Серия «Математика»
2017. Т. 19. С. 62—74

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.977.5
MSC 34H05
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.19.62

Дискретные неоднородные системы и достаточные условия оптимальности *

И. В. Расина
Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН

Светлой памяти моего учителя,
профессора Владимира Иосифовича Гурмана

Аннотация. Предмет активного изучения в последние 15–20 лет — системы с неоднородной структурой широко распространены на практике. Примерами служат процессы химического производства, сложные космические операции, динамика роботов, развитие организмов и биологических популяций.

Значительная часть их исследований связана с задачами оптимизации управлений, когда методы оптимального управления для систем однородной структуры, ставшие уже классическими (принцип максимума Понтрягина, метод Беллмана), непосредственно неприменимы. Для такого класса задач оптимизации с одной стороны требуется математическая модель, учитывающая специфику объекта, а с другой — математический аппарат, позволяющий находить решение поставленной задачи. Естественно, что многие исследователи направили свои усилия на модификацию и доработку принципа максимума Понтрягина для этого класса задач, дополняя известный результат специальными условиями в моменты изменения описания системы (например, так называемые условия скачка). Другой подход использует вектор-функции Ляпунова. Ряд авторов применяет комбинированный подход, когда для описания и управления используются как непрерывные, так и дискретные или логические составляющие. Также представители ряда школ активно используют в своих исследованиях аппарат теории мер, обобщенных функций и метод разрывной замены времени.

В работе продолжено развитие альтернативного подхода, позволяющего остаться в рамках традиционных предположений теории оптимального управления. Основой для этого служат достаточные условия оптимальности В.Ф. Кротова для дискретных систем, сформулированные в терминах произвольных множеств и отображений. Эта формулировка позволяет рассматривать множества и операторы с изменяющейся структурой при переходе от одного шага к другому, а управление на каждом шаге

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-01915 А, 15-01-01923 А, 15-07-09091 А).

можно трактовать как комбинацию некоторой абстрактной переменной и некоторого непрерывного или дискретного процесса.

Рассматривается класс дискретных неоднородных систем, широко распространенных на практике (экономика, экология). Подобные системы также возникают в процессе численного решения задач оптимизации при дискретизации непрерывных управляемых систем. Для указанного класса приводится аналог достаточных условий оптимальности Кротова. Они же формулируются в форме Беллмана. Дается их конкретизация для частных случаев: линейных и линейно-квадратических по состоянию систем.

Ключевые слова: неоднородные управляемые дискретные системы, достаточные условия оптимальности, линейные и линейно-квадратические неоднородные системы.

1. Введение

С 80-х годов прошлого века ведутся систематические исследования систем управления неоднородной структуры, для которых характерны самые разнообразные названия: системы переменной структуры [5], дискретно-непрерывные системы [6], логико-динамические системы [2], [1], импульсные системы [11], гибридные системы [10]. Поскольку для подобных систем классические методы оптимального управления непосредственно неприменимы, то предложены многочисленные варианты необходимых и достаточных условий оптимальности управления, отражающие различные подходы к объекту исследования. Один из возможных подходов состоит в обобщении для них достаточных условий оптимальности Кротова [9]. В [8] сформулированы общие условия оптимальности для абстрактной динамической системы как многошаговой, операторы которой на разных шагах допускают различную интерпретацию. В [3; 6; 7] предложена и развита математическая модель дискретно-непрерывной системы (ДНС) в виде конкретизации указанной абстрактной модели [8], применимая для широкого класса задач управления неоднородными процессами, и для нее получен аналог достаточных условий Кротова для непрерывных и дискретных систем. При таком подходе строится иерархическая модель, в которой нижний уровень представляет собой описания однородных процессов на отдельных этапах, а верхний уровень связывает эти описания в единый процесс и управляет функционированием всей системы в целом. В различных задачах управления, в частности в задачах оптимизации, оба уровня рассматриваются во взаимодействии. Подчеркнем, что на нижнем уровне на каждом из этапов фигурировали непрерывные управляемые системы.

В данной работе рассматривается модель, в которой и на нижнем уровне действуют дискретные управляемые системы. Для краткости будем называть их НДС [3]. Такие системы могут рассматриваться как самостоятельные «дискретно-дискретные», примерами могут служить эколого-экономические модели при смене инновационной политики на различных этапах времени. Подобные системы возникают и в качестве вспомогательных для ДНС с учетом естественной дискретизации непрерывных подсистем в реальных вычислениях [12]. При проведении дискретизации на отдельных шагах можно задавать управляющие воздействия в разных видах (кусочно-постоянное управление, непрерывная функция времени и т.д.) с учетом специфики конкретной задачи. В итоге возникает неоднородная дискретная система [4].

Для НДС приводится аналог достаточных условий оптимальности Кротова и дается их конкретизация в форме Беллмана. В качестве приложений рассматриваются линейные и линейно-квадратические НДС.

2. Неоднородные дискретные процессы и основные конструкции

Рассмотрим подробнее важное приложение иерархического принципа, как прямой аналог динамической ДНС, — двухуровневую модель, в которой нижний уровень составляют дискретные динамические системы однородной структуры. На верхнем уровне фигурирует дискретная модель общего вида

$$\begin{aligned}&x(k+1)=f(k,x(k),u(k)),\\&k\in\mathbf{K}=\{k_I,k_I+1,...,k_F\},\quad u\in\mathbf{U}(k,x),\end{aligned}\tag{2.1}$$

где k — номер шага (этапа), x и u — соответственно переменные состояния и управления произвольной природы (возможно различной) для различных k, $\mathbf{U}(k,x)$ — заданное при каждом k и x множество.

На некотором подмножестве $\mathbf{K}'\subset\mathbf{K}$, $k_F\notin\mathbf{K}'$, $u(k)$ интерпретируется как пара $\big(u^v(k),m^d(k)\big)$, где $m^d(k)$ — процесс $(x^d(k,t),u^d(k,t))$, $t\in\mathbf{T}(\mathbf{k},\mathbf{z}(\mathbf{k})$, $m^d(k)\in\mathbf{D}^d\,(k,z(k))$, а $\mathbf{D}^d$ — множество допустимых процессов m^d, удовлетворяющих системе

$$\begin{aligned}&x^d(k,t+1)=f^d\left(k,z,t,x^d(k,t),u^d(k,t)\right),\\&t\in\mathbf{T}=\{t_I(z),t_I(z)+1,\dots t_F(z)\},\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$x^d\in\mathbf{X}^d(k,z,t),\ u^d\in\mathbf{U}^d\left(k,z,t,x^d\right),z=(k,x,u^v)\,.$$

Здесь $\mathbf{X}^d(k,z,t)$, $\mathbf{U}^d\left(k,z,t,x^d\right)$ — заданные при каждом t, z и x^d множества. Оператор правой части (2.1) сводится к следующему:

$$f\,(k,x,u)=\theta\left(z,\gamma^d(z)\right),\quad \gamma^d=\left(t_I,x^d_I,t_F,x^d_F\right)\in\mathbf{\Gamma}^d(k,z),$$

$$\mathbf{\Gamma}^d(z)=\{\gamma^d\colon t_I=\tau(k,z),t_F=\vartheta(k,z),$$

$$x_I^d = \xi(k,z), \quad x_F^d \in \mathbf{\Gamma}_F^d(k,z)\}.$$

На множестве $\mathbf{D}$ процессов

$$m = \Big(x(k), u(k), x^d(k,t), u^d(k,t)\Big),$$

удовлетворяющих (2.1), (2.2), рассматривается задача оптимального управления о минимизации концевого функционала $I = F\left(x\left(k_F\right)\right)$ при фиксированных $k_I = 0$, k_F, $x\left(k_I\right)$ и дополнительных ограничениях $x(k) \in \mathbf{X}(k)$.

Для решения этой задачи вводится множество $\mathbf{E}$ процессов m, где исключены дискретные цепочки, и обобщенный лагранжиан по аналогии с лагранжианом для ДНС [3; 7]:

$$L = G\left(x\left(k_F\right)\right) - \sum_{\mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'\backslash k_F} R(k, x(k), u(k)) +$$

$$+ \sum_{\mathbf{K}'}\Big(G^d(z) - \sum_{\mathbf{T}(z)\backslash t_F} R^d(z,t,x^d(k,t),u^d(k,t))\Big),$$

$$G\left(x\right) = F\left(x\right) + \varphi\left(k_F, x\right) - \varphi\left(k_I, x\left(k_I\right)\right),$$

$$R\left(k,x,u\right) = \varphi\left(k+1, f\left(k,x,u\right)\right) - \varphi\left(k,x\right),$$

$$G^d\left(k,z,\gamma^d\right) = -\varphi\left(k+1, \theta\left(k,z,\gamma^d\right)\right) + \varphi\left(k, x\left(k\right)\right) +$$

$$+\varphi^d\left(k,z,t_F,x_F^d\right) - \varphi^d\left(k,z,t_I,x_I^d\right),$$

$$R^d\left(k,z,t,x^d,u^d\right) = \varphi^d(k,z,t+1,f^d\left(k,z,t,x^d,u^d\right)) - \varphi^d(k,z,t,x^d),$$

$$\mu^d\left(k,z,t\right) = \sup\left\{R^d\left(k,z,t,x^d,u^d\right) : x^d \in \mathbf{X}^d(k,z,t), u^d \in \mathbf{U}^d\left(k,z,t,x^d\right)\right\},$$

$$l^d\left(k,z\right) = \inf\ \{G^d\left(k,z,\gamma^d\right) :\ (\gamma^d) \in \mathbf{\Gamma^d}(k,z), x^d \in \mathbf{X}^d(k,z,t_F)\}.$$

$$\mu\left(k\right) = \begin{cases} \sup\{R\left(k,x,u\right) : x \in \mathbf{X}(k), u \in \mathbf{U}\left(k,x\right)\}, & t \in \mathbf{K}\backslash\mathbf{K}', \\ -\inf\{l^d\left(z\right) :\ x \in \mathbf{X}\left(k\right),\ u^v \in \mathbf{U}^v\left(k,x\right)\}, & k \in \mathbf{K}', \end{cases}$$

$$l = \inf\{G\left(x\right) :\ x \in \mathbf{\Gamma} \cap \mathbf{X}\left(k_F\right)\}.$$

Здесь $\varphi\left(k,x\right)$ — произвольный функционал, $\varphi^d\left(k,z,t,x^d\right)$ — произвольное параметрическое семейство функционалов (с параметрами k, z).

Легко убедиться, что $L(m) = I(m)$ при $m \in \mathbf{D}$, т. е. при выполнении отброшенных связей $L(m)$ совпадает с $I(m)$. Действительно, при $m \in \mathbf{D}$, как видно,

$$R = \varphi\left(k+1, x(k+1)\right) - \varphi\left(k,x\right),$$

$$R^d = \varphi^d(k,z,t+1,x^d(t+1)) - \varphi^d(k,z,t,x^d),$$
$$L = F(x(k_F)) + \sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'} (\varphi(k,x) - \varphi(k,x)) +$$
$$+\sum_{\mathbf{K}'}\Big(\sum_{\mathbf{T}(k,z)}\Big(\varphi^d(k,z,t,x^d) - \varphi^d(k,z,t,x^d)\Big)\Big).$$

Отсюда непосредственно следуют теоремы, аналогичные теоремам для ДНС [3; 7].

Теорема 1. *Для любого элемента $m \in \mathbf{D}$ и любых φ, φ^d имеет место оценка*

$$I(m) - \inf_{\mathbf{D}} I \le \Delta = I(m) - l.$$

Пусть имеются два процесса $m^{\mathrm{I}} \in \mathbf{D}$ и $m^{\mathrm{II}} \in \mathbf{E}$ и функции φ и φ^d, такие что $L\left(m^{\mathrm{II}}\right) < L\left(m^{\mathrm{I}}\right) = I\left(m^{\mathrm{I}}\right)$, и $m^{\mathrm{II}} \in \mathbf{D}$.

Тогда $I(m^{\mathrm{II}}) < I(m^{\mathrm{I}})$.

Теорема 2. *Пусть имеются последовательность процессов $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$ и функционалы φ, φ^d, такие что:*

1) $R\left(k, x_s(k), u_s(k)\right) \to \mu(k)$, $k \in \mathbf{K}$;

2) $R^d\left(z_s, t, x_s^d(t), u_s^d(t)\right) - \mu^d(z_s, t) \to 0$, $k \in \mathbf{K}'$, $t \in \mathbf{T}(z_s)$;

3) $G^d\left(z_s, \gamma_s^d\right) - l^d(z_s) \to 0$, $k \in \mathbf{K}'$;

4) $G\left(x_s(t_F)\right) \to l$.

Тогда последовательность $\{m_s\}$ — минимизирующая для I на $\mathbf{D}$.

3. Достаточные условия в форме Беллмана

Один из возможных способов задания пары $(\varphi,\ \varphi^d)$ — это потребовать выполнения условия $\inf\limits_{\{m_u\}} L = 0$ тождественно при всех m_x. Здесь $m_u = (u(k),\ u^v(k),\ u^d(k,t))$, т.е. совокупность управляющих функций, принимающих значения из $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}^v$, $\mathbf{U}^d$ соответственно, $m_x = (x(k),\ x^d(k,t))$ — совокупность траекторий верхнего и нижнего уровня. Такое требование непосредственно ведет к конкретным условиям оптимальности типа Беллмана, которые также могут быть использованы для построения эффективных итераций улучшения процесса. Пусть $\mathbf{\Gamma}_F^d(z) = \mathbb{R}^{n(k)}$, $\theta\left(z, \gamma^d\right) = \theta\left(z, x_F^d\right)$. Других ограничений на переменные состояния нет.

Получается следующая рекуррентная цепочка относительно функционалов Кротова-Беллмана двух уровней φ и $\varphi^d(z)$:

$$\varphi(k,x)=\sup_{u\in\mathbf{U}(k,x)}\varphi(k+1,f(k,x(k),u)),\quad k\in\mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'\backslash k_F,$$

$$\varphi(k_F,x)=-F(x),$$

$$\varphi^d(k,t)=\sup_{u^d\in\mathbf{U^d}\left(z,t,x^d\right)}\varphi^d\left(k,t+1,f^d\left(k,t,x^d(k,t),u^d\right)\right),\tag{3.1}$$

$$\varphi^d\left(z,t_F,x_F^d\right)=\varphi\left(k+1,\theta\left(z,x_F^d\right)\right),$$

$$\varphi(k,x)=\sup_{u^v\in\mathbf{U}^v(t,x)}\varphi^d(z,\tau(z),\xi(z)),\quad k\in\mathbf{K}',$$

которая разрешается в порядке следования от k_F к k_I.

Предположим, что решение этой цепочки $\left(\varphi(k,x(k)),\ \varphi^d\left(z,t,x^d\right)\right)$ существует и, кроме того, существуют соответствующие этому решению функции $\tilde u(k,x),\ \tilde u^v(k,x),\ \tilde u^d\left(z,t,x^d\right)$, получающиеся в результате операций максимума в (3.1). Подставляя эти функции в правые части заданных дискретных соотношений, будем иметь:

$$x(k+1)=f(k,x(t),\tilde u(k,x(t))),\quad x(k_I)=x_I,\quad k\in\mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'\backslash k_F,$$

$$x(k+1)=\theta\left(k,x(k),\tilde u^v(k,x(k)),\gamma^d(\tilde z)\right),$$

$$x^d(k,t+1)=f^d\left(k,x(k),\tilde u^v(k,x(k)),t,x^d,\tilde u^d\left(\tilde z(k),t,x^d\right)\right),$$

$$t_I=\tau(\tilde z(k)),\quad x^d(t_I)=\xi(\tilde z(k)),\quad \tilde z(k)=(k,x(k),\tilde u^v(k,x(k)))$$

при $k\in\mathbf{K}'$. Тогда решение этой дискретно-дискретной цепочки

$$(x(k),\ u(k))_*,\quad k\in\mathbf{K}\backslash\mathbf{K}',$$

$$\left(x(k),\ \hat u(k),\ x^d(k,t),\ u^d(k,t)\right)_*,\quad k\in\mathbf{K}',\quad t\in\mathbf{T}(z_*(k)),$$

если оно существует, задает в целом оптимальный неоднородный дискретный процесс m_*. Заметим, что функцию $\varphi^d(z,t,x^d)$ в данном случае можно считать фактически не зависящей от x, поскольку она, как синтезирующая, «обслуживает» семейство задач для различных начальных условий.

3.1. Линейная задача

В качестве частного случая рассмотрим линейную по состоянию модель (2.1), (2.2):

$$x(k+1) = A(k)x(k) + b(k,u), \tag{3.2}$$

$$x^d(k,t+1) = A^d\,(k,z,t,)\,x^d + b^d\left(k,z,t,u^d\right), \tag{3.3}$$

$x \in \mathbb{R}^n(k),\ u \in \mathbb{R}^r(k),\ u^d \in \mathbb{R}^p(k),\ t \in \mathbf{T}\,(z)\,,\ \mathbf{T} = [t_I, t_F],\ k \in \mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'\backslash k_F.$

Здесь A, A^d — матрицы и b, b^d — векторы соответствующих размеров. Оператор правой части (2.1) при $k \in \mathbf{K}'$ сводится к следующему: $\alpha\,(k,z)\,\gamma^d + \beta\,(k,z)$, где

$$\gamma^d = \left(t_I, x_I^{d\mathrm{T}}, t_F, x_F^{d\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{\Gamma}^d(z) = \{\gamma^d \colon t_I = \tau(z),$$

$$x_I^d = \xi(z),\ t_F = \vartheta(z),\ x_F^d \in \mathbb{R}^m(k)\},$$

α и β — заданные матрица и вектор соответственно. Здесь, как и ранее, k — номер шага (этапа), не обязательно физическое время, $\mathbf{U}(k)$, $\mathbf{U}^d(k)$ — заданные множества, $\tau(z)$, $\xi(z)$, $\vartheta(z)$ — заданные функции, $z = (k, x, u^v)$ — совокупность переменных дискретной цепочки верхнего уровня, играющая на нижнем уровне роль параметров. Все зависимости от z здесь и далее считаются линейными вида

$$\Lambda(z,q) = \Lambda_0(q) + \Lambda_z(q)z,$$

где q — совокупность прочих аргументов. Для краткости они конкретно априори не выписываются.

Будем рассматривать для модели (3.2), (3.3) задачу оптимального управления в стандартной форме как задачу о минимуме на $\mathbf{D}$ функционала $I = c^{\mathrm{T}}x(k_F) + d$, где c — $n(k_F)$-вектор. Заметим, что константа d на решение не влияет, ее можно задать произвольно из формальных соображений.

В данном случае вводятся линейные по переменным состояния функции $\varphi(k,x) = \psi^{\mathrm{T}}(k)x$, $\varphi^d(z,t,x,x^d) = \psi^{d\mathrm{T}}(k,z,t)x^d + \psi^{z\mathrm{T}}(k,z,t)x$, где $\psi(k)$, $\psi^d(z,t)$ и $\psi^z(k,z,t)$ — произвольны. Как и ранее, строится лагранжиан:

$$L = G\left(x\left(k_F\right)\right) - \sum_{\mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'\backslash k_F} R(k, x(k), u(k)) +$$

$$+ \sum_{\mathbf{K}'}\Big(G^d(z(k),\gamma^d) - \sum_{\mathbf{T}(z(k))\backslash t_F} R^d(z(k), t, x^d(k,t), u^d(k,t))\Big),$$

где

$$G\,(x) = c^{\mathrm{T}}x + d + \psi^{\mathrm{T}}(k_F)x - \psi^{\mathrm{T}}(k_I)x_I, \tag{3.4}$$

$$R\,(k,x,u) = H - \psi^{\mathrm{T}}(k)x, \tag{3.5}$$

где

$$H = \psi^{\mathrm{T}}(k+1)\left(A(k)x(k) + b(k,u)\right), \quad k \in \mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'\backslash k_F,$$

$$G^d\left(z,\gamma^d\right) = -H(z,\gamma^d) + \psi^{\mathrm{T}}(k)x + \psi^{d\mathrm{T}}(z,t_F)x_F^d -$$

$$-\psi^{d\mathrm{T}}(z,t_I)\,x^d(t_I) + \psi^z(k,z,t_F)x - \psi^z(k,z,t_I)x, \tag{3.6}$$

$$t_I = \tau(z), \quad t_F = \vartheta(z), \quad x^d(t_I) = \xi(z),$$

$$H = \psi^{\mathrm{T}}(k+1)\left(\alpha(k,z)\gamma^c + \beta(k,z)\right), \quad k \in \mathbf{K}',$$

$$R^d\left(k,z,t,x^d,u^d\right) = H^d - \psi^{d\mathrm{T}}(z,t)x^d - \psi^z(k,z,t)x, \tag{3.7}$$

где $H^d(k,z,t,u^d,x^d) = \psi^{d\mathrm{T}}(z,t+1)\left(A^d(k,z,t)\,x^d + b^d\left(k,z,t,u^d\right)\right)$.

Применяя схему Беллмана к конкретным конструкциям (3.2)–(3.3), потребуем, чтобы они не зависели от x и x^d, что сводится к следующим условиям:

$$\psi(k) = A(k)^{\mathrm{T}}\psi^{\mathrm{T}}(k+1), \quad \psi(k_F) = -c, \; k \in \mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'\backslash k_F,$$

$$-H(z,\gamma^d) + \psi^{\mathrm{T}}(k)x + \psi^{d\mathrm{T}}(z,t_F)\,x_F^d -$$
$$-\psi^{d\mathrm{T}}(z,t_I)\,x^d(t_I) + \psi^z(k,z,t_F)x - \psi^z(k,z,t_I)x = \mathrm{const},$$

$$t_I = \tau(z), \quad t_F = \vartheta(z), \quad x^d(t_I) = \xi(z),$$

$$H = \psi^{\mathrm{T}}(k+1)\left(\alpha(k,z)\gamma^d + \beta(k,z)\right), \quad k \in \mathbf{K}',$$

$$H^d - \psi^{d\mathrm{T}}(z,t)x^d - \psi^z(k,z,t)x = \mathrm{const}.$$

Расшифровка этих условий приводит к задаче Коши для НДС относительно $\psi(k)$, $\psi^z(k,t)$ и $\psi^d(z,t)$ с начальными условиями на правом конце:

$$\psi(k_F) = -c, \quad \psi(k) = H_x^{\mathrm{I}}, \quad k \in \mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'\backslash k_F,$$

$$\psi(k) = H_x + \psi^z(k,z,t_I) + (H_z - \psi_z^d(k,t_F)x_F^d + \psi_z^d(k,t_I)x_I^d -$$
$$-\psi_z^z(k,z,t_F)x + \psi_z^z(k,z,t_I)x)z_x, \quad k \in \mathbf{K}',$$

$$\psi^d(k,t_F) = H_{x_F^d}, \; \psi^d(k,t) = H_{x^d}^d.$$

$$\psi^z(k,z,t_F) = 0, \; \psi^z(k,z,t) = H_x^d, \quad k \in \mathbf{K}'.$$

Полученные уравнения линейны и всегда имеют решение.

3.2. Линейно-квадратическая задача

Применим общую схему Беллмана к линейно-квадратической задаче:

$$x^0(k+1) = x^0(k) + \frac{1}{2}(a(k)|x|^2 + b(k)|u|^2), \quad a, \; b \geq 0, \quad x^0 \in \mathbb{R},$$

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u, \quad x \in \mathbb{R}^{m(k)}, \quad k \in \mathbf{K} \backslash \mathbf{K}' \backslash k_F,$$

$$\dot{x}^{d0} = \frac{1}{2}(a^d(t)|x^d|^2 + b^d(t)|u^d|^2), a^d,\ b^d \geq 0, \quad x^{d0} \in \mathbb{R},$$

$$x^d(k,t+1) = A^d(k,t)x^d(k,t) + B^d(k,t)u^d, \quad x^d \in \mathbb{R}^{n(k)},$$

$$x^d(t_I) = \xi(k)x, \quad x(k+1) = \theta(k)x^d(k,t_F), \quad k \in \mathbf{K}',$$

где через ξ, θ обозначены матрицы соответствующих размеров.

Функционал I имеет вид $I = x^0(k_F)$. Функции φ, φ^d зададим в виде

$$\varphi = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\sigma(k)x - x^0, \ \ \varphi^d = \frac{1}{2}x^{d\mathrm{T}}\sigma^d(k,t)x^d - x^{d0},$$

где $\sigma(k)$, $\sigma^d(k,t)$ — матрицы соответствующих размеров и $z = k$. Тогда

$$G = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\sigma(k_F)x,$$

$$R = -\frac{1}{2}(a(k)|x|^2 + b(k)|u|^2) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(A(k)x(k) + B(k)u\right)^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)\left(A(k)x(k) + B(k)u\right) - \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\sigma(k)x,$$

$$G^d = -\frac{1}{2}\Big(\theta(k)x^d(k,t_F)\Big))^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)\theta(k)x^d(k,t_F) + \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\sigma(k)x +$$

$$+\frac{1}{2}x^{d\mathrm{T}}(k,t_F)\sigma^d(k,t_F)x^d(k,t_F) - \frac{1}{2}(\xi(k)x)^{\mathrm{T}}\sigma^d(k,t_I)\xi(k)x,$$

$$R^d = (A^d(k,t)x^d(t) + B^d(k,t)u^d)^{\mathrm{T}}\sigma^d(k,t+1)(A^d(k,t)x^d(t) + B^d(k,t)u^d) -$$

$$-\frac{1}{2}(a^d(t)|x^d|^2 + b^d(t)|u^d|^2) - \frac{1}{2}x^{d\mathrm{T}}\sigma^d(k,t)x^d.$$

Исследуем функции R и R^d на максимум по управлению, воспользуемся необходимыми условиями экстремума: $R_u = 0$, $R^d_{u^d} = 0$. Поскольку матрицы $a(k)E$, $b(k)E$, $a^d(t)E$, $b^d(t)E$ положительно определены, то функции R и R^d выпуклые при каждом k, t соответственно и имеют единственный максимум (во всех указанных матрицах единичные матрицы имеют разные соответствующие размеры). Тогда управления, доставляющие максимум указанным конструкциям, могут быть представлены в следующем виде:

$$\tilde{u} = (b(k)E - B^{\mathrm{T}}(k)\sigma(k+1)B(k))^{-1}B(k)^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)A(k)x, \tag{3.8}$$

$$\tilde{u}^d = (b^d(k,t)E -$$

$$- B^{d\mathrm{T}}(k,t)\sigma^d(k,t+1)B^d(k,t))^{-1}B^d(k,t)^{\mathrm{T}}\sigma^d(k,t+1)A^d(k,t)x^d. \tag{3.9}$$

Подставим найденные выражения в функции R и R^d соответственно и после преобразований получим:

$$P(k,x) = R(k,x,\tilde{u}) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(\sigma(k) - a(k)E + A^{\mathrm{T}}(k)\sigma(k+1)A(k))x+$$

$$+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(k)\sigma(k{+}1)B(k)(b(k)E{-}B^{\mathrm{T}}(k)\sigma(k{+}1)B(k))^{-1}B^{\mathrm{T}}(k)\sigma(k{+}1)A(k)x,$$

$$\begin{aligned}P^d(k,x^d) = R^d(k,x^d,\tilde{u}^d) = \frac{1}{2}x^{d\mathrm{T}}(\sigma(k,t) - a^d(k,t)E + A^{d\mathrm{T}}(k,t)\times\\ \times\,\sigma^d(k,t+1)A^d(k,t))x^d + \frac{1}{2}x^{d\mathrm{T}}A^{d\mathrm{T}}(k,t)\sigma^d(k,t+1)B^d(k,t)(b^d(k,t)E-\\ - B^{d\mathrm{T}}(k,t)\sigma^d(k,t+1)B^d(k,t))^{-1}B^{d\mathrm{T}}(k,t)\sigma^d(k,t+1)A^d(k,t)x^d.\end{aligned}$$

Для определения матриц σ, σ^d потребуем независимости функций P, P^d, G, G^d от переменных состояния x и x^d. Тогда

$$\sigma(k_F) = 0, \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\sigma(k) =& a(k)E - A^{\mathrm{T}}(k)\sigma(k+1)A(k) - A^{\mathrm{T}}(k)\sigma(k+1)B(k)(b(k)E-\\ &- B^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)B(t))^{-1}B^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)A(t), \quad k \in \mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'\backslash k_F,\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\sigma(k) = \xi^{\mathrm{T}}\sigma^c(k,t_I)\xi, \qquad k \in \mathbf{K}', \tag{3.12}$$

$$\sigma^d(k,t_F) = \theta(k)^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)\theta(k), \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}\sigma^d(k,t) =& a^d(k,t)E - A^{d\mathrm{T}}(k,t)\sigma^d(k,t+1)A^d(k,t)-\\ &- A^{d\mathrm{T}}(k,t)\sigma^d(k,t+1)B^d(k,t)(b^d(k,t)E-\\ &- B^{d\mathrm{T}}(k,t)\sigma^d(k,t+1)B^d(k,t))^{-1}B^{\mathrm{T}}(k,t)\sigma^d(k,t+1)A^d(k,t).\end{aligned} \tag{3.14}$$

Нетрудно видеть, что функции φ, φ^d удовлетворяют аналогу уравнений Беллмана для НДС, если матрицы σ, σ^d являются решениями уравнений (3.10)–(3.14). В этом случае имеем: $R = 0$, $G = 0$, $R^d = 0$, $G^d = \mathrm{const}$. В свою очередь, уравнения для σ, σ^d представляют собой матричные аналоги уравнения Риккати. Если решения указанных уравнений существуют, то существует и полное решение задачи оптимального управления для линейно-квадратической НДС в форме линейного синтеза $\tilde{u}(k,x)$, $\tilde{u}^d(t,x^d)$, определяемого по формулам (3.8), (3.9). Следует заметить, что уравнения для матриц σ, σ^d взаимосвязаны между собой и, следовательно, синтезирующие управления отражают связи верхнего и нижнего уровней. Эти уравнения также представляют собой НДС с заданными начальными условиями в конечных точках.

4. Заключение

Таким образом, в работе рассмотрен еще один класс неоднородных управляемых систем: дискретные системы. Математическая модель таких систем представляет собой иерархическую двухуровневую структуру. Приведен аналог достаточных условий оптимальности Кротова, которые, кроме того, представлены в форме Беллмана. Эти условия конкретизированы для линейных и линейно-квадратических НДС. В последнем случае решение задачи оптимального управления получается в форме линейного синтеза на обоих уровнях.

Список литературы

1. Бортаковский А. С. Достаточные условия оптимальности управления детерминированными логико-динамическими системами / А. С. Бортаковский // Информатика. Сер. Автоматизация проектирования. — 1992. — №2-3. — С. 72–79.
2. Васильев С. Н. Теория и применение логико-управляемых систем. Труды. 2-я Международная конференция «Идентификация систем и задачи управления» (SICPRO'03). — Москва, 2003. – С. 23–52.
3. Расина И. В. Иерархические модели управления системами неоднородной структуры / И. В. Расина. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 160 с.
4. Фесько О. В. Оптимизация динамических систем на множестве кусочно-постоянных управлений. Наукоемкие информационные технологии: тр.молодежной науч.-практ. конф. — Переславль-Залесский, 2009. – С. 206–217.
5. Emel'yanov S. V. Theory of Systems with Variable Structures / S. V. Emel'yanov. — Moscow: Nauka, 1970. — 592 p.
6. Gurman V.I. Theory of Optimum Discrete Processes / V.I. Gurman // Automation and Remote Control. – 1973. – Vol. 34, N 7, Part 1. – P. 1082–1087.
7. Gurman V.I., Rasina I.V. Discrete-Continuous Representations of Impulsive Processes in the Controllable Systems / V.I. Gurman, I.V. Rasina // Automation and Remote Control. – 2012. – Vol. 73, N 8. – P. 1290–1300.
8. Krotov V. F. Sufficient Optimality Conditions for Discrete Controllable Systems / V. F. Krotov // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1967. – Vol. 172, N 1. – P. 18–21.
9. Krotov V.F., Gurman V.I. Methods and Problems of Optimal Control / V.F. Krotov, V.I. Gurman. — Moscow: Nauka, 1973. — 448 p.
10. Lygeros J. Lecture Notes on Hybrid Systems / J. Lygeros. — Cambridge: University of Cambridge, 2003. — 70 p.
11. Miller B.M., Rubinovich E.Ya. Optimization of the Dynamic Systems with Pulse Controls / B.M. Miller, E.Ya. Rubinovich. — Moscow: Nauka, 2005.
12. Rasina I.V. Discretization of Continuous Controllable Systems Based on Generalized Solutions / I.V. Rasina // Automation and Remote Control. – 2011. – Vol. 72, N 6. – P. 1301–1308.

Расина Ирина Викторовна, доктор физико-математических наук, Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, 152021,

г. Переславль-Залесский, ул. Петра Первого, д. 4а
(e-mail: irinarasina@gmail.com)

I. V. Rasina

Discrete Nonuniform Systems and Sufficient Conditions of Optimality

Abstract. Nonuniform systems are the object of a deep investigation last 15–20 years. They are exemplified by the chemical processes, complicated operations in space, robot dynamics, development of organisms and biological populations.

A significant part in the studies of nonuniform systems is related to control optimization problems, when optimal control methods for uniform systems that have already become classical (the Pontryagin's maximum principle, Bellman scheme) cannot be directly applied. On one hand, for this class of optimization problems it is required a mathematical model that takes into account the object's properties, on the other hand, the mathematical apparatus that lets one find solution of the problem. Obviously, there were many researchers who aimed their efforts at modification and refinement of the Pontryagin's maximum principle for this class of problems adding special conditions at the moments of changing description of the system (for example, so called jump conditions). Another approach is related to the Lyapunov vector-function. Some authors use hybrid technique when continuous and discrete components are used for description and control. Besides, some schools actively use in their research the measure theory, generalized functions, and discontinuity time change method.

In this work, we propose an alternative approach under traditional assumptions of the optimal control theory. It is based on sufficient optimality conditions of V.F. Krotov for discrete systems set down in terms of arbitrary sets and maps. The proposed specification let us consider sets and maps with variable structure from one step to another, at each stage the control is treated as a combination of some abstract variable and some continuous or discrete process.

We consider a class of discrete nonuniform systems which are widespread in practice (economics, ecology). Such systems also arise in process of numerical solution of optimization problems obtained after discretization of continuous controllable systems. For this class a counterpart of Krotov's sufficient conditions is proposed. They are formulated in the Bellman-type form as well. Their specification for linear and liear-quadratic systems w.r.t. state is given.

Keywords: nonuniform controllable discrete systems, sufficient conditions of optimality, linear and linear-quadratic nonuniform systems

References

1. Bortakovskij A.S. Sufficient Conditions of Control Optimality for Determined Logical Dynamic Systems [Dostatochnye uslovija optimal'nosti upravlenija determinirovannymi logiko-dinamicheskimi sistemami]. *Informatika. Ser. Avtomatizacija proektirovanija*, 1992, no 2-3, pp. 72-79.
2. Vasil'ev S.N. Theory and Application for Logical Controllable Systems [Teorija i primenenie logiko-upravljaemyh sistem]. *Trudy. 2-ja Mezhdunarodnaja konferencija «Identifikacija sistem i zadachi upravlenija» (SICPRO'03).* Moscow, 2003, pp. 23-52.

3. Rasina I.V. *Ierarhicheskie modeli upravlenija sistemami neodnorodnoj struktury* [Hierarchical Control Models for Systems with Nonuniform Structure]. Moscow, FIZMATLIT, 2014. 160 p.
4. Fesko O.V. Optimization of Dynamic Systems with Piecewise Constant Control [Optimizacija dinamicheskih sistem na mnozhestve kusochno-postojannyh upravlenij]. *Naukoemkie informacionnye tehnologii: tr.molodezhnoj nauch.-prakt. konf.* Pereslavl'-Zalesskij, 2009, pp. 206-217.
5. Emel'yanov S.V. *Theory of Systems with Variable Structures.* Moscow, Nauka, 1970. 592 p.
6. Gurman V.I. Theory of Optimum Discrete Processes. *Automation and Remote Control*, 1973, vol. 34, no 7, part 1, pp. 1082–1087.
7. Gurman V.I., Rasina I.V. Discrete-Continuous Representations of Impulsive Processes in the Controllable Systems. *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, no 8, pp. 1290–1300. https://doi.org/10.1134/S0005117912080024
8. Krotov V. F. Sufficient Optimality Conditions for Discrete Controllable Systems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1967, vol. 172, no 1, pp. 18–21.
9. Krotov V.F., Gurman V.I. *Methods and Problems of Optimal Control.* Moscow, Nauka, 1973. 448 p.
10. Lygeros J. *Lecture Notes on Hybrid Systems.* Cambridge, University of Cambridge, 2003. 70 p.
11. Miller B.M., Rubinovich E.Ya. *Optimizatsiya dinamicheskikh sistem s impul'snymi upravleniyami* [Optimization of the Dynamic Systems with Pulse Controls]. Moscow, Nauka, 2005.
12. Rasina I.V. Discretization of Continuous Controllable Systems Based on Generalized Solutions. *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, no 6, pp. 1301–1308. https://doi.org/10.1134/S000511791106018X

Rasina Irina Viktorovna, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Ailamazyan Program Systems Institute RAS, 4a, Peter I st., Pereslavl-Zalessky, 152021 (e-mail: irinarasina@gmail.com)