *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no 10, pp. 1508-1512. https://doi.org/10.1134/S001226611110017X
7. Shishkin G.A. Function of Flexible Structure and Its Updating at the Solution of Boundary Value Problems for Equations with Functional Delay. *Vestnik Burjatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika*, 2013, Issue 9, pp. 144-147.(in Russian)

Shishkin Gennadiy Aleksandrovich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Institute of Mathematics and Informatics, Buryat State University, 24a, Smolin st., Ulan-Ude, 670000, tel.: (3012)219762 (e-mail: gnshishkin@mail.ru)