Серия «Математика»
2016. Т. 18. С. 93—109

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.946
MSC 35K05

Исследование совместности переопределенной системы для многомерного уравнения нелинейной теплопроводности (частный случай)*

Г. А. Рудых
Иркутский государственный университет

Э. И. Семенов
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН

Аннотация. В статье исследуется многомерное уравнение нелинейной теплопроводности. Это уравнение представлено в виде переопределенной системы дифференциальных уравнений с частными производными (число уравнений больше числа искомых функций). Как известно, переопределенная система дифференциальных уравнений может быть несовместной, у нее может не существовать ни одного решения. Поэтому для установления факта существования решений и степени их произвола проводится анализ данной переопределенной системы дифференциальных уравнений. В итоге проведенного исследования получены не только достаточные, но и необходимые и достаточные условия совместности переопределенной системы дифференциальных уравнений с частными производными. На основе этих результатов с использованием уравнения Лиувилля и теоремы о необходимом и достаточном условии потенциальности векторного поля излагается подход, позволяющий в ряде случаев конструктивно построить точные неотрицательные решения многомерного уравнения нелинейной теплопроводности с конечной скоростью распространения возмущений. Среди построенных точных решений имеются и такие, которые не являются инвариантными с точки зрения групп точечных преобразований и групп Ли-Беклунда. Особое внимание уделено уравнению со степенным коэффициентом нелинейной теплопроводности. Это уравнение является квазилинейным параболическим уравнением с неявным вырождением. Данное уравнение из параболического дифференциального уравнения второго порядка вырождается в нелинейное эволюционное уравнение первого порядка типа Гамильтона – Якоби.

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-08-06680) и Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-8081.2016.9).

Ключевые слова: многомерное уравнение нелинейной теплопроводности, конечная скорость распространения возмущений, точные неотрицательные решения.

1. Введение

В работе на основе уравнения Лиувилля [27; 30] и теоремы о потенциальных операторах [3; 26] излагается подход, позволяющий конструктивно построить новые точные неотрицательные решения многомерного уравнения нелинейной теплопроводности с конечной скоростью распространения возмущений [10; 5; 19]. При этом некоторые построенные решения не являются инвариантными с точки зрения групп точечных преобразований и групп Ли-Беклунда [14; 7].

2. Многомерное уравнение нелинейной теплопроводности с конечной скоростью распространения возмущений

Рассмотрим многомерное уравнение нелинейной теплопроводности

$$u_t = \nabla \cdot (K(u)\nabla u)\,, \;\; u = u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \bar{\mathbb{R}}^+ \to \mathbb{R}^+, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область; $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$; $\bar{\mathbb{R}}^+ = [0, +\infty)$; $u(\mathbf{x}, t) \geq 0$ — функция характеризующая температуру среды; $K(u)$ — функция определенная при всех $u \in \bar{\mathbb{R}}^+$; $K(u) > 0$ при $u > 0$; $K(0) \geq 0$; $K(u) \in C^2\left(\mathbb{R}^+\right) \bigcap C\left(\bar{\mathbb{R}}^+\right)$ — коэффициент нелинейной теплопроводности. Уравнение (2.1) возникает во многих прикладных задачах и принадлежит к классу так называемых неявно вырождающихся параболических уравнений. Строгая математическая теория этих уравнений берет свое начало в сравнительно недавних работах [1; 10; 24; 25; 28; 31]. Всюду в этой работе относительно функции $K(u)$ будем предполагать, что

$$\int\limits_0^1 \frac{K(\xi)}{\xi}\, d\xi < +\infty. \tag{2.2}$$

Известно [15; 8; 9], что сходимость интеграла (2.2) является необходимым и достаточным условием конечной скорости распространения возмущений в процессах, описываемых уравнением (2.1). Далее, пусть

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

$$u_0(\mathbf{x}) \equiv 0, \;\; |\mathbf{x}| = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2} > r \in \mathbb{R}^+, \tag{2.3}$$

т.е. $u_0(\mathbf{x})$ равна нулю вне замкнутого шара $S(r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \leq r < +\infty\}$ и является финитной [4] функцией с носителем $\operatorname{supp} u_0(\mathbf{x}) =$

$\overline{\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : u_0(\mathbf{x}) \neq 0\}}$. С другой стороны, так как исходя из специфики уравнения (2.1) мы рассматриваем лишь неотрицательные решения, то

$$\operatorname{supp} u_0(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : u_0(\mathbf{x}) > 0\}.$$

Причем для финитности функции $u_0(\mathbf{x})$ необходимо и достаточно, чтобы множество $\operatorname{supp} u_0(\mathbf{x})$ было ограниченным. Иначе $mes \operatorname{supp} u_0(\mathbf{x}) < +\infty$, что в силу формулы (2.2) обеспечивает финитность по $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ решения $u(\mathbf{x}, t)$ задачи Коши (2.1), (2.3). Тем самым [13], в задаче Коши (2.1), (2.3) скорость распространения возмущений является конечной, если в любой момент времени $t \in [0, T]$ существует замкнутый шар $S(r(t)) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \leq r(t) < +\infty\}$ и для всех $t \in [0, T]$ выполняется включение $\operatorname{supp} u_0(\mathbf{x}, t) \subset S(r(t))$. Кроме того сходимость интеграла (2.2) является [19] необходимым и достаточным условием финитности по $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ решения $u(\mathbf{x}, t)$ задачи Коши (2.1), (2.3). Итак, если $K(u) \in C^2\left(\mathbb{R}^+\right) \bigcap C\left(\bar{\mathbb{R}}^+\right)$ и выполняется неравенство (2.2), то уравнение (2.1) помимо процессов нестационарной фильтрации описывает диффузию и распространение тепла в сплошной среде с большими температурными перепадами [10]. В частности, хорошо известным свойством уравнений типа нестационарной фильтрации является конечная скорость изменения носителей их решений. Первые общие результаты в этом направлении были получены в работах [15; 8; 9].

Теперь представим исследуемое уравнение (2.1) в виде следующей эквивалентной системы

$$u_t + \nabla \cdot (u\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) = 0, \tag{2.4}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \frac{K(u)}{u} \nabla u. \tag{2.5}$$

Система уравнений (2.4), (2.5) является переопределенной (число уравнений превосходит число искомых функций, подлежащих определению) относительно $u(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n$ — достаточно гладкая по $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ вектор-функция. Ниже будем предполагать, что $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in C^1\left(G \to \mathbb{R}^n\right)$, где $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — открытое множество; $G = \Omega \times I$; $I = \{t : 0 \leq t_0 < +\infty\}$; Ω — проекция G в $\mathbb{R}^n$.

Ясно, что у переопределенной системы уравнений (2.4), (2.5) может вообще не существовать решений. Поэтому для установления факта существования решений и степени их произвола необходимо провести исследование и анализ совместности переопределенной системы (2.4), (2.5). Отметим, что методы исследования совместности переопределенных систем дифференциальных уравнений с частными производными изложены в работах [23; 16; 20; 22]. С другой стороны, уравнение нелинейной теплопроводности (2.1) и линейное многомерное уравнение Лиувилля (2.4) можно рассматривать как систему с дифференциальной связью (2.5). Причем метод дифференциальных связей [16; 20; 22] существенно использует теорию совместности систем дифференциальных уравнений. Наконец, в работах [11; 12] рассматривалось приложение этого метода для уравнения (2.1) со степенным коэффициентом теплопроводности.

Соотношение (2.4) при заданной $\mathbf{f}(\mathbf{x},t) \in C^1\left(G \to \mathbb{R}^n\right)$ является уравнением Лиувилля [27; 30] относительно температуры $u(\mathbf{x},t)$ для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},t), \ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ \ \dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}\,\mathbf{x}(t).$$

В силу формулы (2.2) имеет смысл функция

$$\Phi(u) = \int\limits_0^u \frac{K(\xi)}{\xi}\, d\xi, \ \ u \geq 0, \ \ \Phi(0) = 0. \tag{2.6}$$

При этом в силу монотонности $\Phi(u)$ существует обратная функция $\Phi^{-1}(\eta)$, причем $0 \leq \eta < \Phi(\infty) \leq +\infty$.

Ниже при определенных предположениях относительно вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x},t) \in C^1\left(G \to \mathbb{R}^n\right)$ и с использованием теоремы о необходимых и достаточных условиях потенциальности векторного поля вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x},t) \in \mathbb{R}^n$ будет доказано, что скалярная функция $u(\mathbf{x},t)$, определяемая из соотношения (2.5) и удовлетворяющая уравнению Лиувилля (2.4) является точным неотрицательным решением многомерного уравнения нелинейной теплопроводности (2.1).

3. Основные результаты

Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x},t) = -A(t)\mathbf{x} - \mathbf{B}(t)$, где $A(t) = [a_{ij}(t)]$ — вещественная симметричная $n \times n$ матрица; $\mathbf{B}(t) = (b_1(t), \ldots, b_n(t))'$ — вектор-столбец; $a_{ij}(t), b_i(t) \in C^1\left(\bar{\mathbb{R}}^+\right)$; $i,j = 1,2,\ldots,n$. Тогда переопределенная система уравнений (2.4), (2.5) примет следующий вид

$$u_t = u \cdot \mathrm{tr} A(t) + \left(\nabla u, A(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\right), \tag{3.1}$$

$$K(u)\nabla u = (A(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)) \cdot u, \tag{3.2}$$

где $\mathrm{tr} A(t) = \sum\limits_{i=1}^n a_{ii}(t)$ — след матрицы $A(t)$; $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Поскольку матрица $A(t)$ является симметричной, т.е. $a_{ij}(t) = a_{ji}(t)$, тогда по теореме о потенциальных операторах [3; 26] уравнение (3.2) в силу (2.2), (2.6) обладает решением

$$u(\mathbf{x},t) = \Phi^{-1}\Bigl([z(\mathbf{x},t)]_+\Bigr), \tag{3.3}$$

$$z(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}, A(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}(t)) + C(t), \tag{3.4}$$

где $[\cdot]_+ = \max\{[\cdot], 0\}$; $\Phi^{-1}(z)$ — функция обратная к $\Phi(u)$, существующая в силу монотонности последней. Матрица $A(t)$, вектор-столбец $\mathbf{B}(t)$ и скалярная функция $C(t)$ подлежат определению, причем $a_{ij}(t), b_i(t) \in C^1\left(\bar{\mathbb{R}}^+\right)$. Отметим, что при $n = 1$ аналогичный случай рассматривался в работах [29; 17; 18].

Особую практическую значимость имеет уравнение (2.1) с коэффициентом нелинейной теплопроводности $K(u)$ степенного вида. Поэтому в данной статье ограничимся важным частным случаем $\Phi^{-1}(z) = (\lambda[z(\mathbf{x},t)]_+)^{1/\lambda}$, т.е. $K(u) = u^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. В этом случае имеет место следующий результат.

Утверждение 1. *Пусть выполнены соотношения* (2.2), (2.6) *и матрица $A(t)$ с элементами $a_{ij}(t) \in C^1\left(\bar{\mathbb{R}}^+\right)$, вектор-столбец $\mathbf{B}(t)$ с компонентами $b_i(t) \in C^1\left(\bar{\mathbb{R}}^+\right)$, скалярная функция $C(t) \in C^1\left(\bar{\mathbb{R}}^+\right)$ удовлетворяют следующей системе ОДУ:*

$$\begin{gathered}\dot{A}(t) = 2A^2(t) + \lambda A(t)\,\mathrm{tr}A(t),\\ \dot{\mathbf{B}}(t) = 2A(t)\mathbf{B}(t) + \lambda\mathbf{B}(t)\,\mathrm{tr}A(t),\\ \dot{C}(t) = |\mathbf{B}(t)|^2 + \lambda C(t)\,\mathrm{tr}A(t).\end{gathered} \tag{3.5}$$

Тогда функция

$$u(\mathbf{x},t) = \left(\lambda\left[\frac{1}{2}\Big(\mathbf{x}, A(t)x\Big) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}(t)) + C(t)\right]_+\right)^{\frac{1}{\lambda}}, \tag{3.6}$$

является точным неотрицательным решением уравнения пористой среды (нестационарной фильтрации)

$$u_t = \nabla\cdot\left(u^\lambda\nabla u\right). \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) является квазилинейным параболическим уравнением с неявным вырождением [10; 1], т. е. уравнение (3.7) параболично при $u(\mathbf{x},t) \neq 0$ и вырождается при $u(\mathbf{x},t) = 0$. Последнее означает, что при $u(\mathbf{x},t) = 0$ это уравнение из параболического дифференциального уравнения второго порядка вырождается в нелинейное эволюционное уравнение первого порядка типа Гамильтона – Якоби. С вырождением уравнения (3.7) связаны некоторые особые свойства его решений, например конечность скорости распространения носителей решений [10]. В свою очередь, с конечностью скорости распространения носителей решений уравнения (3.7) связаны многие другие типичные свойства [1; 10]: наличие режимов с обострением (отсутствие глобальных по времени решений), эффекты локализации, инерции (конечной или бесконечной временной задержки) начала распространения носителя решения.

Приступим к исследованию системы ОДУ (3.5). Предположим, что при $t = 0$ заданы: вещественная симметричная матрица $A(0) \in M_n(\mathbb{R})$, вектор-столбец $\mathbf{B}(0) \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ и скаляр $C(0) \in \mathbb{R}$, т.е.

$$A(t)\Big|_{t=0} = A(0), \;\; \mathbf{B}(t)\Big|_{t=0} = \mathbf{B}(0), \;\; C(t)\Big|_{t=0} = C(0), \tag{3.8}$$

где $M_n(\mathbb{R})$ — множество $n \times n$ матриц с элементами из $\mathbb{R}$; $M_{n,k}(\mathbb{R})$ — множество $n \times k$ матриц с элементами из $\mathbb{R}$ [21]. Известно [6; 2], что всякая вещественная симметричная матрица $A(0)$ может быть приведена к диагональной форме с помощью некоторого ортогонального преобразования. Иначе, существует вещественная ортогональная матрица $S \in M_n(\mathbb{R})$ такая, что

$$A(0) = SD(0)S^{'}, \;\; D(0) = \operatorname{diag}\left[d_1(0), \ldots, d_n(0)\right],$$

где $d_k(0) \in \mathbb{R}$ — собственные значения матрицы $A(0)$; $k = 1, 2, \ldots, n$; $SS' = S^{'}S = I$; I — единичная матрица. Покажем, что если функции $A(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $C(t)$ определены при $t = 0$, то решение задачи Коши для системы ОДУ (3.5) с начальными условиями (3.8) сводится к решению задачи Коши для некоторого скалярного нелинейного ОДУ первого порядка. Итак, покажем справедливость следующего результата.

Теорема 1. *Пусть заданы вещественная симметричная матрица $A(0) \in M_n(\mathbb{R})$, вектор-столбец $\mathbf{B}(0) \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, скаляр $C(0) \in \mathbb{R}$ и вещественная ортогональная матрица $S \in M_n(\mathbb{R})$. Пусть кроме того, $z(t)$ — вещественное решение задачи Коши*

$$\dot{z}(t) = \prod_{k=1}^{n} \left[1 - 2d_k(0)z(t)\right]^{-\frac{\lambda}{2}}, \;\; z(0) = 0, \;\; \dot{z}(t) = \frac{d}{dt}z(t), \;\; \lambda \in \mathbb{R}^+. \tag{3.9}$$

Тогда функции $A(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $C(t)$ определяемые формулами

$$A(t) = \dot{z}(t)SQ(t)D(0)S^{'} = \dot{z}(t)SQ(t)D(0)S^{'}A(0), \tag{3.10}$$

$$\mathbf{B}(t) = \dot{z}(t)SQ(t)D(0)S^{'}\mathbf{B}(0), \tag{3.11}$$

$$\begin{gathered} C(t) = \dot{z}(t)C(0) + z(t)\left(\mathbf{B}(0), \mathbf{B}(t)\right) = \\ \dot{z}(t)\left[C(0) + z(t)\left(Q(t)S^{'}\mathbf{B}(0), \dot{z}(t)S^{'}\mathbf{B}(0)\right)\right], \end{gathered} \tag{3.12}$$

являются решением задачи Коши (3.5), (3.8). *Кроме того $A(t)$ — вещественная симметричная матрица для всех $t \in \operatorname{domain}A(t)$, где*

$$Q(t) = \operatorname{diag}\left[\left[1 - 2d_1(0)z(t)\right]^{-1}, \ldots, \left[1 - 2d_n(0)z(t)\right]^{-1}\right], \tag{3.13}$$

$d_k(0) \in \mathbb{R}$, $d_k(0) \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Прежде всего введем обозначение $h(t) = \mathrm{tr}A(t)$. Тогда задача Коши (3.5), (3.8) запишется в виде

$$\dot{A}(t) = 2A^2(t) + \lambda h(t)A(t), \quad A(t)\Big|_{t=0} = A(0), \tag{3.14}$$

$$\dot{\mathbf{B}}(t) = 2A(t)\mathbf{B}(t) + \lambda h(t)\mathbf{B}(t), \quad \mathbf{B}(t)\Big|_{t=0} = \mathbf{B}(0), \tag{3.15}$$

$$\dot{C}(t) = |\mathbf{B}(t)|^2 + \lambda h(t)C(t), \quad C(t)\Big|_{t=0} = C(0). \tag{3.16}$$

Решение задачи Коши (3.14) будем отыскивать в виде

$$A(t) = SD(t)S^{'}, \tag{3.17}$$

$$D(t) = \mathrm{diag}\left[d_1(t), \ldots, d_n(t)\right], \tag{3.18}$$

где $D(0) \neq 0$, $d_k \in C^1\left(\bar{\mathbb{R}}^+\right)$ — вещественные собственные значения матрицы $A(t)$. Подставляя (3.17) в уравнение (3.14) и умножая последнее слева на $S^{'}$, а справа на S, приходим к задаче Коши

$$\dot{D}(t) = 2D^2(t) + \lambda h(t)D(t), \quad D(t)\Big|_{t=0} = D(0). \tag{3.19}$$

Исходя из матричного уравнения (3.19) с помощью несложных выкладок, нетрудно проверить справедливость следующих соотношений

$$\prod_{k=1}^{n} d_k(t) = \prod_{k=1}^{n} d_0 \exp\left[(\lambda n + 2)\int\limits_0^t h(\tau)\,d\tau\right], \tag{3.20}$$

$$\dot{h}(t) = \lambda h^2(t) + 2\sum_{k=1}^{n} d_k^2(t), \quad \dot{h}(t) = \frac{d}{dt}\,h(t), \tag{3.21}$$

$$d_k(t) = \left(\frac{1}{d_k(0)} - 2\int\limits_0^t \exp\left[\lambda\int\limits_0^\xi h(\tau)\,d\tau\right]d\xi\right)^{-1} \exp\left[\lambda\int\limits_0^t h(\tau)\,d\tau\right], \tag{3.22}$$

где $h(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k$; $d_k(0) \neq 0$; $k = 1, 2, \ldots, n$. Далее, для упрощения записи формулы (3.22), введем в рассмотрение функцию

$$z(t) = \int\limits_0^t \exp\left[\lambda\int\limits_0^\xi h(\tau)\,d\tau\right]d\xi, \quad z(0) = 0. \tag{3.23}$$

Из формулы (3.23) вытекает равенство

$$\dot{z}(t) = \exp\left[\lambda \int\limits_0^t h(\tau)\, d\tau\right], \quad \dot{z}(0) = 1. \tag{3.24}$$

Выражение (3.22) с учетом соотношений (3.23), (3.24) упрощается и принимает вид

$$d_k(t) = \frac{d_k(0)\dot{z}(t)}{1 - 2d_k(0)z(t)}\,, \tag{3.25}$$

причем

$$\prod_{k=1}^{n} d_k(t) = \frac{\left[\dot{z}(t)\right]^n \prod\limits_{k=1}^{n} d_k(0)}{\prod\limits_{k=1}^{n} \left[1 - 2d_k(0)z(t)\right]}\,.$$

Помимо этого, из формул (3.20), (3.24) следует, что

$$\prod_{k=1}^{n} d_k(t) = \left[\dot{z}(t)\right]^{\frac{\lambda n+2}{\lambda}} \prod_{k=1}^{n} d_k(0)\,.$$

Очевидно, что два последних соотношения приводят к справедливости задачи Коши (3.9) и квадратуры

$$\int \prod_{k=1}^{n} \left[1 - 2d_k(0)z(t)\right]^{\frac{\lambda}{2}} dz = t + T, \tag{3.26}$$

где $T \in \mathbb{R}$ определяется из начального условия $z(0) = 0$. Итак, в силу (3.25) заключаем, что вещественные собственные значения $d_k(t)$ матрицы $A(t)$ запишутся в виде

$$d_k(t) = \frac{d_k(0)}{1 - 2d_k(0)z(t)} \prod_{l=1}^{n} \left[1 - 2d_l(0)z(t)\right]^{-\frac{\lambda}{2}}, \tag{3.27}$$

где $z(t)$ — вещественное решение задачи Коши (3.9). Таким образом, с одной стороны, формула (3.24) приводит к зависимости

$$h(t) = \frac{1}{\lambda}\, \frac{\ddot{z}(t)}{\dot{z}(t)}. \tag{3.28}$$

С другой стороны, из соотношений (3.9), (3.27) получим, что

$$h(t) = \dot{z}(t) \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k(0)}{1 - 2d_k(0)z(t)}. \tag{3.29}$$

Итак, согласно (3.28), (3.29) заключаем, что функция $z(t)$ помимо (3.9) удовлетворяет задаче Коши

$$\ddot{z}(t) = \lambda \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{d_k(0)}{1 - 2d_k(0)z(t)} \right] \dot{z}^2(t), \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 1. \tag{3.30}$$

Очевидно также (см. (3.25)), что имеет место формула

$$D(t) = \dot{z}(t)Q(t)D(0), \tag{3.31}$$

где $Q(t)$ — матрица вида (3.13). Далее, так как $A(0) = SD(0)S'$, то $D(0) = S'A(0)S$ и легко устанавливается, что соотношения (3.17), (3.31) приводят к справедливости цепочки равенств (3.10).

Теперь перейдем к построению решения задачи Коши (3.15) при условии, что матрица $A(t)$ определяется согласно (3.10). Итак, подставляя (3.10) в уравнение (3.15), умножая последнее слева на S' и вводя в рассмотрение вектор-столбец $\mathbf{X}(t) = S'\mathbf{B}(t)$, приходим к задаче Коши

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = [2D(t) + \lambda h(t)I]\,\mathbf{X}(t), \quad \mathbf{X}(0) = S'\mathbf{B}(0), \tag{3.32}$$

причем

$$\mathbf{B}(t) = S\mathbf{X}(t), \quad \mathbf{X}(t) = \mathrm{colon}\big(X_1(t), \ldots, X_n(t)\big). \tag{3.33}$$

В силу того что диагональная матрица $D(t)$ и скалярная функция $h(t)$ нами определены через решение задачи Коши (3.9) (см. (3.31), (3.28), (3.29)), то из (3.32) имеем

$$\dot{X}_k(t) = \big[2d_k(t) + \lambda h(t)\big] X_k(t), \quad X_k(0) = \gamma_k,$$

где $\gamma_k \in \mathbb{R}$; $k = 1, 2, \ldots, n$. В итоге приходим к зависимости

$$X_k(t) = \gamma_k \exp\left[2\int_0^t d_k(\tau)\,d\tau\right] \exp\left[\lambda \int_0^t h(\tau)\,d\tau\right]. \tag{3.34}$$

Нетрудно убедиться, что соотношение (3.34) с учетом формул (3.24), (3.25) упрощается

$$X_k(t) = \frac{\gamma_k}{d_k(0)}\, d_k(t) = \frac{\gamma_k}{1 - 2d_k(0)z(t)} \dot{z}(t). \tag{3.35}$$

Итак, используя формулы (3.13), (3.31), а также зависимости $\gamma = \mathbf{X}(0)$, $\mathbf{X}(0) = S'\mathbf{B}(0)$ из (3.35) получим, что

$$\mathbf{X}(t) = D^{-1}(0)D(t)\mathbf{X}(0) = \dot{z}(t)Q(t)\mathbf{X}(0) = \dot{z}(t)Q(t)S'\mathbf{B}(0).$$

Тем самым выражение (3.33) приводит к справедливости цепочки равенств

$$\mathbf{B}(t) = SD^{-1}(0)D(t)\mathbf{X}(0) = SD^{-1}(0)D(t)S'\mathbf{B}(0) = \dot{z}(t)SQ(t)\mathbf{B}(0).$$

Наконец, принимая во внимание (3.28) и учитывая, что вектор-столбец $\mathbf{B}(t)$ нами определен (см. (3.11)), найдем решение задачи Коши (3.16). Несложно проверить, что решение задачи Коши (3.16) имеет вид

$$C(t) = \left[C(0) + \int\limits_0^t \frac{|\mathbf{B}(\tau)|^2}{\dot z(\tau)}\,d\tau\right]\dot z(t), \tag{3.36}$$

где $|\mathbf{B}(\tau)|^2 = \Big(\mathbf{B}(0), SD^{-2}(0)D^2(\tau)S'\mathbf{B}(0)\Big)$; $\dot z(\tau) \neq 0$. Отсюда получаем

$$\int\limits_0^t \frac{|\mathbf{B}(\tau)|^2}{\dot z(\tau)}\,d\tau = \left(\mathbf{B}(0), SD^{-2}(0)\left[\int\limits_0^t \frac{D^2(\tau)}{\dot z(\tau)}\,d\tau\right]S'\mathbf{B}(0)\right).$$

Далее нетрудно убедиться, что для любого $k = 1, 2, \ldots, n$ выполняется соотношение

$$\int\limits_0^t \frac{d_k^2(\tau)}{\dot z(\tau)}\,d\tau = d_k(0)d_k(t)\frac{z(t)}{\dot z(t)}\,.$$

Тем самым, имеет место представление

$$\int\limits_0^t \frac{|\mathbf{B}(\tau)|^2}{\dot z(\tau)}\,d\tau = \left(\mathbf{B}(0), \mathbf{B}(t)\frac{z(t)}{\dot z(t)}\right).$$

Окончательно, из (3.36) следует справедливость формулы (3.12). Легко видеть, что найденные функции (3.10)–(3.12) удовлетворяют начальным условиям (3.8), а следовательно и задаче Коши (3.14)–(3.16).

Итак, для завершения доказательства осталось показать симметричность матрицы $A(t)$ (см. (3.10)) для всех t из области её определения, т. е. для всех $t \in \operatorname{domain} A(t)$. С этой целью введем в рассмотрение матрицу $G(t) = SQ(t)S'$, где $Q(t)$ — диагональная матрица, определяемая посредством (3.13). Ясно, что $G(t)$ — невырожденная симметричная матрица. Тогда $A(t) = \dot z(t)G(t)A(0)$, где $A(0)$ — вещественная симметричная матрица. В первую очередь, убедимся, что матрицы $A(0)$ и $G(t)$ коммутируют. Поскольку выполняется цепочка равенств

$$A(0)G^{-1}(t) = A(0)\left[SQ(t)S'\right]^{-1} = A(0)SQ^{-1}(t)S' =$$

$$A(0)S\left[I - 2z(t)D(0)\right]S' = A(0)\left[SS' - 2z(t)SD(0)S'\right] =$$

$$A(0)\left[I - 2z(t)A(0)\right] = A(0) - 2z(t)A^2(0) =$$

$$\left[I - 2z(t)A(0)\right]A(0) = G^{-1}A(0),$$

то справедливо соотношение $G(t)A(0) = A(0)G(t)$, т. е. матрицы $A(0)$, $G(t)$ коммутируют. Кроме того, имеем

$$[G(t)A(0)]' = A'(0)G'(t) = A(0)G(t).$$

Отсюда следует, что $G(t)A(0)$ — симметричная матрица. Поэтому таковой является и матрица $A(t)$. Наконец заметим, что формулами (3.10)–(3.12) определяются все решения задачи Коши (3.14)–(3.16) с вещественной симметричной матрицей $A(0) \in M_n(\mathbb{R})$. Теорема доказана. $\square$

Суммируя результаты этого раздела заключаем, что имеет место

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (2.2)–(2.6). *Пусть вещественная симметричная матрица* $A(t)$, *вектор-столбец* $\mathbf{B}(t)$ *и скалярная функция* $C(t)$ *определяются соответственно формулами* (3.10)–(3.12). *Тогда уравнение пористой среды (нестационарной фильтрации)* (3.7) *обладает точным неотрицательным решением* (3.6).

Пример 1. Пусть вещественная симметричная $A(t)$ является диагональной, т. е. $A(t) = \operatorname{diag}[a_1(t), \ldots, a_n(t)]$. В этом случае система ОДУ (3.5) принимает вид

$$\dot{a}_i(t) = \left[2a_i(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\right] a_i(t), \quad \dot{b}_i(t) = \left[2a_i(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\right] b_i(t),$$

$$\dot{c}(t) = \lambda c(t) \sum_{k=1}^{n} a_k(t) + \sum_{k=1}^{n} b_k^2(t), \tag{3.37}$$

причем $a_i(t)$, $b_i(t)$, $c(t) \in C^1\left(\bar{\mathbb{R}}^+\right)$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, где $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Функции $a_i(t)$ будем отыскивать в следующем виде $a_i(t) = \dfrac{1}{s_i(t)} \left[\prod_{j=1}^{n} s_j(t)\right]^{-\frac{\lambda}{2}}$.

Тогда первые n уравнений системы ОДУ (3.37) запишутся

$$\dot{s}_i(t) = -2\left[\prod_{j=1}^{n} s_j(t)\right]^{-\frac{\lambda}{2}}. \tag{3.38}$$

Следовательно, справедлива цепочка равенств $\dot{s}_1(t) = \dot{s}_2(t) = \ldots = \dot{s}_n(t)$ и для $j = 1, 2, \ldots, n-1$ имеют место соотношения

$$s_j(t) = c_j + s_n(t), \quad c_j \in \mathbb{R}. \tag{3.39}$$

В итоге, система ОДУ (3.38) с учетом (3.39) сводится к квадратурам

$$\int \left[s_n \prod_{j=1}^{n-1} (s_n + c_j)\right]^{\frac{\lambda}{2}} ds_n = T - 2t, \quad T \in \mathbb{R}. \tag{3.40}$$

Если все $c_j = 0$, то из (3.39), (3.40) имеем $s_j(t) = \Big[T-(\lambda n+2)t\Big]_+^{\frac{2}{\lambda n+2}}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Таким образом, в этом частном, уравнение (3.7) обладает решением

$$u(\mathbf{x},t) = \left[\frac{|\mathbf{x}+\mathbf{b}|^2}{2\,[T-(\lambda n+2)t]} + c\Big[T-(\lambda n+2)t\Big]_+^{-\frac{\lambda n}{\lambda n+2}}\right]_+^{\frac{1}{\lambda}},$$

где $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ — произвольный постоянный вектор; $c \in \mathbb{R}$.

Теперь рассмотрим случай, когда $c_j \neq 0$ и квадратура (3.40) при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ интегрируется в явном виде. Пусть $\lambda = 2$, $n = 2$. Тогда из формул (3.39), (3.40) получим

$$s_1(t) = r(t) + \frac{c_1}{2},\ \ s_2(t) = r(t) - \frac{c_1}{2},\ \ c_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

где

$$r(t) = \frac{1}{2}\big[\theta(t)\big]^{\frac{1}{3}} + \frac{c_1^2}{2}\big[\theta(t)\big]^{-\frac{1}{3}},$$

$$\theta(t) = 12(T-2t) - c_1^3 + 2\Big[36(T-2t)^2 - 6(T-2t)c_1^3\Big]_+^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда следует, что уравнение нелинейной теплопроводности

$$u_t = \nabla\cdot\Big(u^2\nabla u\Big)\,,\ \ u = u(\mathbf{x},t) : \Omega\times\bar{\mathbb{R}}^+ \to \mathbb{R}^+,\ \ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2,$$

имеет точное неотрицательное решение вида

$$u\,(x_1,x_2,t) = \Bigg[\frac{x_1^2}{\Big(r(t)+\frac{c_1}{2}\Big)\Big(r^2(t)-\frac{c_1^2}{4}\Big)} + \frac{x_2^2}{\Big(r(t)-\frac{c_1}{2}\Big)\Big(r^2(t)-\frac{c_1^2}{4}\Big)} +$$

$$2c_2\exp b_1(t) + 2c_3\exp b_2(t) + 2\xi(t)\Bigg]_+^{\frac{1}{2}},$$

где $b_1(t) = 6\varphi(t) - c_1\psi(t)$, $b_2(t) = 6\varphi(t) + c_1\psi(t)$,

$$\varphi(t) = \int\frac{r(t)\,dt}{\Big(r^2(t)-\frac{c_1^2}{4}\Big)^2},\ \ \psi(t) = \int\frac{dt}{\Big(r^2(t)-\frac{c_1^2}{4}\Big)^2},$$

$$\xi(t) = \left[c_2^2\int v(t)\,dt + c_3^2\int w(t)\,dt + c_4\right]\exp\big[4\varphi(t)\big],$$

$$v(t) = \exp\big[8\varphi(t) - 2c_1\psi(t)\big],\ \ w(t) = \exp\big[8\varphi(t) + 2c_1\psi(t)\big],$$
$$c_l \in \mathbb{R},\ l = 1,2,3,4.$$

Отметим, что при определенных предположениях полученные решения могут уходить на бесконечность за конечное время, т. е. имеет место так называемый режим с обострением [5; 19].

Список литературы

1. Антонцев С. Н. Локализация решений вырождающихся уравнений механики сплошной среды / С. Н. Антонцев. – Новосибирск : Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986. – 108 с.
2. Беллман Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М. : Наука, 1976.
3. Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов / М. М. Вайнберг. – М. : Гостехтеориздат, 1956.
4. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1971.
5. Квазилинейное уравнение теплопроводности: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотика, структуры / В. А. Галактионов, В. А. Дородницын, Г. Г. Еленин, С. П. Курдюмов, А. А. Самарский // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Итоги науки и техники. – М. : ВИНИТИ АН СССР, 1987. – Т. 28. – С. 95–205.
6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1966.
7. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике / Н. Х. Ибрагимов. – М. : Наука, 1983.
8. Калашников А. С. О возникновении особенностей у решений уравнения нестационарной фильтрации / А. С. Калашников // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1967. – Т. 7, № 2. – С. 440–443.
9. Калашников А. С. Об уравнениях типа нестационарной фильтрации с бесконечной скоростью распространения возмущений / А. С. Калашников // Вестн. МГУ. Сер. мат. механики. – 1972. – № 6. – С. 45–49.
10. Калашников А. С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка / А. С. Калашников // Успехи мат. наук. – 1987. – Т. 42, № 2. – С. 135–176.
11. Капцов О. В. Линейные определяющие уравнения для дифференциальных связей / О. В. Капцов // Мат. сб. – 1998. – Т. 189, № 12. – С. 103–118.
12. Капцов О. В. Методы интегрирования уравнений с частными производными / О. В. Капцов. – М. : Физматлит, 2009. – 184 с.
13. Мартинсон Л. К. Исследование математической модели переноса нелинейной теплопроводности в средах с объемным поглощением / Л. К. Мартинсон // Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. – М. : Наука, 1986. – С. 279–309.
14. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. – М. : Наука, 1978.
15. Олейник О. А. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации / О. А. Олейник, А. С. Калашников, Чжоу-Юй-Линь // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1958. – Т. 22, № 5. – С. 667–704.
16. Рождественский Б. Л. Системы квазилинейных уравнений / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. – М. : Наука, 1978.
17. Рудых Г. А. Об одном подходе построения частных точных решений квазилинейного уравнения теплопроводности с N -пространственными переменными / Г. А. Рудых, Э. И. Семенов // Препринт № 6 ИрВЦ СО АН СССР. Иркутск. — 1991. — 21 с.

18. Рудых Г. А. Построение точных решений многомерного квазилинейного уравнения теплопроводности / Г. А. Рудых, Э. И. Семенов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1993. – Т. 33, № 8. – С. 1228–1239.
19. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. – М. : Наука, 1987. – 480 с.
20. Сидоров А. Ф. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике / А. Ф. Сидоров, В. П. Шапеев, Н. Н. Яненко. — Новосибирск: Наука. — 1984.
21. Хорн Р. Матричный анализ /Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М. : Мир, 1989.
22. Шапеев В. П. Метод дифференциальных связей и его приложение к уравнениям механики сплошной среды : дис. ... д-ра физ.-мат. наук / В. П. Шапеев. – Новосибирск, 1987.
23. Яненко Н. Н. Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных / Н. Н. Яненко // Тр. IV Всесоюз. мат. съезда. Т. 2. – Л. : Наука, 1964. – С. 613–621.
24. Aronson D. G. The porous medium equation / D.G. Aronson // Some problems in nonlinear diffusion: Lecture Notes in Math. – Springer Verlag, 1986. – N 1224.
25. Aronson D. G. Regularity of flows in porous medium: a survey / D. G. Aronson // Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States. – N. Y. : Springer, 1988. – Vol. 1, N 1. – P. 35–49.
26. Berger M. S. Perspectives in nonlinearity / M. S. Berger. – N.-Y. ; Amsterdam, 1968.
27. Kaplan W. Some methods for analysis of the flow in phase space. Proc. of the symposium on nonlinear circuit analysis / W. Kaplan. – N. Y., 1953. – P. 99–106.
28. Meirmanov A. M. Evolution Equations and Lagrangian Coordinates / A. M. Meirmanov, V. V. Pukhnachov, S. I. Shmarev. – Walter de Gruyter. Berlin, N. Y., 1997.
29. Rudykh G. A. Application of Liouville's equation to construction of special exact solutions for the quasilinear heat equation / G. A. Rudykh, E. I. Semenov // IMACS Ann. Comput. and Appl. Math. – 1990. – Vol. 8. – P. 193–196.
30. Steeb W. H. Generalized Liouville equation, entropy and dynamic systems containing limit cycles / W. H. Steeb // Physica A. – 1979. – Vol. 95, N 1. – P. 181–190.
31. Vazquez J.L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford Mathematical Monographs. Clarendon Press, Oxford, 2007.

Рудых Геннадий Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)242214, (e-mail: `rudykhga@gmail.com`)

Семенов Эдуард Иванович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952) 453099, (e-mail: `edwseiz@gmail.com`)

G. A. Rudykh, E. I. Semenov

Research of Compatibility of the Redefined System for the Multidimensional Nonlinear Heat Equation (Special Case)

Известия Иркутского государственного университета.
2016. Т. 18. Серия «Математика». С. 93–109

Abstract. In paper the multidimensional equation of nonlinear heat conductivity is investigated. This equation is presented in the form of the overdetermined system of the differential equations with partial derivatives (the number of the equations are more than number of required functions). It is known that the overdetermined system of the differential equations can be not compatible, at it can not exist any solution. Therefore, for establishment of the fact of existence of solutions and degree of their arbitrariness the analysis of this overdetermined system of the differential equations is carried out. As a result of the conducted research not only sufficient, but also necessary and sufficient conditions of compatibility of the overdetermined system of the differential equations with partial derivatives are received. On the basis of these results with use of the equation of Liouville and the theorem of a necessary and sufficient condition of potentiality of the vector field the approach allowing to construct in some cases exact non-negative solutions of the multidimensional equation of nonlinear heat conductivity with a final velocity of propagation of perturbations is stated. Among the constructed exact decisions are available also such which are not invariant from the point of view of groups of pointed transformations and Lie-Bäcklund's groups. The special attention is paid to the equation with degree-like coefficient of nonlinear heat conductivity. This equation is the quasilinear parabolic equation with implicit degeneration. This equation from the parabolic differential equation of the second order degenerates in the nonlinear evolutionary equation of the first order like Hamilton-Jacobi.

Keywords: multidimensional nonlinear heat equation, finite velocity of propagation of perturbation, exact nonnegative solutions.

References

1. Antontsev S.N. Localization of solutions of degenerate equations of continuum mechanics (in Russian). Novosibirsk, Institut gidrodinamiki SO AN SSSR, 1986. 108 p.
2. Bellman R. Introduction to the theory of matrices (in Russian). Moscow, Nauka, 1976.
3. Vajnberg M.M. Variational methods for the study of nonlinear operators (in Russian). Moscow, Gostekhizdat, 1956.
4. Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics (in Russian). Moscow, Nauka, 1971.
5. Galaktionov V.A., Dorodnicyn V.A., Elenin G.G., Kurdyumov S.P., Samarskij A.A. The quasilinear heat equation: peaking, localization, symmetry, exact solutions, asymptotic behavior, structures (in Russian). *Sovrem. probl. matem. Novejshie dostizheniya. Itogi nauki i tekhniki*, Moscow, VINITI AN SSSR, 1987, vol. 28, pp. 95-205.
6. Gantmaher F.R. The theory of matrices (in Russian). Moscow, Nauka, 1966.
7. Ibragimov N.H. Groups of transformations in mathematical physics (in Russian). Moscow, Nauka, 1983.
8. Kalashnikov A.S. On the occurrence of singularities in the solutions of the equation unsteady filtration (in Russian). *Zhurn. vychis. matem. i matem. fiziki*, 1967, vol. 7, no 2, pp. 440-443.
9. Kalashnikov A.S. On the equations of unsteady filtration type with infinite perturbation propagation velocity (in Russian). *Vestn. MGU. Ser. mat. mekh.*, 1972, no 6, pp. 45-49.

10. Kalashnikov A.S. Some questions in the qualitative theory of nonlinear degenerate parabolic equations of second order (in Russian). *UMN*, 1987, vol. 42, no 2, pp. 135-176.
11. Kaptsov O.V. Linear determining equations for differential constraints (in Russian). *Matem. sbornik*, 1998, vol. 189, no 12, pp. 103-118.
12. Kaptsov O.V. Methods of integration of partial differential equations (in Russian). Moscow, Fizmatlit, 2009. 184 p.
13. Martinson L.K. A study of mathematical model of the non-linear transfer thermal conductivity with volume absorption media (in Russian). *Matematicheskoe modelirovanie. Processy v nelinejnyh sredah*, Moscow, Nauka, 1986, pp. 279-309.
14. Ovsyannikov L.V. Group analysis of differential equations (in Russian). Moscow, Nauka, 1978.
15. Olejnik O.A., Kalashnikov A.S., Chzhou-Yuj-Lin' Cauchy problem and boundary value problems for equations of unsteady filtration (in Russian). *Izv. AN SSSR. Ser. mat*, 1958, vol. 22, no 5, pp. 667-704.
16. Rozhdestvenskij B.L., YAnenko N.N. Systems of quasilinear equations (in Russian). Moscow, Nauka, 1978.
17. Rudykh G.A., Semenov E.I. An approach of constructing exact solutions of partial quasilinear heat equation with N — spatial variables (in Russian). Preprint № 6 IrVC SO AN SSSR. Irkutsk, 1991. 21 p.
18. Rudykh G.A., Semenov E.I. Construction of exact solutions of the multidimensional quasilinear heat equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1993, vol. 33, no 8, pp. 1087-1097.
19. Samarskij A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mihajlov A.P. Modes with peaking in problems for quasi-linear parabolic equations (in Russian). Moscow, Nauka, 1987. 480 p.
20. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N. The method of differential constraints and its applications in gas dynamics (in Russian). Novosibirsk: Nauka, 1984.
21. Horn R., Dzhonson CH. Matrix analysis (in Russian). Moscow, Mir, 1989.
22. Shapeev V.P. The method of differential constraints and its application to the equations Continuum Mechanics (in Russian). Diss. dokt. fiz.-mat. nauk. Novosibirsk, 1987.
23. Yanenko N.N. The theory of compatibility and integration methods of nonlinear systems PDEs (in Russian). *Trudy IV Vsesoyuznogo matematicheskogo s"ezda.* Leningrad, Nauka, 1964, vol. 2, pp. 613-621.
24. Aronson D.G. The porous medium equation. Some problems in nonlinear diffusion. *Lecture Notes in Math.* Springer Verlag, 1986, no 1224.
25. Aronson D.G. Regularity of flows in porous medium: a survey Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States. New York, Springer, 1988, vol. 1, no 1, pp. 35-49.
26. Berger M.S. Perspectives in nonlinearity. New York, Amsterdam, 1968.
27. Kaplan W. Some methods for analysis of the flow in phase space. *Proc. of the symposium on nonlinear circuit analysis*, New York, 1953, pp. 99-106.
28. Meirmanov A.M., Pukhnachov V.V., Shmarev S.I. Evolution Equations and Lagrangian Coordinates. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1997.
29. Rudykh G.A., Semenov E.I. Application of Liouville's equation to construction of special exact solutions for the quasilinear heat equation. *IMACS Ann. Comput. and Appl. Math*, 1990, vol. 8, pp. 193-196.
30. Steeb W.H. Generalized Liouville equation, entropy and dynamic systems containing limit cycles. *Physica A*, 1979, vol. 95, no 1, pp. 181-190.
31. Vazquez J.L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford Mathematical Monographs. Clarendon Press, Oxford, 2007.

Известия Иркутского государственного университета.
2016. Т. 18. Серия «Математика». С. 93–109

Rudykh Gennadii Alekseevich, Professor, Institute of Mathematics, Economics and Information Science, Irkutsk State University, 1, K. Marx, Irkutsk, 664003, tel.: (3952)242214, (e-mail: rudykhga@gmail.com)

Semenov Edward Ivanovich, Senior Scientist; Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Post Box 292, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, tel.: (3952) 453099 (e-mail: edwseiz@gmail.com)