Серия «Математика»
2015. Т. 11. С. 80—95

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.853.4 (MSC: 90C26)

Олигополистический банковский сектор Монголии и полиматричные игры трех лиц *

А. В. Орлов
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН

С. Батбилэг
Национальный университет Монголии

Аннотация. Исследуется одна задача конкуренции между тремя основными банками Монголии в секторе крупного кредитования предприятий. Моделирование конфликта проводится с помощью аппарата полиматричных игр трех лиц (гексаматричных игр). Для отыскания равновесий по Нэшу в построенной игре используется подход, базирующийся на ее редукции к невыпуклой задаче оптимизации с билинейной структурой в целевой функции. Для решения последней применяется теория глобального поиска, построенная А. С. Стрекаловским. В соответствии с этой теорией разрабатываются алгоритмы локального и глобального поисков для решения сформулированной игры. Метод локального поиска базируется на идее последовательного решения вспомогательных задач линейного программирования, следующих из постановки исследуемой задачи. Глобальный поиск основан на специальной стратегии глобального поиска в задачах d.c. максимизации, поскольку целевая функция редуцированной задачи оптимизации представима в виде разности двух выпуклых функций. Приводятся и анализируются результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: олигополия, полиматричная игра трех лиц, равновесие по Нэшу, невыпуклые задачи оптимизации, вычислительный эксперимент.

1. Введение

Как известно, моделирование экономических конфликтов с помощью аппарата теории игр является одним из естественных инструментов такого сорта [3; 4; 5]. При этом одна из наиболее часто встречающихся

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-92201-Монг_а).

задач — исследование экономических рынков в условиях несовершенной конкуренции с помощью теории и методов некооперативных игр [3]. Например, для анализа дуополии может быть применена биматричная игра — конечная неантагонистическая игра двух лиц [3; 4; 6; 8]. Большее количество конкурентов на олигополистическом рынке требует применения уже как минимум аппарата полиматричных игр [4; 11; 14].

В работе исследуется одна из задач банковского сектора Монголии, возникающая при анализе рынка крупного кредитования предприятий. Данный конфликт формулируется как полиматричная игра трех лиц, и ставится задача отыскания в ней ситуаций равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях. Такая игра может быть полностью описана с помощью шести матриц, поэтому далее для краткости будем называть ее гексаматричной. Поиск равновесий по Нэшу производится на основе теоремы эквивалентности данной игры и специальной задачи математической оптимизации с билинейной структурой в целевой функции [11]. Решение редуцированной оптимизационной задачи осуществляется с помощью разработанных ранее методов [18], базирующихся на Теории глобального поиска в невыпуклых задачах с (d.c.) функциями А.Д. Александрова [10; 13; 20], поскольку билинейные функции, как известно, представимы в виде разности двух выпуклых функций.

2. Постановка задачи

По официальным данным Центрального банка Монголии [17] на территории страны по состоянию на декабрь 2013 года функционировало 13 банков. Из них, сектор крупного кредитования предприятий на 39,2% принадлежал Голомт банку, на 31,1% — Банку торговли и развития (БТиР), и на 24,9% — Государственному банку. Эти три крупнейших банка покрывают 95,23% всего сектора крупного кредитования на территории Монголии. В этой связи, с точностью до 5% объема можно считать данный сектор олигополией с тремя конкурентами. Общий объем всего кредитного рынка за последние 4 года и его прирост представлены в таблице 1.

Таблица 1

Кредитный рынок Монголии в 2010–2013 гг.

Год	Объем рынка (в млн тугриков)	Рост (в %)
2010	127323.3	–
2011	219936.8	73
2012	424298.7	93
2013	678411.3	60

Основываясь на данных этой таблицы, а также с учетом полученной в результате опроса крупных заемщиков информации о продолжающемся росте спроса на крупные кредиты, можно спрогнозировать, что в 2014 году указанный спрос по сравнению с 2013 годом вырастет примерно на $75\% = (73+93+60)/3$, и общий объем кредитного рынка составит 1188457.51 млн тугриков. Далее, известно, что крупные заемщики составляют 40.9% от общего объема кредитного рынка, что составляет следующее прогнозное значение на 2014 г.: 486079.1 млн. тугриков. Предполагая, что в 2014 году сектор крупного кредитования будет распределяться между тремя крупнейшими банками в той же пропорции, что и в 2013 году, получаем для них следующие значения предполагаемых объемов крупного кредитования: Голомт-банк — 190543.0 млн тугриков (далее — игрок 1), БТиР — 151316.4 млн тугриков (игрок 2), Госбанк — 121033.7 млн тугриков (игрок 3).

Эти три числа являются основой для моделирования следующей игровой ситуации: у каждого из трех банков есть обычное значение процентной ставки на подобного сорта кредиты (так называемая базовая ставка), и стратегиями игроков в данном случае является повышение или понижение этой ставки на значение от 1 до 5% с шагом 1% (всего 11 стратегий у каждого из банков). Множества стратегий игроков имеют вид: $\{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ Для игрока 1 базовая ставка составляет 12% годовых, для игрока 2 — 18% годовых и для игрока 3 — 19.2%.

Предполагаем далее, что у каждого из банков имеется 70% постоянных клиентов (в денежном выражении), которые ни при каких условиях не перейдут к конкурентам. Оставшаяся часть может переходить для кредитования в другие банки. Размер этой части зависит от того, насколько отличаются условия у банков друг от друга по сравнению со своей базовой ставкой. Положим, что при 1% разницы в ставках перераспределяется 3% объема. Так, например, если игрок 1 понизил свою базовую ставку на 2 пункта, а игрок 2 повысил ее на 3 пункта, то разница составит 5%, и выигрыш игрока 1 увеличится на $(5 \cdot (190543.0+151316.4)\cdot 0.03)/2 = 25639.5$ млн тугриков, а выигрыш игрока 2 уменьшится на это значение.

В качестве примера приведем матрицу $\overline{A}_1$ (выигрыш игрока 1 при конкуренции с игроком 2), где по строкам отложены стратегии игрока 1 (для удобства перейдем от млн к млрд тугриков) и матрицу $\overline{B}_1$ (выигрыш игрока 2 при конкуренции с игроком 1).

Аналогичным образом строятся матрицы $\overline{A}_2$ и $\overline{C}_1$, описывающие конкуренцию игроков 1 и 3, а также матрицы $\overline{B}_2$ и $\overline{C}_2$ (конкуренция игроков 2 и 3). Таким образом, рассматривая попарно конкуренцию между всеми тремя банками во всех возможных ситуациях, получаем гексаматричную игру $\Gamma_1(\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{B}_1, \overline{B}_2, \overline{C}_1, \overline{C}_2)$, элементы матриц которой представляют собой возможные объемы кредитов.

$$\overline{A}_1 = \begin{pmatrix} 190.5 & 195.7 & 200.8 & 205.9 & 211.1 & 216.2 & 221.3 & 226.4 & 231.6 & 236.7 & 241.8 \\ 185.4 & 190.5 & 195.7 & 200.8 & 205.9 & 211.1 & 216.2 & 221.3 & 226.4 & 231.6 & 236.7 \\ 180.3 & 185.4 & 190.5 & 195.7 & 200.8 & 205.9 & 211.1 & 216.2 & 221.3 & 226.4 & 231.6 \\ 175.2 & 180.3 & 185.4 & 190.5 & 195.7 & 200.8 & 205.9 & 211.1 & 216.2 & 221.3 & 226.4 \\ 170.0 & 175.2 & 180.3 & 185.4 & 190.5 & 195.7 & 200.8 & 205.9 & 211.1 & 216.2 & 221.3 \\ 164.9 & 170.0 & 175.2 & 180.3 & 185.4 & 190.5 & 195.7 & 200.8 & 205.9 & 211.1 & 216.2 \\ 159.8 & 164.9 & 170.0 & 175.2 & 180.3 & 185.4 & 190.5 & 195.7 & 200.8 & 205.9 & 211.1 \\ 154.6 & 159.8 & 164.9 & 170.0 & 175.2 & 180.3 & 185.4 & 190.5 & 195.7 & 200.8 & 205.9 \\ 149.5 & 154.6 & 159.8 & 164.9 & 170.0 & 175.2 & 180.3 & 185.4 & 190.5 & 195.7 & 200.8 \\ 144.4 & 149.5 & 154.6 & 159.8 & 164.9 & 170.0 & 175.2 & 180.3 & 185.4 & 190.5 & 195.7 \\ 139.3 & 144.4 & 149.5 & 154.6 & 159.8 & 164.9 & 170.0 & 175.2 & 180.3 & 185.4 & 190.5 \end{pmatrix}.$$

$$\overline{B}_1 = \begin{pmatrix} 151.3 & 156.4 & 161.6 & 166.7 & 171.8 & 177.0 & 182.1 & 187.2 & 192.3 & 197.5 & 202.6 \\ 146.2 & 151.3 & 156.4 & 161.6 & 166.7 & 171.8 & 177.0 & 182.1 & 187.2 & 192.3 & 197.5 \\ 141.1 & 146.2 & 151.3 & 156.4 & 161.6 & 166.7 & 171.8 & 177.0 & 182.1 & 187.2 & 192.3 \\ 135.9 & 141.1 & 146.2 & 151.3 & 156.4 & 161.6 & 166.7 & 171.8 & 177.0 & 182.1 & 187.2 \\ 130.8 & 135.9 & 141.1 & 146.2 & 151.3 & 156.4 & 161.6 & 166.7 & 171.8 & 177.0 & 182.1 \\ 125.7 & 130.8 & 135.9 & 141.1 & 146.2 & 151.3 & 156.4 & 161.6 & 166.7 & 171.8 & 177.0 \\ 120.5 & 125.7 & 130.8 & 135.9 & 141.1 & 146.2 & 151.3 & 156.4 & 161.6 & 166.7 & 171.8 \\ 115.4 & 120.5 & 125.7 & 130.8 & 135.9 & 141.1 & 146.2 & 151.3 & 156.4 & 161.6 & 166.7 \\ 110.3 & 115.4 & 120.5 & 125.7 & 130.8 & 135.9 & 141.1 & 146.2 & 151.3 & 156.4 & 161.6 \\ 105.2 & 110.3 & 115.4 & 120.5 & 125.7 & 130.8 & 135.9 & 141.1 & 146.2 & 151.3 & 156.4 \\ 100.0 & 105.2 & 110.3 & 115.4 & 120.5 & 125.7 & 130.8 & 135.9 & 141.1 & 146.2 & 151.3 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что, на главных диагоналях матриц $\overline{A}_1$ и $\overline{B}_1$ стоят одинаковые числа, которые были вычислены выше как прогнозные значения. При этом, как и должно быть в соответствии со сделанными предположениями, сумма симметричных относительно главных диагоналей элементов, взятых из разных матриц, постоянна и равна значению общего распределяемого в данной паре игроков денежного объема 190.5+151.3=341.9 млрд тугриков. Аналогичное свойство справедливо для пары матриц $\overline{A}_2$ и $\overline{C}_1$, а также для пары $\overline{B}_2$ и $\overline{C}_2$.

Далее, разумным представляется перейти от матриц возможных объемов кредитов к матрицам возможной прибыли банков, поскольку основной целью в экономических задачах обычно является именно максимизация прибыли. С этой целью построим игру $\Gamma_2(A_1, A_2, B_1, B_2, C_2, C_2)$ по следующему простому правилу: каждый элемент матриц возможных объемов кредитов умножается на текущее значение ставки по кредиту для соответствующего банка. Например, значение выигрыша для игрока 2 при конкуренции с игроком 1 в ситуации $(-3, 2)$ составит $(18-3)\% \cdot 177.0 = 26.55$ млрд тугриков.

В результате получаем следующие матрицы для игры Γ_2:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 13.3 & 13.7 & 14.1 & 14.4 & 14.8 & 15.1 & 15.5 & 15.9 & 16.2 & 16.6 & 16.9 \\ 14.8 & 15.2 & 15.7 & 16.1 & 16.5 & 16.9 & 17.3 & 17.7 & 18.1 & 18.5 & 18.9 \\ 16.2 & 16.7 & 17.1 & 17.6 & 18.1 & 18.5 & 19.0 & 19.5 & 19.9 & 20.4 & 20.8 \\ 17.5 & 18.0 & 18.5 & 19.1 & 19.6 & 20.1 & 20.6 & 21.1 & 21.6 & 22.1 & 22.6 \\ 18.7 & 19.3 & 19.8 & 20.4 & 21.0 & 21.5 & 22.1 & 22.7 & 23.2 & 23.8 & 24.3 \\ 19.8 & 20.4 & 21.0 & 21.6 & 22.2 & 22.9 & 23.5 & 24.1 & 24.7 & 25.3 & 25.9 \\ 20.8 & 21.4 & 22.1 & 22.8 & 23.4 & 24.1 & 24.8 & 25.4 & 26.1 & 26.8 & 27.4 \\ 21.7 & 22.4 & 23.1 & 23.8 & 24.5 & 25.2 & 26.0 & 26.7 & 27.4 & 28.1 & 28.8 \\ 22.4 & 23.2 & 24.0 & 24.7 & 25.5 & 26.3 & 27.0 & 27.8 & 28.6 & 29.4 & 30.1 \\ 23.1 & 23.9 & 24.7 & 25.6 & 26.4 & 27.2 & 28.0 & 28.8 & 29.7 & 30.5 & 31.3 \\ 23.7 & 24.5 & 25.4 & 26.3 & 27.2 & 28.0 & 28.9 & 29.8 & 30.6 & 31.5 & 32.4 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix}
13.3 & 13.7 & 14.0 & 14.3 & 14.6 & 15.0 & 15.3 & 15.6 & 16.0 & 16.3 & 16.6 \\
14.9 & 15.2 & 15.6 & 16.0 & 16.4 & 16.7 & 17.1 & 17.5 & 17.9 & 18.2 & 18.6 \\
16.3 & 16.7 & 17.1 & 17.6 & 18.0 & 18.4 & 18.8 & 19.3 & 19.7 & 20.1 & 20.5 \\
17.7 & 18.1 & 18.6 & 19.1 & 19.5 & 20.0 & 20.5 & 20.9 & 21.4 & 21.9 & 22.3 \\
18.9 & 19.4 & 19.9 & 20.4 & 21.0 & 21.5 & 22.0 & 22.5 & 23.0 & 23.5 & 24.0 \\
20.1 & 20.6 & 21.2 & 21.7 & 22.3 & 22.9 & 23.4 & 24.0 & 24.5 & 25.1 & 25.7 \\
21.1 & 21.7 & 22.3 & 22.9 & 23.6 & 24.2 & 24.8 & 25.4 & 26.0 & 26.6 & 27.2 \\
22.1 & 22.8 & 23.4 & 24.1 & 24.7 & 25.4 & 26.0 & 26.7 & 27.3 & 28.0 & 28.6 \\
23.0 & 23.7 & 24.4 & 25.1 & 25.8 & 26.5 & 27.2 & 27.9 & 28.6 & 29.3 & 30.0 \\
23.8 & 24.5 & 25.3 & 26.0 & 26.7 & 27.5 & 28.2 & 29.0 & 29.7 & 30.5 & 31.2 \\
24.4 & 25.2 & 26.0 & 26.8 & 27.6 & 28.4 & 29.2 & 30.0 & 30.8 & 31.6 & 32.4
\end{pmatrix};$$

$$B_1 = \begin{pmatrix}
19.7 & 20.3 & 21.0 & 21.7 & 22.3 & 23.0 & 23.7 & 24.3 & 25.0 & 25.7 & 26.3 \\
20.5 & 21.2 & 21.9 & 22.6 & 23.3 & 24.1 & 24.8 & 25.5 & 26.2 & 26.9 & 27.6 \\
21.2 & 21.9 & 22.7 & 23.5 & 24.2 & 25.0 & 25.8 & 26.5 & 27.3 & 28.1 & 28.9 \\
21.7 & 22.6 & 23.4 & 24.2 & 25.0 & 25.9 & 26.7 & 27.5 & 28.3 & 29.1 & 30.0 \\
22.2 & 23.1 & 24.0 & 24.9 & 25.7 & 26.6 & 27.5 & 28.3 & 29.2 & 30.1 & 31.0 \\
22.6 & 23.5 & 24.5 & 25.4 & 26.3 & 27.2 & 28.2 & 29.1 & 30.0 & 30.9 & 31.9 \\
22.9 & 23.9 & 24.9 & 25.8 & 26.8 & 27.8 & 28.8 & 29.7 & 30.7 & 31.7 & 32.6 \\
23.1 & 24.1 & 25.1 & 26.2 & 27.2 & 28.2 & 29.2 & 30.3 & 31.3 & 32.3 & 33.3 \\
23.2 & 24.2 & 25.3 & 26.4 & 27.5 & 28.5 & 29.6 & 30.7 & 31.8 & 32.9 & 33.9 \\
23.1 & 24.3 & 25.4 & 26.5 & 27.6 & 28.8 & 29.9 & 31.0 & 32.2 & 33.3 & 34.4 \\
23.0 & 24.2 & 25.4 & 26.5 & 27.7 & 28.9 & 30.1 & 31.3 & 32.4 & 33.6 & 34.8
\end{pmatrix};$$

$$B_2 = \begin{pmatrix}
19.7 & 20.2 & 20.7 & 21.3 & 21.8 & 22.3 & 22.9 & 23.4 & 23.9 & 24.5 & 25.0 \\
20.6 & 21.2 & 21.8 & 22.3 & 22.9 & 23.5 & 24.0 & 24.6 & 25.2 & 25.8 & 26.3 \\
21.5 & 22.1 & 22.7 & 23.3 & 23.9 & 24.5 & 25.1 & 25.8 & 26.4 & 27.0 & 27.6 \\
22.2 & 22.9 & 23.6 & 24.2 & 24.9 & 25.5 & 26.2 & 26.8 & 27.5 & 28.1 & 28.8 \\
22.9 & 23.6 & 24.3 & 25.0 & 25.7 & 26.4 & 27.1 & 27.8 & 28.5 & 29.2 & 29.9 \\
23.6 & 24.3 & 25.0 & 25.8 & 26.5 & 27.2 & 28.0 & 28.7 & 29.4 & 30.2 & 30.9 \\
24.1 & 24.9 & 25.6 & 26.4 & 27.2 & 28.0 & 28.8 & 29.5 & 30.3 & 31.1 & 31.9 \\
24.5 & 25.4 & 26.2 & 27.0 & 27.8 & 28.6 & 29.4 & 30.3 & 31.1 & 31.9 & 32.7 \\
24.9 & 25.8 & 26.6 & 27.5 & 28.3 & 29.2 & 30.1 & 30.9 & 31.8 & 32.6 & 33.5 \\
25.2 & 26.1 & 27.0 & 27.9 & 28.8 & 29.7 & 30.6 & 31.5 & 32.4 & 33.3 & 34.2 \\
25.4 & 26.3 & 27.3 & 28.2 & 29.2 & 30.1 & 31.0 & 32.0 & 32.9 & 33.9 & 34.8
\end{pmatrix};$$

$$C_1 = \begin{pmatrix}
17.2 & 17.9 & 18.5 & 19.2 & 19.8 & 20.5 & 21.2 & 21.8 & 22.5 & 23.2 & 23.8 \\
17.7 & 18.4 & 19.1 & 19.8 & 20.5 & 21.2 & 21.9 & 22.7 & 23.4 & 24.1 & 24.8 \\
18.1 & 18.9 & 19.6 & 20.4 & 21.1 & 21.9 & 22.6 & 23.4 & 24.2 & 24.9 & 25.7 \\
18.4 & 19.2 & 20.0 & 20.8 & 21.6 & 22.4 & 23.2 & 24.0 & 24.8 & 25.6 & 26.4 \\
18.6 & 19.5 & 20.3 & 21.2 & 22.0 & 22.9 & 23.7 & 24.6 & 25.4 & 26.3 & 27.1 \\
18.8 & 19.6 & 20.5 & 21.4 & 22.3 & 23.2 & 24.1 & 25.0 & 25.9 & 26.8 & 27.7 \\
18.8 & 19.7 & 20.7 & 21.6 & 22.6 & 23.5 & 24.4 & 25.4 & 26.3 & 27.3 & 28.2 \\
18.7 & 19.7 & 20.7 & 21.7 & 22.7 & 23.7 & 24.7 & 25.7 & 26.6 & 27.6 & 28.6 \\
18.6 & 19.6 & 20.6 & 21.7 & 22.7 & 23.8 & 24.8 & 25.8 & 26.9 & 27.9 & 28.9 \\
18.3 & 19.4 & 20.5 & 21.6 & 22.7 & 23.7 & 24.8 & 25.9 & 27.0 & 28.1 & 29.2 \\
18.0 & 19.1 & 20.2 & 21.4 & 22.5 & 23.6 & 24.8 & 25.9 & 27.0 & 28.2 & 29.3
\end{pmatrix};$$

$$C_2 = \begin{pmatrix}
17.2 & 17.8 & 18.3 & 18.9 & 19.5 & 20.1 & 20.7 & 21.2 & 21.8 & 22.4 & 23.0 \\
17.8 & 18.4 & 19.0 & 19.6 & 20.3 & 20.9 & 21.5 & 22.1 & 22.7 & 23.4 & 24.0 \\
18.3 & 18.9 & 19.6 & 20.3 & 20.9 & 21.6 & 22.3 & 22.9 & 23.6 & 24.2 & 24.9 \\
18.7 & 19.4 & 20.1 & 20.8 & 21.5 & 22.2 & 22.9 & 23.6 & 24.3 & 25.0 & 25.7 \\
19.1 & 19.8 & 20.5 & 21.3 & 22.0 & 22.8 & 23.5 & 24.3 & 25.0 & 25.7 & 26.5 \\
19.3 & 20.1 & 20.9 & 21.7 & 22.5 & 23.2 & 24.0 & 24.8 & 25.6 & 26.4 & 27.2 \\
19.5 & 20.3 & 21.1 & 22.0 & 22.8 & 23.6 & 24.4 & 25.3 & 26.1 & 26.9 & 27.7 \\
19.6 & 20.5 & 21.3 & 22.2 & 23.1 & 23.9 & 24.8 & 25.7 & 26.5 & 27.4 & 28.3 \\
19.6 & 20.5 & 21.4 & 22.3 & 23.2 & 24.1 & 25.1 & 26.0 & 26.9 & 27.8 & 28.7 \\
19.5 & 20.5 & 21.4 & 22.4 & 23.3 & 24.3 & 25.2 & 26.2 & 27.1 & 28.1 & 29.0 \\
19.4 & 20.4 & 21.4 & 22.4 & 23.4 & 24.3 & 25.3 & 26.3 & 27.3 & 28.3 & 29.3
\end{pmatrix}.$$

Ставится задача отыскания ситуации равновесия по Нэшу в построенной игре. Для этого, как уже говорилось, будет применен оптимизационный подход, разработанный в [11; 18]. В следующем разделе будут представлены основные элементы этого подхода.

3. Теоретические основы решения гексаматричных игр

Напомним, что гексаматричная игра с матрицами A_1, A_2, B_1, B_2, C_2 и C_2 в смешанных стратегиях формулируется следующим образом [4; 11; 14]:

$$\left.\begin{array}{rl} F_1(x,y,z) \triangleq \langle x, A_1y + A_2z\rangle \uparrow \max\limits_x, & x \in S_m, \\ F_2(x,y,z) \triangleq \langle y, B_1x + B_2z\rangle \uparrow \max\limits_y, & y \in S_n, \\ F_3(x,y,z) \triangleq \langle z, C_1x + C_2y\rangle \uparrow \max\limits_z, & z \in S_l, \end{array}\right\}$$

где $S_p = \{u = (u_1, \ldots, u_p)^T \in I\!R^p \mid u_i \geq 0, \quad \sum\limits_{i=1}^{p} u_i = 1\}$, $p = m, n, l$. x, y и z — стратегии игроков 1, 2 и 3 соответственно.

Определение 1. *[4; 11; 14] Ситуацией равновесия по Нэшу (в смешанных стратегиях)* в игре трех лиц $\Gamma_2 = \Gamma(A, B, C)$ ($A = (A_1, A_2)$, $B = (B_1, B_2)$, $C = (C_1, C_2)$) называется ситуация $(x^*, y^*, z^*) \in S_m \times S_n \times S_l$, удовлетворяющая следующим неравенствам:

$$\left.\begin{array}{rl} F_1(x^*,y^*,z^*) \geq F_1(x,y^*,z^*) & \forall x \in S_m, \\ F_2(x^*,y^*,z^*) \geq F_2(x^*,y,z^*) & \forall y \in S_n, \\ F_3(x^*,y^*,z^*) \geq F_3(x^*,y^*,z) & \forall z \in S_l. \end{array}\right\} \tag{3.1}$$

При этом стратегии x^*, y^* и z^* называются равновесными. Выигрышами игроков 1, 2 и 3 в равновесной ситуации (x^*, y^*, z^*) будем называть соответственно числа

$$\begin{array}{l} v_1^* = v_1(x^*,y^*,z^*) \triangleq \langle x^*, A_1y^* + A_2z^*\rangle, \\ v_2^* = v_2(x^*,y^*,z^*) \triangleq \langle y^*, B_1x^* + B_2z^*\rangle, \\ v_3^* = v_3(x^*,y^*,z^*) \triangleq \langle z^*, C_1x^* + C_2y^*\rangle. \end{array}$$

Множество всех ситуаций равновесия по Нэшу в игре $\Gamma(A, B, C)$ обозначим через $NE = NE(\Gamma(A, B, C))$.

Известно, что как в любой конечной бескоалиционной игре, в гексаматричной игре существует ситуация равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях [11].

Далее введем в рассмотрение следующую задачу оптимизации ($\sigma := (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$):

$$\left.\begin{array}{c}\Phi(\sigma) \triangleq \langle x, A_1y + A_2z\rangle + \langle y, B_1x + B_2z\rangle + \\ +\langle z, C_1x + C_2y\rangle - \alpha - \beta - \gamma \uparrow \max\limits_{\sigma}, \\ \sigma \in D \triangleq \{(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \in I\!R^{m+n+l+3} \mid x \in S_m,\ \ y \in S_n,\ \ z \in S_l, \\ A_1y + A_2z \le \alpha e_m,\quad B_1x + B_2z \le \beta e_n,\quad C_1x + C_2y \le \gamma e_l\},\end{array}\right\} \quad (\mathcal{P})$$

где $e_p = (1, 1, ..., 1) \in I\!R^p, p = m, n, l.$

Лемма 1. *[11] На допустимых векторах $\sigma = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ задачи $(\mathcal{P})$ значение целевой функции $\Phi(\cdot)$ всегда неположительно:*

$$\Phi(\sigma) = \Phi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \le 0 \qquad \forall \sigma \in D. \tag{3.2}$$

Теорема 1. *[11] Ситуация (x^*, y^*, z^*) является равновесием по Нэшу в игре трех лиц $\Gamma(A, B, C)$ в том и только в том случае, когда она входит в некоторое глобальное решение $\sigma_* = (x^*, y^*, z^*, \alpha_*, \beta_*, \gamma_*) \in I\!R^{m+n+l+3}$ задачи $(\mathcal{P})$. При этом числа α_*, β_* и γ_* оказываются выигрышами 1-го, 2-го и 3-го игроков соответственно: $\alpha_* = v_1(x^*, y^*, z^*)$, $\beta_* = v_2(x^*, y^*, z^*)$, $\gamma_* = v_3(x^*, y^*, z^*)$. Кроме того, оптимальное значение $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ задачи $(\mathcal{P})$ равно нулю:*

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \Phi_* = \Phi(x^*, y^*, z^*, \alpha_*, \beta_*, \gamma_*) = 0. \tag{3.3}$$

Следствие 1. *Пусть (x^*, y^*, z^*) является ситуацией равновесия в игре $\Gamma(A, B, C)$ с выигрышами α_*, β_* и γ_*. Тогда*

$$\alpha_* = \max_i (A_1y^* + A_2z^*)_i, \beta_* = \max_j (B_1x^* + B_2z^*)_j, \gamma_* = \max_t (C_1x^* + C_2y^*)_t.$$

Таким образом, для отыскания равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях в исследуемой игре, необходимо уметь глобально решать невыпуклую задачу $(\mathcal{P})$, что в данной работе предлагается осуществить с помощью разработанных в [18] методов локального и глобального поисков, базирующихся на Теории глобального поиска А.С. Стрекаловского [10; 13; 20].

Метод локального поиска в задаче $(\mathcal{P})$ использует идею последовательного решения следующих задач линейного программирования, вытекающих их постановки задачи (см. также [6; 7; 8; 9; 19]):

$$\left.\begin{array}{c}f_1(x, \beta) \triangleq \langle x, (A_1 + B_1^T)v + (A_2 + C_1^T)w\rangle - \beta \uparrow \max\limits_{(x,\beta)}, \\ (x, \beta) \in X(v, w, \bar{\gamma}) \triangleq \{(x, \beta) \mid x \in S_m, \\ B_1x - \beta e_n \le -B_2w,\ C_1x \le \bar{\gamma} e_l - C_2v\};\end{array}\right\} \quad (\mathcal{LP}_x(v, w, \bar{\gamma}))$$

$$\left.\begin{array}{c}f_2(y, \gamma) \triangleq \langle y, (B_1 + A_1^T)u + (B_2 + C_2^T)w\rangle - \gamma \uparrow \max\limits_{(y,\gamma)}, \\ (y, \gamma) \in Y(u, w, \bar{\alpha}) \triangleq \{(y, \gamma) \mid y \in S_n, \\ A_1y \le \bar{\alpha} e_m - A_2w,\ C_2y - \gamma e_l \le -C_1u\};\end{array}\right\} \quad (\mathcal{LP}_y(u, w, \bar{\alpha}))$$

$$\left.\begin{array}{c} f_3(z,\alpha) \triangleq \langle z, (C_1 + A_2^T)u + (C_2 + B_2^T)v\rangle - \alpha \uparrow \max\limits_{(z,\alpha)}, \\ (z,\alpha) \in Z(u,v,\bar{\beta}) \triangleq \{(z,\alpha) \mid z \in S_l, \\ A_2 z - \alpha e_m \le -A_1 v,\ B_2 z \le \bar{\beta} e_n - B_1 u\}. \end{array}\right\} \quad (\mathcal{LP}_z(u,v,\bar{\beta}))$$

Здесь $(u,v,w,\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}) \in D$ — некоторая допустимая точка в задаче $(\mathcal{P})$.

Для упрощения обозначений введем следующие функции:

$$\varphi(v,w,\bar{\gamma}) \triangleq \sup_{(x,\beta)}\{f_1(x,\beta) \mid (x,\beta) \in X(v,w,\bar{\gamma})\}, \tag{3.4}$$

$$\psi(u,w,\bar{\alpha}) \triangleq \sup_{(y,\gamma)}\{f_2(y,\gamma) \mid (y,\gamma) \in Y(u,w,\bar{\alpha})\}, \tag{3.5}$$

$$\chi(u,v,\bar{\beta}) \triangleq \sup_{(z,\alpha)}\{f_3(z,\alpha) \mid (z,\alpha) \in Z(u,v,\bar{\beta})\}. \tag{3.6}$$

Обозначим также $\Phi_s \triangleq \Phi(\sigma_s)$.

Пусть задана некоторая фиксированная точка $(x^0, y^0, z^0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \in D$, начиная с которой требуется производить локальный поиск в задаче $(\mathcal{P})$. Эту точку можно построить, например, следующим образом:

$$\begin{gathered} x_i^0 = \frac{1}{m},\ i = 1,...,m;\ \ y_j^0 = \frac{1}{n},\ j = 1,...,n;\ \ z_t^0 = \frac{1}{l},\ t = 1,...,l; \\ \alpha_0 = \max_i (A_1 y^0 + A_2 z^0)_i; \beta_0 = \max_j (B_1 x^0 + B_2 z^0)_j; \gamma_0 = \max_t (C_1 x^0 + C_2 y^0)_t. \end{gathered} \tag{3.7}$$

YZ_γ-процедура

Шаг 0. Положить $s := 1$, $y^s := y^0$, $z^s := z^0$, $\gamma_s := \gamma_0$.

Шаг 1. Некоторым методом линейного программирования найти $\rho_s/3$-решение (x^{s+1}, β_{s+1}) задачи $(\mathcal{LP}_x(y^s, z^s, \gamma_s))$, так что справедливым будет неравенство:

$$\begin{gathered} f_1(x^{s+1}, \beta_{s+1}) + \rho_s/3 = \\ = \langle x^{s+1}, (A_1 + B_1^T)y^s + (A_2 + C_1^T)z^s\rangle - \beta_{s+1} + \rho_s/3 \ge \varphi(y^s, z^s, \gamma_s). \end{gathered} \tag{3.8}$$

Шаг 2. Найти $\rho_s/3$-решение (y^{s+1}, γ_{s+1}) задачи $(\mathcal{LP}_y(x^{s+1}, z^s, \alpha_s))$, так что справедливым будет неравенство:

$$\begin{gathered} f_2(y^{s+1}, \gamma_{s+1}) + \rho_s/3 = \langle y^{s+1}, (B_1 + A_1^T)x^{s+1} + (B_2 + C_2^T)z^s\rangle - \\ -\gamma_{s+1} + \rho_s/3 \ge \psi(x^{s+1}, z^s, \alpha_s). \end{gathered} \tag{3.9}$$

Шаг 3. Найти приближенное $\rho_s/3$-решение (z^{s+1}, α_{s+1}) задачи $(\mathcal{LP}_z(x^{s+1}, y^{s+1}, \beta_{s+1}))$, так что справедливо:

$$\begin{gathered} f_3(z^{s+1}, \alpha_{s+1}) + \rho_s/3 = \langle z^{s+1}, (C_1 + A_2^T)x^{s+1} + (C_2 + B_2^T)y^{s+1}\rangle - \\ -\alpha_{s+1} + \rho_s/3 \ge \chi(x^{s+1}, y^{s+1}, \beta_{s+1}). \end{gathered} \tag{3.10}$$

Шаг 4. Если выполнено условие

$$\Phi_{s+1} - \Phi_s \leq \tau, \tag{3.11}$$

где τ — заданная точность, то стоп; иначе положить $s := s + 1$ и вернуться на шаг 1.

Теорема 2. *[18] i) Если $\rho_s > 0$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, $\sum\limits_{s=0}^{\infty} \rho_s < +\infty$, тогда последовательность $\{\Phi_s\}$, генерируемая YZ_γ-процедурой, сходится.*
ii) Если $(x^s, y^s, z^s, \alpha_s, \beta_s, \gamma_s) \to (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$, тогда предел $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}) \in D$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\Phi(\hat{\sigma}) \geq \Phi(x, \hat{y}, \hat{z}, \hat{\alpha}, \beta, \hat{\gamma}) \quad \forall (x, \beta) \in X(\hat{y}, \hat{z}, \hat{\gamma}), \tag{3.12}$$

$$\Phi(\hat{\sigma}) \geq \Phi(\hat{x}, y, \hat{z}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \gamma) \quad \forall (y, \gamma) \in Y(\hat{x}, \hat{z}, \hat{\alpha}), \tag{3.13}$$

$$\Phi(\hat{\sigma}) \geq \Phi(\hat{x}, \hat{y}, z, \alpha, \hat{\beta}, \hat{\gamma}) \quad \forall (z, \alpha) \in Z(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\beta}). \tag{3.14}$$

Определение 2. Точку $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$, удовлетворяющую неравенствам (3.12), (3.13) и (3.14), будем называть критической точкой задачи $(\mathcal{P})$. Если же для некоторой точки эти неравенства выполнены с определенной точностью, будем называть ее приближенно критической.

Далее, в соответствии со схемой глобального поиска [8; 10; 13; 20], необходимо произвести явное разложение целевой функции задачи $(\mathcal{P})$ на разность двух выпуклых. Это можно осуществить, например, с помощью известного свойства скалярного произведения:

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = f(x, y, z) - g(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma), \tag{3.15}$$

где

$$f(x, y, z) = \frac{1}{4}\Big(\|x + A_1 y\|^2 + \|x + A_2 z\|^2 + \|B_1 x + y\|^2 + \|y + B_2 z\|^2 + \\ + \|C_1 x + z\|^2 + \|C_2 y + z\|^2\Big), \quad g(\sigma) = \frac{1}{4}\Big(\|x - A_1 y\|^2 + \|x - A_2 z\|^2 + \\ + \|B_1 x - y\|^2 + \|y - B_2 z\|^2 + \|C_1 x - z\|^2 + \|C_2 y - z\|^2\Big) + \alpha + \beta + \gamma. \tag{3.16}$$

Нетрудно видеть, что эти функции выпуклы по (x, y, z) и σ, соответственно.

С использованием этого разложения далее сформулируем (в контрпозитарной форме) условия глобальной оптимальности (УГО) для задачи $(\mathcal{P})$, являющиеся основой для построения процедур выхода из критических точек, полученных на этапе локального поиска.

Пусть $\alpha(y, z) \triangleq \max\limits_{1 \leq i \leq m} (A_1 y + A_2 z)_i$, $\beta(x, z) \triangleq \max\limits_{1 \leq j \leq n} (B_1 x + B_2 z)_j$, $\gamma(x, y) \triangleq \max\limits_{1 \leq t \leq l} (C_1 x + C_2 y)_t$, так что, согласно следствию 1, $\alpha_* = \alpha(y^*, z^*)$, $\beta_* = \beta(x^*, z^*)$, $\gamma_* = \gamma(x^*, y^*)$.

Теорема 3. *[8; 10; 13; 20] Если допустимый набор $(x^*, y^*, z^*, \alpha_*, \beta_*, \gamma_*)$ не является глобальным решением задачи $(\mathcal{P})$, то найдутся векторы $(u, v, w) \in I\!R^{m+n+l}$, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in S_m \times S_n \times S_l$ и число ξ, такие что*

$$\begin{aligned} f(u, v, w) - \xi = \zeta \stackrel{\triangle}{=} \Phi(x^*, y^*, z^*, \alpha_*, \beta_*, \gamma_*) < 0, \\ g(u, v, w, \alpha(v, w), \beta(u, w), \gamma(u, v)) \leq \xi \leq \sup(g, D), \end{aligned} \tag{3.17}$$

и имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) - \xi < \langle \nabla_x f(u, v, w), \bar{x} - u \rangle + \\ + \langle \nabla_y f(u, v, w), \bar{y} - v \rangle + \langle \nabla_z f(u, v, w), \bar{z} - w \rangle, \end{aligned} \tag{3.18}$$

где $\bar{\alpha} = \alpha(\bar{y}, \bar{z})$, $\bar{\beta} = \beta(\bar{x}, \bar{z})$, $\bar{\gamma} = \gamma(\bar{x}, \bar{y})$.

Процедура выхода из критических точек базируется на применении алгоритмического (конструктивного) свойства УГО. В случае задачи $(\mathcal{P})$, если для некоторой четверки $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\xi})$ из (3.17) и для точки $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$, такой что $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in S_m \times S_n \times S_l$ и $\bar{\alpha} = \alpha(\bar{y}, \bar{z})$, $\bar{\beta} = \beta(\bar{x}, \bar{z})$, $\bar{\gamma} = \gamma(\bar{x}, \bar{y})$ справедливо неравенство (3.18):

$$g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) - \bar{\xi} < \langle \nabla_{xyz} f(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}), (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \rangle,$$

то, используя выпуклость функции $f(\cdot)$, отсюда получаем

$$\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) > \Phi(x^*, y^*, z^*, \alpha_*, \beta_*, \gamma_*).$$

Другими словами, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ «лучше», чем $(x^*, y^*, z^*, \alpha_*, \beta_*, \gamma_*)$.

Далее, основываясь на условиях глобальной оптимальности (3.17), (3.18), с использованием d.c. разложения (3.15), (3.16) представим основные этапы алгоритма глобального поиска для задачи $(\mathcal{P})$.

Пусть известна некоторая приближенно критическая точка $(x^k, y^k, z^k, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$, полученная методом локального поиска, со значением целевой функции $\zeta_k := \Phi(\sigma_k)$. Тогда производится следующая цепочка операций.

1) Выбирается число $\xi \in [\xi_-, \xi_+]$, где $\xi_- \stackrel{\triangle}{=} \inf(g, D)$, $\xi_+ \stackrel{\triangle}{=} \sup(g, D)$, и строится некоторая аппроксимация

$$\mathcal{A}_k = \{(u^1, v^1, w^1), \ldots, (u^{N_k}, v^{N_k}, w^{N_k}) | f(u^p, v^p, w^p) = \zeta_k + \xi,\ p = \overline{1, N_k}\}$$

поверхности уровня выпуклой по (x, y, z) функции $f(x, y, z)$:

$$U(\zeta_k) = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = \zeta_k + \xi\}.$$

2) Для всех точек аппроксимации $\mathcal{A}_k$ проверяется неравенство

$$g(u^p, v^p, w^p, \alpha(v^p, w^p), \beta(u^p, w^p), \gamma(u^p, v^p)) \leq \xi + \nu\xi, \quad p = \overline{1, N_k}, \tag{3.19}$$

следующее из условий глобальной оптимальности (см. (3.17)), где ν — дополнительный параметр, который помогает избежать эффекта ошибок округления при численном счете. Если неравенство (3.19) выполнено, то точка аппроксимации будет использоваться дальше. Если же (3.19) нарушено, то точка (u^p, v^p, w^p) является бесперспективной с точки зрения улучшения с ее помощью текущей критической точки.

3) Начиная с точек (u^p, v^p, w^p) аппроксимации, отобранных на втором этапе, строятся решения $(\bar{x}^p, \bar{y}^p, \bar{z}^p, \bar{\alpha}_p, \bar{\beta}_p, \bar{\gamma}_p)$ линеаризованных (по базовой невыпуклости) в этих точках задач [8; 10; 13]:

$$g(\sigma) - \langle \nabla f(u^p, v^p, w^p), (x, y, z) \rangle \downarrow \min_{\sigma}, \quad \sigma \in D, \qquad (\mathcal{PL}_p)$$

возникающих из условий глобальной оптимальности (см. неравенство (3.18)). Заметим, что задача $(\mathcal{PL}_p)$ оказывается задачей выпуклого квадратичного программирования, которую можно успешно решить с использованием классических методов и алгоритмов [1; 2].

4) Начиная из точек $(\bar{x}^p, \bar{y}^p, \bar{z}^p, \bar{\alpha}_p, \bar{\beta}_p, \bar{\gamma}_p) \in D$ осуществляется локальный поиск, доставляющий приближенно критические точки $(\hat{x}^p, \hat{y}^p, \hat{z}^p, \hat{\alpha}_p, \hat{\beta}_p, \hat{\gamma}_p), \quad p \in \{1, \ldots, N_k\}$.

5) Далее, для каждого $p \in \{1, \ldots, N_k\}$ решается задача уровня:

$$\left.\begin{array}{c} \langle \nabla_x f(u, v, w), \hat{x}^p - u \rangle + \langle \nabla_y f(u, v, w), \hat{y}^p - v \rangle + \\ + \langle \nabla_z f(u, v, w), \hat{z}^p - w \rangle \uparrow \max\limits_{(u,v,w)}, \quad f(u, v, w) = \zeta_k + \xi. \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{U}_p)$$

С учетом определения функции $f(\cdot)$ отметим, что имеется возможность аналитического решения задачи $(\mathcal{U}_p)$. Пусть (u_0^p, v_0^p, w_0^p) — (приближенное) решение этой задачи.

6) Если при этом для некоторого $q \in \{1, \ldots, N_k\}$ имеет место неравенство

$$\begin{array}{c} g(\hat{x}^q, \hat{y}^q, \hat{z}^q, \hat{\alpha}_q, \hat{\beta}_q, \hat{\gamma}_q) - \xi < \langle \nabla_x f(u_0^q, v_0^q, w_0^q), \hat{x}^q - u_0^q \rangle + \\ + \langle \nabla_y f(u_0^q, v_0^q, w_0^q), \hat{y}^q - v_0^q \rangle + \langle \nabla_z f(u_0^q, v_0^q, w_0^q), \hat{z}^q - w_0^q \rangle, \end{array}$$

то, в силу выпуклости $f(\cdot)$ по совокупности переменных, получаем

$$f(u_0^q, v_0^q, w_0^p) - \xi = \zeta_k = \Phi(\sigma_k) < \Phi(\hat{x}^q, \hat{y}^q, \hat{z}^q, \hat{\alpha}_q, \hat{\beta}_q, \hat{\gamma}_q).$$

Таким образом, построена точка $(\hat{x}^q, \hat{y}^q, \hat{z}^q, \hat{\alpha}_q, \hat{\beta}_q, \hat{\gamma}_q)$, лучшая, чем σ_k. Если же улучшить значение ζ_k с помощью всех точек аппроксимации $\mathcal{A}_k$ не удалось, требуется продолжить одномерный поиск по ξ на отрезке $[\xi_-, \xi_+]$.

Ключевым моментом вышеописанного метода глобального поиска является построение аппроксимации уровня выпуклой функции $f(\cdot)$, порождающей базовую невыпуклость в исследуемой задаче. В задаче $(\mathcal{P})$ аппроксимация $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}(\zeta_k)$ строилась на основе специальных множеств направлений [18]:

$$Dir1 = \{(e^i, e^j, e^t),\ \ i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n,\ t = 1, ..., l\}, \tag{3.20}$$

$$Dir2 = \{(e^i + x^k, e^j + y^k, e^t + z^k),\ \ i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n,\ t = 1, ..., l\}, \tag{3.21}$$

где $e^i \in I\!R^m, e^j \in I\!R^n, e^t \in I\!R^l$ — векторы стандартного эвклидового базиса, (x^k, y^k, z^k) — компоненты текущей критической точки.

Принимая во внимание свойства задачи $(\mathcal{P})$ и основываясь на этапах глобального поиска 1)-6), был сконструирован и реализован Алгоритм глобального поиска в построенной гексаматричной игре. Далее представим результаты вычислительного эксперимента по отысканию равновесий Нэша в гексаматричной игре, построенной в разделе 2.

4. Вычислительный эксперимент

Программы, реализующие разработанные методы были написаны на языке системы MATLAB 7.11.0.584 R2010b 64-bit [16]. Вспомогательные задачи линейного и квадратичного программирования решались с помощью подпрограмм системы MATLAB «linprog» и «quadprog», соответственно, с установками по умолчанию. Использовался компьютер с процессором Intel Core i5-2400 CPU (3.1 GHz).

В качестве стартовой точки для методов была выбрана точка, построенная по формуле (3.7). Нетрудно вычислить, что для построенной задачи $\Phi(x^0, y^0, z^0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = -19.5545$.

Для осуществления локального поиска использовалась YZ_γ-процедура, где точность проверки критерия останова (3.11) была равна $\tau = 10^{-6}$. В точке $\hat{\sigma} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$, полученной на этапе локального поиска, значение целевой функции улучшилось не намного: $\Phi(\hat{\sigma}) = -16.6828$. Следовательно, основную работу по достижению глобального решения, где $\Phi_* = 0$ (см. формулу (3.3)), необходимо провести с использованием процедуры глобального поиска.

Аппроксимация поверхности уровня (см. этап 1) глобального поиска) строилась с помощью множества направлений (3.20) и (3.21). Точность глобального решения была равна $\varepsilon = 10^{-5}$. Что касается параметра алгоритма $\xi_- := \inf(g, D)$, он вычислялся с помощью решения соответствующей выпуклой задачи квадратичного программирования. При этом $\xi_+ := \xi_- + \xi_0$, что является грубой оценкой значения параметра ξ_+. В данной задаче $\xi_0 = 1000$. Еще один параметр $\Delta\xi < \xi_0$ используется для задания на отрезке $[\xi_-, \xi_+]$ соответствующей сетки, и в данном случае для отыскания глобального решения оказалось достаточно значения $\Delta\xi = 500$. Наконец, значение параметра $\nu > 0$ (см. этап 2) глобального поиска и неравенство (3.19)), подобранное, как и все параметры выше, на этапе предварительных вычислительных экспериментов, было равно $\nu = 0.02$.

Результаты работы программ представлены в таблице 2, где Dir — номер используемого множества направлений для построения аппроксимации, Φ_* полученное значение целевой функции задачи, It — количество итераций алгоритма глобального поиска, LP — общее число решенных в процессе глобального поиска задач линейного программирования, Loc — число запусков процедуры локального поиска, T — время решения задачи. Заметим, что общее число решенных задач квадратичного программирования (см. этап 3)) равно $(Loc + 1)$.

Таблица 2

Результаты решения игры $\Gamma_2(A, B, C)$

Dir	Φ_*	It	LP	Loc	T
1	$1.4133 \cdot 10^{-8}$	4	443	68	5.39
2	$-7.0680 \cdot 10^{-8}$	19	1588	233	20.48

Итак, в обоих случаях приближенно получена ситуация равновесия по Нэшу в построенной игре. При этом оказалось, что и в том, и другом случае решение имеет вид: $x^* = (0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1)$, $y^* = (0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1)$, $z^* = (0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1)$, $\alpha_* = 64.8$, $\beta_* = 69.6$, $\gamma_* = 58.6$. Так что в игре $\Gamma_2(A_1, A_2, B_1, B_2, C_2, C_2)$ найдена ситуация равновесия в чистых стратегиях. Тот факт, что с использованием разных аппроксимаций поверхности уровня в задаче получено одно и то же решение, а также структура матриц, позволяют выдвинуть гипотезу о том, что других равновесных ситуаций в игре нет.

Можно предложить следующую экономическую интерпретацию полученного решения. Напомним, что в соответствии с правилами моделирования конфликта, правый нижний угол в каждой матрице (где и было найдено равновесие) означает установление каждым банком максимально возможной ставки по кредиту. То, что такая ситуация является равновесной, может объяснить факт часто встречающегося стремления банков к повышению ставок даже без имеющихся на то оснований, продиктованных реальной экономической ситуацией. Фактически можно предположить возможность сговора трех основных игроков на олигополистическом банковском рынке с целью получения максимальной прибыли каждым из них.

5. Заключение

В работе с помощью аппарата полиматричных игр трех лиц смоделирована и численно исследована одна задача конкуренции между банками Монголии в секторе крупного кредитования предприятий. Предложено простое правило перехода клиентов от одного банка к другому в случае изменения игроками на рынке своих ставок по кредиту. Несмотря на простоту, данная модель позволяет отследить тенденцию к неоправданному повышению ставок по кредитам всеми участниками олигополии. Дальнейшая работа будет направлена на уточнение модели и учет в ней дополнительных экономических факторов.

Список литературы

1. Базара М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы / М. Базара, К. Шетти. – М. : Мир, 1982.
2. Васильев Ф. П. Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. – М.: Факториал-Пресс, 2002.
3. Васин А. А. Теория игр и модели математической экономики / А. А. Васин, В. В. Морозов. – М. : МАКС Пресс, 2005. – 272 с.
4. Мазалов В. В. Математическая теория игр и приложения / В. В. Мазалов. – СПб. : М. : Краснодар : Лань, 2010. – 446 с.
5. Нейман Дж. Теория игр и экономическое поведение / Дж. Нейман, О. Фон Моргенштерн. – М. : Наука, 1970. – 708 с.
6. Орлов А. В. О численном поиске ситуаций равновесия в биматричных играх / А. В. Орлов, А. С. Стрекаловский // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2005. – Т. 45, № 6. – С. 983–997.
7. Орлов А. В. Численное решение задач билинейного программирования / А. В. Орлов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2008. Т. 48, № 2. – С. 237–254.
8. Стрекаловский А. С. Биматричные игры и билинейное программирование / А. С. Стрекаловский, А. В. Орлов. – М. : Физматлит, 2007. – 224 с.
9. Стрекаловский А. С. Локальный поиск в квадратично-линейной задаче двухуровневого программирования / А. С. Стрекаловский, А. В. Орлов, А. В. Малышев // Сиб. журн. вычисл. математики. – 2010. – Т. 13, №. 1. – С. 75-88.
10. Стрекаловский А. С. Новый подход к невыпуклой оптимизации / А. С. Стрекаловский, А. В. Орлов // Вычисл. методы и программирование. – 2007. – Т. 8, № 2. – С. 11–27.
11. Стрекаловский А. С. Полиматричные игры и задачи оптимизации / А. С. Стрекаловский, Р. Энхбат // Автоматика и телемеханика. – 2014. – № 4. – С. 51–66.
12. Стрекаловский А. С. Численное решение одного класса задач двухуровневого программирования / А. С. Стрекаловский, А. В. Орлов, А. В. Малышев // Сиб. журн. вычисл. математики. – 2010. – Т. 13, №. 2. – С. 201–212.
13. Стрекаловский А. С. Элементы невыпуклой оптимизации / А. С. Стрекаловский. – Новосибирск : Наука, 2003. – 356 с.
14. Яновская Е. Б. Ситуации равновесия в полиматричных играх / Е. Б. Яновская // Литовский математический сборник. – 1968. –Т. 8. – С. 381–384.
15. Horst R. Global Optimization. Deterministic Approaches / R. Horst, H. Tuy. – Berlin : Springer-Verlag, 1993.
16. MATLAB — The Language of Technical Computing. Natick, MA: The MathWorks, Inc. URL: http://www.mathworks.com/products/matlab/ (date of access: 27.11.2014).

17. Mongol Bank. Poll conducted among bank lenders and research, 2013.
18. Orlov A. V. On computational search for Nash equilibrium in hexamatrix games / A. V. Orlov, A. S. Strekalovsky, S. Batbileg // Optimization Letters. – 2014. DOI: 10.1007/s11590-014-0833-8 (published online).
19. Strekalovsky A. S. On computational search for optimistic solutions in bilevel problems / A. S. Strekalovsky, A. V. Orlov, A. V. Malyshev // J. Glob. Optim. – 2010. – Vol. 48, N 1. – P. 159–172.
20. Strekalovsky A. S. On solving optimization problems with hidden nonconvex structures / A. S. Strekalovsky // Optimization in Science and Engineering / T. M. Rassias, C. A. Floudas, S. Butenko (eds.). – N. Y. : Springer, 2014. – P. 465–502.

Орлов Андрей Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952)453063 (e-mail: anor@icc.ru)

Батбилэг Сухэ, кандидат физико-математических наук, Национальный университет Монголии, 14200, Улан-Батор, округ Сухэ Батора, ул. Бага Тойру, 4, (e-mail: batbileg.sukhee@gmail.com)

A. V. Orlov, S. Batbileg

Oligopolistic Banking Sector of Mongolia and Polymatrix Games of Three Players

Abstract. A problem of competition between the three largest banks of the Mongolia major crediting sector is investigated. Modeling of the conflict is carried out using the apparatus of three person polymatrix games (hexamatrix games). To find a Nash equilibrium in the constructed game we use an approach based on its reduction to a nonconvex optimization problem with bilinear structure in the objective function. To solve the latter problem we apply Global Search Theory due to A. S. Strekalovsky. According to the theory, local and global search algorithms for formulated game are developed. Local search method is based on the idea of sequential solving of auxiliary linear programming problems followed from the formulation of the problem. Global search based on a specific Global Search Strategy in the d.c. maximization problems as the objective function of the reduced optimization problem can be represented as a difference of two convex functions. The results of a computational simulation is presented and analized.

Keywords: oligopoly, polymatrix game of three players, Nash equilibrium, nonconvex optimization problems, computational simulation.

References

1. Bazaraa M.S., Shetty C.M. Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. New York, John Wiley & Sons, 1979.
2. Vasilyev F.P. Optimization Methods (in Russian). Moscow, Factorial Press, 2002.
3. Vasin A.A., Morozov V.V. Game theory and models of mathematical economics (in Russian). Moscow, MAKS Press, 2005, 272 p.
4. Mazalov V. Mathematical Game Theory and Applications. New York, John Wiley & Sons, 2014, 432 p.

5. Von Neumann J., Morgenstern O. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton, NJ, Princeton University Press, 1944.
6. Orlov A.V., Strekalovsky A.S. Numerical search for equilibria in bimatrix games. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2005, vol. 45, no 6, pp. 947–960.
7. Orlov A.V. Numerical solution of bilinear programming problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2008, vol. 48, no 2, pp. 225-241.
8. Strekalovsky A.S., Orlov A.V. Bimatrix games and bilevel programming (in Russian). Moscow, Fizmatlit, 2007. 224 p.
9. Strekalovsky A.S., Orlov A.V., Malyshev A.V. A local search for the quadratic-linear bilevel programming problem. *Numerical Analysis and Applications*, 2010, vol. 3, no 1, pp. 59–70.
10. Strekalovsky A.S., Orlov A.V. A new approach to nonconvex optimization. *Numerical Methods and Programming*, 2007, vol. 8, no 2, pp. 11–27.
11. Strekalovsky A.S., Enkhbat R. Polymatrix games and optimization problems. *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, no 4, pp. 632–645.
12. Strekalovsky A.S., Orlov A.V., Malyshev A.V. Numerical solution of a class of bilevel programming problems . *Numerical Analysis and Applications*, 2010, vol. 3, no 2, pp. 165–173.
13. Strekalovsky A.S. Elements of nonconvex optimization (in Russian). Novosibirsk, Nauka, 2003. 356 p.
14. Yanovskaya E.B. Equilibrium points in polymatrix games (in Russian). *Latv. Math. Collect.*, 1968, no 8, pp. 381–384.
15. Horst R., Tuy H. Global Optimization. Deterministic Approaches. Berlin, Springer-Verlag, 1993.
16. MATLAB — The Language of Technical Computing. Natick, MA, The MathWorks, Inc. URL: http://www.mathworks.com/products/matlab/. Accessed 27 November 2014.
17. Mongol Bank. Poll conducted among bank lenders and research, 2013.
18. Orlov A.V., Strekalovsky A.S., Batbileg S. On computational search for Nash equilibrium in hexamatrix games. *Optimization Letters*, 2014, DOI: 10.1007/s11590-014-0833-8 (published online).
19. Strekalovsky A.S., Orlov A.V., Malyshev A.V. On computational search for optimistic solutions in bilevel problems. *J. Glob. Optim*, 2010, vol. 48, no 1, pp. 159–172.
20. Strekalovsky A. S. On solving optimization problems with hidden nonconvex structures. In: Rassias, T.M., Floudas, C.A., Butenko, S. (eds.) *Optimization in Science and Engineering*, New York, Springer, 2014, pp. 465–502.

Andrey Vasil'evich Orlov, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of the Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, tel.: (3952)453063 (e-mail: `anor@icc.ru`)

Batbileg Sukhee, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), National University of Mongolia, Baga toiruu 4, Sukhbaatar district, Ulaanbaatar, 14200, (e-mail: `batbileg.sukhee@gmail.com`)