Серия «Математика»
2016. Т. 18. С. 48—59

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 51-77, 330.45
MSC 91B26, 91B55

Существование решения задачи управления рекламными расходами с распределенным запаздыванием

И. В. Лутошкин, Н. Р. Ямалтдинова
Ульяновский государственный университет

Аннотация. Анализируется динамическая непрерывная относительно времени модель оптимального управления рекламными расходами. Модель учитывает эффект запаздывания реакции потребителей на рекламные воздействия и ранее совершенные покупки. В отличие от классических динамических оптимизационных моделей (Нерлова – Эрроу, Видала –Вульфа и т. д.), анализирующих рекламные воздействия, здесь рассматривается модель, учитывающая накопленный за определенный промежуток времени эффект рекламы и накопленный (возможно за другой промежуток времени) эффект от объема предыдущих продаж. Оптимизационная проблема сводится к системе нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра и интегрального функционала качества. Доказывается теорема о существовании решения частного случая нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерра, порожденного естественными ограничениями рассматриваемой проблемы. Формулируется теорема о существовании решения задачи максимизации прибыли фирмы на плановом периоде при ограничении на рекламный бюджет и функциональной зависимости, отражающей реакцию целевой аудитории. Проводится обсуждение свойств функциональной зависимости текущего спроса от накопленной репутации фирмы и накопленного эффекта рекламы. Обсуждается проблема практического применения рассматриваемой модели.

Ключевые слова: математические модели рекламы, управление рекламными расходами, распределенная отдача от рекламы, эффект рекламного воздействия, накопленная репутация фирмы, существование решения, интегральные уравнения Вольтерра.

1. Введение

Определение оптимального распределения рекламных расходов на плановом периоде при ограниченном рекламном бюджете — одна из главных задач, которую фирма должна решить при разработке рекламной стратегии. При этом помимо определения целевой аудитории, оформления самого рекламного сообщения и проведения других творческих мероприятий, разработка данной стратегии предполагает анализ данных прошлых периодов, определение характера влияния рекламных затрат и других нерекламных факторов на финансовый результат (прибыль или убыток) фирмы для разработки качественной математической модели, с помощью которой в дальнейшем могут быть рассчитаны оптимальные рекламные расходы на плановый период.

Производственная деятельность фирмы ведет к значительным расходам, связанным с выпуском продукции. Рекламные расходы, с точки зрения бухгалтерского учета, являются издержками и должны входить в затраты фирмы, однако с экономической точки зрения реклама стимулирует спрос, тем самым увеличивает выручку. Поэтому есть смысл выделить данные расходы как не участвующие в процессе выпуска товара, но влияющие на его объем продаж.

Необходимо отметить, что длительность ожидания отклика на воздействия рекламы различных видов продуктов может отличаться, однако, эффект рекламного воздействия редко имеет мгновенный характер. Как правило, между выходом рекламного сообщения и реакцией на него потребителя образуется лаг запаздывания.

Прямое воздействие на уровень продаж оказывают такие качественные характеристики как качество товара и репутация фирмы. В совокупности они образуют эффект воздействия от предыдущих продаж на текущий уровень продаж, способствуя тому, что спустя некоторое время потребитель возвращается к покупкам или отказывается от них. Следовательно, изменение величины текущей выручки происходит под влиянием накопленного воздействия предыдущих рекламных затрат и накопленного воздействия предыдущих продаж.

При этом логично предположить, что с течением времени влияние первого рекламного сообщения, уступает место влиянию недавно вышедших рекламных сообщений. Аналогичным образом действуют и предыдущие продажи, так как опыт первых покупок так же забывается со временем. Поэтому имеет смысл рассматривать фиксированный интервал для лагов наиболее существенного влияния рекламного воздействия и (или) предыдущих продаж на текущую выручку.

Обычно рекламный бюджет фирмы ограничен некоторым значением — суммой рекламных затрат, которую фирма может позволить себе на проведение рекламной кампании. Таким образом, проблема наилучшего распределения рекламных расходов может быть рассмотрена как задача оптимального управления на планируемом периоде с ограничением, определяющим характер воздействия рекламных и нерекламных факторов на величину текущих продаж, предельным значением рекламного бюджета и целевой функцией, представляющей совокупную прибыль, которую необходимо максимизировать.

Выделяя подходы, основанные на математическом моделировании, можно отметить: вероятностные модели, учитывающие охват, частоту показа [5]; регрессионные эконометрические модели [1]; динамические дискретные и непрерывные модели [9], [2]. Однако существующие непрерывные модели управления рекламными расходами предполагают учет только мгновенной реакции от воздействия. В настоящей работе предлагается дальнейший анализ динамической непрерывной модели управления рекламными расходами с распределенным запаздыванием как по рекламному воздействию, так и по эффекту воздействия от предыдущих продаж, рассмотренной в [7]. Практическое применение частного случая данной модели рассматривалось в [8]. Здесь предлагается обоснование существования решения в общем случае.

2. Постановка проблемы

Рассмотрим модель, представленную в [7], [8]. Обозначим через $x(t)$ выручку (выпуск) фирмы, которая является денежным выражением величины спроса на рекламируемый товар, и $u(t)$ величину рекламных затрат в момент времени t. Очевидно, что выручка $x(t)$ определяется множеством факторов на рынке, учет которых является очень сложной задачей. В дальнейшем будем предполагать, что объем спроса ограничен только возможностями фирмы, экономическая ситуация стабильна, воздействия конкурентов принципиально не меняются на временном промежутке планирования, выполняется условие локального равновесия: спрос равен предложению (выпуску).

Таким образом, можно предположить, что текущая выручка фирмы определяется только двумя факторами: накопленное рекламное воздействие $v(t)$ к моменту t и репутация фирмы $y(t)$ в момент t,, которые можно связать соотношениями:

$$v(t) = \int_{\tau_{0u}}^{\tau_{1u}} G_u(\tau)u(t-\tau)d\tau; \tag{2.1}$$

$$y(t) = \int_{\tau_{0x}}^{\tau_{1x}} G_x(\tau)x(t-\tau)d\tau; \tag{2.2}$$

$$x(t) = f(y(t), v(t)). \tag{2.3}$$

Здесь $[\tau_{0u};\tau_{1u}]$ — временной интервал, на протяжении которого накапливается рекламное воздействие, $[\tau_{0x};\tau_{1x}]$ — временной интервал, на котором накапливается воздействие от предыдущих продаж (накопленная репутация фирмы), $G_u(\tau)$, $G_x(\tau)$ — функции, определяющие характер воздействия предыдущих рекламных затрат и предыдущих продаж соответственно. В общем случае величины τ_{0u}, τ_{1u}, τ_{0x}, τ_{1x} являются функциями времени t, при этом $0 \le \tau_{0u} < \tau_{1u}$, $0 \le \tau_{0x} < \tau_{1x}$.

Определение вида функций $f(y, v)$, $G_u(\tau)$, $G_x(\tau)$ — проблема эконометрического анализа, учитывающая общую ситуацию на рынке, вид производимой продукции или представляемых услуг фирмой, относительную ограниченность спроса, наличие конкуренции и т. д. Отметим некоторые общие предположения относительно характера функций $G_u(\tau)$, $G_x(\tau)$.

Исходя из эконометрического анализа зависимости текущих продаж от накопленных рекламных воздействий и накопленной репутации фирмы [5; 7; 8] можно сделать предположение относительно вида функций G_u : в ретроспективе реклама вызывает увеличение спроса до какого-то определенного момента времени τ_u^*, после чего воздействие рекламы начинает ослабевать, пока вовсе не исчезнет. Таким образом, функция G_u неотрицательна, имеет единственный локальный (он же глобальный) максимум, который в виде выручки определяет наибольшую отдачу от рекламных затрат. Если при этом функция дифференцируема, то предположения эквивалентны группе условий:

$$G_u(\tau) \geq 0 \forall \tau \in [\tau_{0u}; \tau_{1u}];$$

$$G'_u(\tau) \geq 0, \tau \in [\tau_{0u}; \tau_u^*); G'_u(\tau) \leq 0, \tau \in (\tau_u^*; \tau_{1u}].$$

Аналогичным образом можно рассмотреть влияние предыдущих продаж на текущие продажи, приняв следующие условия относительно функции G_x : потребитель, приобретая товар (воспользовавшись услугой) в данной фирме, может пожелать снова приобрести товар этой фирмы; опыт первых покупок со временем забывается, уступая место недавнему опыту.

Таким образом, функция G_x будет удовлетворять следующим условиями:

$$G_x(\tau) \geq 0 \forall \tau \in [\tau_{0x}; \tau_{1x}];$$

$$G'_x(\tau) \geq 0, \tau \in [\tau_{0x}; \tau_x^*); G'_x(\tau) \leq 0, \tau \in (\tau_x^*; \tau_{1x}].$$

При этом нельзя исключать, что момент максимальной отдачи в ретроспективе может быть равен нулю, что означает монотонное убывание отдачи от эффекта предыдущих продаж.

Функция $f(y, v)$ предполагается монотонно возрастающей по своим переменным. Предположение о монотонном росте является справедливым, когда переменные v и y имеют относительно небольшое значение, т. е. фирма не насытила рынок своей продукцией (услугами), реклама воспринимается потребителями позитивно. Однако по мере роста рекламных воздействий на потребителей реакция может переходить из позитивной в негативную [5], [7], [8] в этом случае функция $f(y, v)$ становится невозрастающей (иногда убывающей) по переменной v. Относительно характера зависимости по переменной y можно высказать предположение об убывающем приросте, что связано с насыщением рынка, с производственными ограничениями. Последнее позволяет потребовать свойство вогнутости функции $f(y, v)$ по переменной y.

Финансовым результатом хозяйственной деятельности любой фирмы является прибыль. В каждый момент времени t бухгалтерская прибыль π определяется стандартным условием $\pi(x(t), u(t)) = x(t) - c(x(t), t)$, где с — затраты, связанные с получением выручки x, в момент t. Функция $c(x, t)$ — включает в себя постоянные издержки, в общем случае определяемые временным трендом, и переменные издержки, связанные с выпуском продукции (предоставлением услуг).

Таким образом, функционал $\Pi(x(\cdot), u(\cdot))$, представляющий собой суммарную прибыль на временном интервале планирования $[0, T]$, определяется:

$$\Pi(T) = \int_0^T \pi(x(t), u(t))dt = \int_0^T \left(f(y(t), v(t)) - u(t) - c_1(x(t), t)\right) dt.$$

Здесь $c_1(x, t)$ включает в себя постоянные издержки и издержки, связанные с выпуском x без учета рекламных издержек.

Оценка функции $c_1(x, t)$ может происходить как эконометрически, так и на основе некоторых предположений о характере деятельности анализируемой фирмы.

В частности, переменные издержки можно рассматривать прямо пропорционально выпуску с постоянным коэффициентом. В этом случае функционал прибыли будет представлен в виде

$$\Pi(T) = \int_0^T \left((1 - \mu) f\left(y(t), v(t)\right) - u(t)\right) dt, \tag{2.4}$$

где μ — норма издержек на единицу выпуска ($0 < \mu < 1$).

Вторым вариантом может быть случай, когда переменные издержки незначительно изменяются, т. е. издержки $c_1(x, t)$ являются практически постоянными, тогда

$$\Pi(T) = \int_0^T \pi(x(t), u(t))dt = \int_0^T \left(f(y(t), v(t)) - u(t)\right) dt - c_2,$$

где c_2 – константа.

Фирмы по-разному подходят к определению рекламного бюджета [1], однако затраты на рекламу, если планируются расходы на определенный временной промежуток, практически всегда имеют пороговое значение. Можно выделить наиболее типичный вариант ограничений фирмы по распределению рекламного бюджета — инвестиции в рекламу не превышают фиксированной величины:

$$0 \le u(t) \le b,\ t \in [0; T]. \tag{2.5}$$

Основная задача фирмы — максимизация прибыли. Предположим, что при $t \le 0$ известна функция дохода $\hat{x}(t)$ и функция рекламных издержек $\hat{u}(t)$, которые принадлежат классу непрерывных или кусочно-непрерывных функций, последнее вполне естественно для рекламы $\hat{u}(t)$. Тогда можно сформулировать следующую оптимизационную динамическую задачу: максимизировать функционал (2.4) при ограничениях на рекламный бюджет (2.5) и интегральном уравнении (2.3) с условиями (2.1), (2.2).

Сведем проблему (2.1)-(2.5) к задаче оптимального управления с интегральными уравнениями в виде системы уравнений типа Вольтерра. Для этого определим функции $\phi_u(t)$, $\phi_x(t)$:

$$\phi_u(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{t-\tau_{1u}}^{t-\tau_{0u}} G_u(t-s)\hat{u}(s)ds, & 0 \le t \le \tau_{0u}, \\ \displaystyle\int_{t-\tau_{1u}}^{0} G_u(t-s)\hat{u}(s)ds, & \tau_{0u} \le t \le \tau_{1u}, \\ 0, & \tau_{1u} \le t; \end{cases}$$

$$\phi_x(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{t-\tau_{1x}}^{t-\tau_{0x}} G_x(t-s)\hat{x}(s)ds, & 0 \le t \le \tau_{0x}, \\ \displaystyle\int_{t-\tau_{1x}}^{0} G_x(t-s)\hat{x}(s)ds, & \tau_{0x} \le t \le \tau_{1x}, \\ 0, & \tau_{1x} \le t; \end{cases}$$

а также функции $\bar{G}_x(t-s)$, $\bar{G}_u(t-s)$:

$$\bar{G}_x(t-s) = \begin{cases} G_x(t-s), & \tau_{0x} \le t \le \tau_{1x}, & 0 \le s \le t-\tau_{0x}, \\ G_x(t-s), & \tau_{1x} \le t, & t-\tau_{0x} \le s \le t, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases}$$

$$\bar{G}_u(t-s) = \begin{cases} G_u(t-s), & \tau_{0u} \le t \le \tau_{1u}, & 0 \le s \le t-\tau_{0u}, \\ G_u(t-s), & \tau_{1u} \le t, & t-\tau_{0u} \le s \le t, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

На основе введенных функций накопленную репутацию фирмы, накопленное рекламное воздействие, прибыль можно представить в виде:

$$y(t) = \phi_x(t) + \int_0^t \bar{G}_x(t-s)f(y(s),v(s))ds, \tag{2.6}$$

$$v(t) = \phi_u(t) + \int_0^t \bar{G}_u(t-s)u(s)ds, \tag{2.7}$$

$$\Pi(t) = \int_0^t ((1-\mu)f(y(s),v(s)) - u(s))ds. \tag{2.8}$$

Задача максимизации $\Pi(T)$ при условиях (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) эквивалентна задаче максимизации (2.4) при условиях (2.5), (2.3), (2.1), (2.2) и представляет собой задачу оптимального управления с интегральными уравнениями Вольтерра.

3. Существование решения

Отметим некоторые ограничения, порожденные рассматриваемой проблемой.

Можно предполагать, что функция рекламных вложений $u(t)$ на отрезке $[t_0, T]$ является кусочно-непрерывной справа. Предположение, что функции $G_u(\tau)$, $G_x(\tau)$ непрерывны в областях $[\tau_{0u}; \tau_{1u}]$, $[\tau_{0x}; \tau_{1x}]$ соответственно, следует из требований, выдвигаемых исследователем к свойству этих функций.

Рассмотрим вопрос существования решения уравнений (2.6), (2.7), (2.8).

Если $G_u(\tau)$ непрерывна, то $\bar{G}_u(\tau)$ кусочно непрерывна, следовательно, $v(t)$ непрерывна на отрезке $[t_0; T]$. Из (2.5), (2.7) следует, что существует $b_1 > 0$:

$$0 \leq \phi_u(t) + \int_0^t \bar{G}_u(t-s)u(s)ds \leq \max_{0 \leq t \leq \tau_{1u}} \left(\phi_u(t) + \int_0^t \bar{G}_u(t-s)bds \right) \leq b_1.$$

Таким образом, накопленный рекламный эффект $v(t) : 0 \leq v(t) \leq b_1$ для любой рекламной стратегии, удовлетворяющей (2.5).

Вопрос существования решения уравнения (2.6) разрешается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть функции* $G_u(t) \in C([\tau_{0u}; \tau_{1u}])$, $G_x(t) \in C([\tau_{0x}; \tau_{1x}])$, $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ *кусочно-непрерывны при* $t \leq 0$, *функция* $f(y, v)$ *непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной* y *для всех* y, *тогда для любой кусочно-непрерывной функции* $u(t)$, *определенной на* $[0; T]$ *и удовлетворяющей* (2.5), *существует непрерывная единственная на* $[0; T]$ *функция* $y(t)$, *удовлетворяющая* (2.6).

Доказательство. В [3] приведена схема доказательства существования решения линейного интегрального уравнения Вольтерра, здесь будем опираться на эту схему для обоснования решения интегрального уравнения (2.6). По условию функция $f(y, v)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y, т. е. существует константа L, для которой выполняется неравенство $|f(y_1, v) - f(y_2, v)| \leq L|y_1 - y_2|$ $\forall y_1, y_2$. Введем оператор A :

$$Ay(t) \equiv \phi_x(t) + \int_0^t \bar{G}_x(t-s)f(y(s), v(s))ds.$$

Очевидно, существует конечное число $M = \max\limits_{\tau_{0x} \leq \tau \leq \tau_{1x}} G_x(\tau)$. В силу построения $\bar{G}_x$ существует $\max\limits_{\tau_{0x} \leq \tau \leq \tau_{1x}} \bar{G}_x(\tau)$, который совпадает с M. С учетом введенных предположений для любых непрерывных функций $y_1(t)$, $y_2(t)$ верно следующее неравенство:

$$|Ay_1(t) - Ay_2(t)| = \left| \int_0^t \bar{G}_x(t-s)(f(y_1(s), v(s)) - f(y_2(s), v(s)))ds \right| \leq \\ \leq MLt \max_{0 \leq s \leq T} |y_1(s) - y_2(s)|.$$

Обозначим через A^k k-кратное последовательное применение оператора A, т. е. $A^2 y \equiv A(Ay)$, $A^k y \equiv A(A^{k-1}y)$. В этом случае

$$\left|A^2 y_1(t) - A^2 y_2(t)\right| = \left| \int_0^t \bar{G}_x(t-s)(f(Ay_1(s), v(s)) - f(Ay_2(s), v(s)))ds \right| \\ \leq ML \int_0^t |Ay_1(s) - Ay_2(s)|\, ds \leq \frac{(MLt)^2}{2} \max_{0 \leq s \leq T} |y_1(s) - y_2(s)|.$$

Аналогично показывается:

$$\left|A^k y_1(t) - A^k y_2(t)\right| = \frac{(MLt)^k}{k!} \max_{0 \leq s \leq T} |y_1(s) - y_2(s)|.$$

Используя метрику в пространстве непрерывных функций

$$\rho(y_1, y_2) = \max_{0 \leq s \leq T} |y_1(s) - y_2(s)|,$$

можно получить соотношение

$$\rho\left(A^k y_1, A^k y_2\right) \leq \frac{(MLt)^k}{k!} \rho(y_1, y_2).$$

Очевидно, существует $k : \dfrac{(MLt)^k}{k!} < 1$, это означает, что оператор A^k является сжимающим, следовательно, решение $y(t)$ уравнения (2.6) существует и единственно ([3], с. 72), при этом $y(t)$ будет непрерывно на отрезке $[0; T]$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 1 дает условия существования глобального решения уравнения (2.6).

Замечание 1. Если функция $f(y, v)$ неотрицательна, вогнута и монотонно не убывает по переменной y, существует и конечна частная производная f'_y при $y = 0$, тогда функция $f(y, v)$ удовлетворяет условию Липшица по y для любого y. В этом случае существует неотрицательное решение уравнения (2.6) на $[0; T]$.

Перейдем к вопросу существования решения оптимизационной проблемы: максимизации $\Pi(T)$ при условиях (2.5), (2.6), (2.7), (2.8).

Конечное значение накопленной прибыли $\Pi(T)$ является функционалом от управления $u(\cdot)$. Введем $J(u(\cdot)) \equiv \Pi(T)$. Можно сформулировать теорему существования решения оптимизационной динамической проблемы.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения теоремы 1, $f(y,v)$ монотонно не убывает по v, тогда имеет место одна из альтернатив:*

1. Существует допустимое управление $\{u^*(t), 0 \le t \le T\}$: (2.5) и соответствующие данному управлению решения уравнений (2.6), (2.7), (2.8) $\{y^*(t), v^*(t), \Pi^*(t), 0 \le t \le T\}$: $J(u^*(\cdot)) \ge J(u(\cdot))$ для любого $u(\cdot)$: (2.5).

2. Существует последовательность допустимых управляющих функций $\{u^s(t), 0 \le t \le T\}$, удовлетворяющих (2.5), и число $\bar{J} : J(u^s(\cdot)) \to \bar{J}$ при $s \to \infty$, $J(u(\cdot)) \le \bar{J}$ для любого $u(\cdot)$: (2.5).

Доказательство. Проведем оценку решения уравнения (2.6)

$$y(t) = \phi_x(t) + \int_0^t \bar{G}_x(t-s) f(y(s), v(s)) ds \le$$
$$\phi_x(t) + \int_0^t \bar{G}_x(t-s) f(y(s), b_1) ds = y_{b_1}(t),$$

где $y_{b_1}(t)$ – решение уравнения (2.6) при $v(s) \equiv b_1$.

Следовательно, для любой рекламной стратегии (2.5) накопленная репутация фирмы $y(t)$ ограничена некоторой константой $K : y(t) \le K = \max\limits_{0 \le t \le T} y_{b_1}(t)$.

Покажем ограниченность прибыли $\Pi(T)$ в задаче (2.5), (2.6), (2.7), (2.8).

$$\Pi(T) = \int_0^T ((1-\mu) f(y(s), v(s)) - u(s)) ds \le$$
$$\int_0^T f(y(s), v(s)) ds \le T \max_{(y,v) \in D} f(y,v),$$

где $D = \{(y,v) : 0 \le y \le K, 0 \le v \le b_1\}$.

Таким образом множество значений функционала $J(u(\cdot))$ в задаче максимизации $\Pi(T)$ при условиях (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) ограничено, обозначим это множество L.

Пусть $\bar{J} = \sup L$, очевидно, $\bar{J}$ существует и конечно.

Если $\bar{J} \in L$, то выполняется первая альтернатива теоремы, в противном случае вторая альтернатива [4].

Теорема доказана. □

Замечание 2. Если выполняется вторая альтернатива теоремы 2, то существует приближенное относительно значения целевого функционала решение в задаче максимизации $\Pi(T)$ при условиях (2.5), (2.6), (2.7), (2.8). Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует управляющая функция $u_\varepsilon(\cdot)$: (2.5) и соответствующие данному управлению решения $(2.6), (2.7), (2.8) : \bar{J} - J(u_\varepsilon(\cdot)) < \varepsilon$.

4. Заключение

При практическом применении модели (2.1)-(2.5) к реальным прикладным задачам могут возникнуть проблемы, связанные с выполнением необходимых свойств функции выручки $f(y, v)$, для обеспечения существования решения прикладной задачи. В частности, мультипликативная функция $f(y, v) = \beta_0 y^{\beta_1} v^{\beta_2}$*) на области определения переменных $\{(y, v) : y \geq 0, v \geq 0\}$ непрерывна для всех параметров $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$, но при $0 < \beta_1 < 1$ условие Липшица не выполняется в точке $y = 0$.

Выбор параметрического представления функции спроса, которая соответствует эконометрическим соображениям об этой зависимости и математическим требованиям теорем 1,2, является отдельной задачей исследователя. В частности, в [7], [8] параметрическое представление $f(y, v)$ рассматривалось в линейном виде $f(y, v) = \beta_1 y + \beta_2 v$. Такая функция непрерывна по v и удовлетворяет условию Липшица по y на всем пространстве. Таким образом, задача (2.1)-(2.5) имеет решение в случае линейного представления $f(y, v)$.

Также при практической реализации модели (2.1)-(2.5) могут возникнуть вопросы, связанные с методами решения поставленной оптимизационной задачи. Непосредственный поиск решения задачи (2.1)-(2.5) в аналитической форме очень затруднителен (за исключением простейших случаев), поэтому для анализа решения полученной динамической проблемы в общем случае следует использовать численные методы. Это могут быть методы, основанные на принципе максимума [8], прямые методы (например, метод локальных вариаций) или метод параметризации [6].

Список литературы

1. Берндт Э. Р. Практика эконометрики: классика и современность : учеб. для студентов вузов, обучающихся по специальностям 060000 – экономика и управление / Э. Р. Берндт ; пер. с англ. под ред. С. А. Айвазяна. – М. : ЮНИТИ-ДИАНА, 2005.
2. Дыхта В. А. Оптимальное импульсное управление с приложениями / В. А. Дыхта , О. Н. Самсонюк. – М. : Физматлит, 2000.

*) Введена Кнутом Викселлем в начале XX века для моделирования производства, ее частный случай ($\beta_1 + \beta_2 = 1$) использовали в своей работе (1928 г.) Чарльз Кобб и Пол Дуглас

3. Краснов М. Л. Интегральные уравнения / М. Л. Краснов. – М. : Наука, 1975.
4. Основы теории оптимального управления : учеб. пособие для экон. вузов / В. Ф. Кротов , Б. А. Лагоша, С. М. Лобанов, Н. И. Данилина , С. И. Сергеев. – М. : Высш. шк., 1990.
5. Лутошкин И. В. Моделирование отдачи от частоты рекламных воздействий / И. В. Лутошкин // Прикл. эконометрика – 2010. – Т. 19, № 3. – С. 101–111.
6. Лутошкин И. В. Оптимизация нелинейных систем с интегро-дифференциальными связями методом параметризации / И. В. Лутошкин // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2011. – Т. 4,№ 1. – С. 44–56.
7. Лутошкин И. В. Модель оптимизации рекламных расходов с учетом распределенного запаздывания / И. В. Лутошкин, Н. Р. Ямалтдинова // Математика, статика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании : сб. тр. 4-й Междунар. науч.-практ. конф. – Тверь, 2015. – С. 84–89.
8. Лутошкин И. В. Принцип максимума в задаче управления рекламными расходами с распределенным запаздыванием // И. В. Лутошкин, Н. Р. Ямалтдинова // Журн. Средневолж. мат. общества. – 2015. – Т. 17, № 4. – С. 96–104.
9. Jian Huang. Recent Developments in Dynamic Advertising Research /Jian Huang, Mingming Ltng, Liping Liang // European Journal of Operational Research. – 2012. – Vol. 220, N 3. – P. 591–609.

Лутошкин Игорь Викторович, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой экономико-математических методов и информационных технологий, Институт экономики и бизнеса, Ульяновский государственный университет, 432017, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42, тел.: (8422)426103 (e-mail: lutoshkiniv@ulsu.ru)

Ямалтдинова Наиля Ринатовна, аспирант, Институт экономики и бизнеса, Ульяновский государственный университет, 432017, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42, тел.: (8422)426103 (e-mail: ynr92@yandex.ru)

I. V. Lutoshkin, N. R. Yamaltdinova

The Existence of the Solution to the Control Problem of Advertising Expenses with Distributed Lag

Abstract. The dynamic optimal control problem of promotion expenses is analyzed in the paper. The model takes into account response lags of consumers, the response originates from advertising influence and previous purchases. The considered model describes accumulated advertising effect in a time period of advertising impact and accumulated effect of previous purchases in time period of impact of previous purchases. It makes difference to classical optimization dynamic models (Nerlove – Arrow, Vidale – Wolfe etc.) which analyze advertising impact. The optimization problem is formulated as a system of nonlinear integral equations of Volterra type and integral criterion functional. These equations are a special case which is produced by boundaries of the initial problem. The theorem of existence of solution of these equations is proved. Also the theorem of existence of solution of the problem, which maximizes a total company profit for the planning period under restrictions, is examined. These restrictions include boundaries of advertising budget and the functional dependence which demonstrates a reaction of a target audience. The properties of a demand function, which depends on the accumulated advertising and the accumulated goodwill, are considered there. The problem of practical applying of this model is discussed.

Keywords: mathematical advertising models, promotion expenses Control, model with distributed lag of advertising, accumulated firm goodwill, existence of solution, integral equations of Volterra type.

References

1. Berndt Ernst R. The Practice Of Econometrics: Classic and Contemporary. Addison Wesley, 1996.
2. Dyhta V.A., Samsonjuk O.N. Optimal'noe impul'snoe upravlenie s prilozhenijami [The Optimal Impulse Control with Applications] (in Russian). Moscow, Fizmatlit, 2000.
3. Krasnov M.L. Integral'nye uravnenija [The Integral Equations]., Moscow, Nauka, 1975.(in Russian)
4. Krotov V.F., Lagosha B.A., Lobanov S.M., Danilina N.I., Sergeev S.I. Osnovy teorii optimal'nogo upravlenija: Ucheb. posobie dlja jekon. vuzov [The Fundamentals of the Control Problem Theory] (in Russian). Moscow, Vysh. shk., 1990.
5. Lutoshkin I.V. Modelirovanie otdachi ot chastoty reklamnyh vozdejstvij [Modeling a Response Function to Frequency of Advertising] (in Russian). *Applied econometric*, 2010, vol. 19, no 3, pp. 101-111.
6. Lutoshkin I.V. Optimizacija nelinejnyh sistem s integro-differencial'nymi svjazjami metodom parametrizacii [The Parameterization Method for Optimizing the Nonlinear Systems which Have the Integro-differential Equations] (in Russian). *Izvestiya Irk. Gos. Univ., Ser. Matematika*, 2011, vol. 4, no 1, pp.44-56.
7. Lutoshkin I.V., Yamaltdinova N.R. Optimization Model of the Promotion Expenses with Distributed Lag [Model' optimizacii reklamnyh rashodov s uchetom raspredelennogo zapazdyvanija](in Russian). *Sbornik trudov 4 Mezhdunarodnoj nauchno-prakt. konf. «Matematika, statika i informacionnye tehnologii v jekonomike, upravlenii i obrazovanii»* [Proc. 4th Int. Sci. Conf. "Mathematic, Statistic, and Information Technologies in Economic, Management and Education"], Tver, 2015, pp.84-89.
8. Lutoshkin I.V., Yamaltdinova N.R. Princip maksimuma v zadache upravlenija reklamnymi rashodami s raspredelennym zapazdyvaniem [The Maximum Principe in the Problem of Management of the Promotion Expenses with Distributed Lag] (in Russian). *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshhestva*, Saransk, 2015, vol. 17, no 4, pp.96-104.
9. Jian Huang, Mingming Ltng, Liping Liang. Recent Developments in Dynamic Advertising Research. *European Journal of Operational Research*, 2012, vol.220, no 3, pp. 591-609.

Lutoshkin Igor Viktorovich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of Department of Economic and Mathematical Methods and Information Technologies, Ulyanovsk State University, 42, L. Tolstoy st., Ulyanovsk, 432017, tel.: (8422)426103
(e-mail: `lutoshkiniv@ulsu.ru`)

Yamaltdinova Nailya Rinatovna, Postgraduate, Ulyanovsk State University, 42, L. Tolstoy st., Ulyanovsk, 432017, tel.: (8422)426103
(e-mail: `ynr92@yandex.ru`)