Серия «Математика»
2015. Т. 11. С. 3—12

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.97

О задаче управления сосредоточенными параметрами в правых частях полулинейных гиперболических систем *

А. В. Аргучинцев
Иркутский государственный университет

В. П. Поплевко
Иркутский государственный университет

Аннотация. В классе гладких управляющих воздействий исследуется задача оптимального управления системой полулинейных гиперболических уравнений первого порядка. Рассматривается случай, когда функция, входящая в правую часть системы, определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение начально-краевой задачи понимается в обобщенном смысле как решение интегральной системы уравнений, построенной на характеристиках исходной гиперболической системы [4]. Управляющие воздействия стеснены поточечными (амплитудными) ограничениями. Такие задачи возникают при моделировании ряда процессов химической технологии (расчет пусковых режимов химико-технологических объектов, переходов от одного стационарного режима к другому) [3].

С использованием методики [1] получено необходимое условие оптимальности вариационного типа в классе допустимых гладких управлений для полулинейных гиперболических систем первого порядка [2]. Для такого рода задач неприменимы методы оптимального управления, основанные на использовании принципа максимума Л.С. Понтрягина, его следствий и модификаций. Эти методы ориентированы на классы разрывных управлений. Предлагаемый подход основан на использовании специальных вариаций. Проварьированное управление обладает следующими свойствами: 1) оно является гладким; 2) область его значений определяется областью значений исходного управления. Таким образом, обеспечивается гладкость варьируемых управлений и выполнение ограничений. Предложена основанная на необходимом условии схема метода улучшения допустимого управления и проведена численная реализация на тестовом примере. Приведены результаты расчетов, представлены графики решений. Проведенный численный эксперимент показал, что предложенный метод улучшения гладких управляющих воздействий, которые удовлетворяют поточечным ограничениям, может эффективно применяться для решения данного класса задач.

Ключевые слова: гиперболическая система, оптимальное управление, необходимое условие оптимальности, гладкие управления.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимизации системы полулинейных гиперболических уравнений первого порядка

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = f(x(s,t), y(t), s, t), \tag{1.1}$$

$$(s,t) \in \Pi,\ \Pi = S \times T,\ S = [s_0, s_1], T = [t_0, t_1].$$

Здесь $x = x(s,t)$ – n-мерная вектор-функция, $A = A(s,t)$ – матрица $n \times n$, $y(t)$ - m-мерная вектор-функция.

Предполагаем, что система 1.1 записана в инвариантном виде, то есть матрица $A(s,t)$ — диагональная. Дополнительно введем предположение, что диагональные элементы $a_i = a_i(s,t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, матрицы коэффициентов знакопостоянны в Π:

$$a_i(s,t) > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m_1;$$

$$a_i(s,t) = 0, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m_2;$$

$$a_i(s,t) < 0, \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, \ldots, n.$$

Составим две диагональные подматрицы: $A^+(s,t)$ размерности $m_1 \times m_1$ и $A^-(s,t)$ размерности $(n - m_2) \times (n - m_2)$ из положительных и отрицательных диагональных элементов матрицы A соответственно. Из вектора состояния $x = x(s,t)$ выделим два подвектора, соответствующих положительным и отрицательным диагональным элементам матрицы A:

$$x^+ = (x_1, x_2, \ldots, x_{m_1}), \quad x^- = (x_{m_2+1}, x_{m_2+2}, \ldots, x_n).$$

Начально-краевые условия для системы 1.1 зададим в следующем виде

$$x(s, t_0) = x^0(s), \quad s \in S; \quad x^+(s_0, t) = \eta(t), \quad x^-(s_1, t) = \mu(t), t \in T. \tag{1.2}$$

Функция $y(t)$ определяется из управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = g(y, u, t), \quad t \in T,$$

$$y(t_0) = y^0. \tag{1.3}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 14-01-00564).

Задача рассматривается в классе гладких управляющих воздействий: управление $u(t)$ непрерывно дифференцируемо на отрезке T и удовлетворяет поточечным ограничениям следующего вида:

$$u(t) \in U, \ t \in T, \tag{1.4}$$

где U — компакт из E^r.

Целью задачи оптимального управления является минимизация функционала

$$J(u) = \int\limits_S \varphi(x(s,t_1),s)\,ds + \iint\limits_\Pi F(x,s,t)\,ds\,dt, \tag{1.5}$$

определенного на решениях задачи 1.1–1.3 при допустимых управлениях, удовлетворяющих условию 1.4.

Задача оптимального управления 1.1–1.5 рассматривается при следующих предположениях:

1) диагональные элементы $a_i(s,t)$, $i = 1,2,...,n$ матрицы A непрерывно дифференцируемы в прямоугольнике Π;

2) вектор-функции $\eta(t)$, $\mu(t)$ и $x^0(s)$ непрерывны соответственно на T и S;

2) вектор-функция $g = g(y,u,t)$ непрерывна по совокупности своих аргументов и имееет непрерывные и ограниченные частные производные по $y \in E^m$ и $u \in U$;

3) вектор-функция $f(x,y,s,t)$ непрерывна по совокупности своих аргументов и имеет непрерывные и ограниченные частные производные по $x \in E^n$ и $y \in E^m$;

4)скалярные функции $\varphi = \varphi(x,s)$, $F = F(x,s,t)$, непрерывны по совокупности своих аргументов и имеют непрерывные и ограниченные частные производные по $x \in E^n$.

Решение начально-краевой задачи 1.1–1.2 понимается в обобщенном смысле как решения интегральной системы уравнений, построенной на характеристиках исходной гиперболической системы [4].

2. Формула приращения

Рассмотрим два допустимых процесса: базовый $\{u, y = y(t,u),\ x = x(s,t,u)\}$ и варьируемый $\{\widetilde{u} = u + \Delta u, \widetilde{y} = y + \Delta y = y(t,\widetilde{u}), \widetilde{x} = x + \Delta x = x(s,t,\widetilde{u})\}$.

Обозначим

$$\Delta J(u) = J(\widetilde{u}) - J(u).$$

Очевидно, что

$$\Delta J(u) = \int\limits_S \Delta\varphi(x(s,t_1),s)\,ds + \iint\limits_\Pi \Delta F(x,s,t)\,ds\,dt. \tag{2.1}$$

Система в приращениях имеет вид:

$$\left(\frac{d\Delta x}{dt}\right)_A = \Delta f(x,y,s,t), \tag{2.2}$$

$$\Delta x(s,t_0) = \Delta x^+(s_0,t) = \Delta x^-(s_1,t) = 0.$$

$$\frac{d\Delta y}{dt} = \Delta g(y,u,t), \quad \Delta y(t_0) = 0. \tag{2.3}$$

Здесь

$$\Delta f(x,s,t) = f(\widetilde{x},\widetilde{y},s,t) - f(x,y,s,t),$$

$$\Delta g(y,u,t) = g(\widetilde{y}(t),\widetilde{u}(t),t) - g(y(t),u(t),t),$$

Проделаем ряд достаточно стандартных операций, обычно используемых при выводе необходимых условий оптимальности первого порядка.

Введем скалярные функции

$$H(\psi,x,y,s,t) =< \psi, f(x,y,s,t) > -F(x,s,t),$$

$$h(p,y,u,t) =< p, g(y,u,t) >,$$

Потребуем, чтобы вектор-функции $\psi(s,t)$, и $p(t)$ являлись решениями следующей сопряженной задачи:

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_A + A_s\psi = -H_x(\psi,x,y,s,t), \quad \psi(s,t_1) = -\frac{\partial\varphi(x(s,t_1),s)}{\partial x},$$

$$\psi^-(s_0,t) = 0, \quad \psi^+(s_1,t) = 0, \tag{2.4}$$

$$\dot{p} = -h_y(p,y,u,t) - \int\limits_{s_0}^{s_1} H_y\,ds, \quad p(t_1) = 0. \tag{2.5}$$

Тогда формула приращения примет вид:

$$\Delta J(u) = -\int\limits_T \Delta_{\widetilde{u}} h(p(t),y(t),u(t),t)\,dt + \eta. \tag{2.6}$$

Здесь

$$\eta = \int\limits_S o_\varphi(||\Delta x(s,t_1)||)\, ds - \iint\limits_\Pi o_H(||\Delta x(s,t)||)\, dsdt -$$

$$- \iint\limits_\Pi o_H(||\Delta y(t)||)\, dsdt - \iint\limits_\Pi \langle \Delta_{\widetilde{x}} H_y, \Delta y\rangle\, dsdt -$$

$$- \int\limits_T [o_h(||\Delta y(t)||) + < \Delta_{\widetilde{u}} h_y(p(t), y(t), u(t), t), \Delta y(t) >]\, dt.$$

Справедливы следующие оценки приращений:

$$||\Delta y(t)|| \le K_1 \int\limits_{t_0}^{t} ||\Delta u||\, d\tau, \tag{2.7}$$

где $K_1 = L_2 e^{L_1(t_1 - t_0)}$.

$$||\Delta x(s,t)|| \le K_2 \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t} ||\Delta u||\, d\tau,\, d\tau, \tag{2.8}$$

где $K_2 = K_1 e^{M_1(t_1 - t_0)}$. Здесь M_1 – константа Липшица для функции f.

3. Необходимое условие оптимальности

Дальнейший вариационный анализ исследуемой задачи основан на использовании неклассических вариаций, обеспечивающих гладкость допустимых управлений. Проварьированное управление строится по правилу [1]

$$u_{\varepsilon,\delta}(t) = u(t + \varepsilon\delta(t)), \quad t \in T, \tag{3.1}$$

$\varepsilon \in [0,1]$ – параметр, характеризующий малость вариации, $\delta(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$t_0 \le t + \delta(t) \le t_1,\ t \in T. \tag{3.2}$$

Отметим свойства проварьированного управления 3.1.

Во-первых, оно является гладким. Во-вторых, область значений функции $u_{\varepsilon,\delta}(t)$ определяется областью значений исходного управления $u(t)$. Таким образом, управление $u_{\varepsilon,\delta}(t)$ допустимо. Имеет место поточечная сходимость: $u_{\varepsilon,\delta}(t) \to u(t)$ при $\varepsilon \to 0$ в каждой точке отрезка T для любой $\delta(t)$, удовлетворяющей неравенству 3.2.

Последнее свойство позволяет характеризовать соответствующую вариацию управления $\Delta u_{\varepsilon,\delta}(t) = u_{\varepsilon,\delta}(t) - u(t)$ как нестандартную слабую вариацию гладкой функции $u(t)$: равномерно малая деформация отрезка T «перемешивает» значения исходного управления, сохраняя равномерную близость к нулю функции $\Delta u_{\varepsilon,\delta}(t)$ и ее производной

$$\frac{d}{dt}\Delta u_{\varepsilon,\delta}(t).$$

Выбирая управление по правилу 3.1 и используя разложение

$$\Delta u = \dot{u}(t)\varepsilon\delta(t) + o(\varepsilon),$$

формула приращения целевого функционала с учетом оценок 2.7, 2.8 примет следующий вид:

$$\Delta J(u) = -\varepsilon \int\limits_T \langle h_u, \dot{u}(t)\rangle \delta(t)\, dt + o(\varepsilon).$$

Отсюда, в силу произвольности $\delta(t)$, следует

Теорема 1. *Пусть процесс $\{u, y, x\}$ является оптимальным в рассматриваемой задаче. Тогда выполняется условие*

$$\langle h_u(p(t), y(t), u(t), t), \dot{u}(t)\rangle = 0, \;\; t \in T, \tag{3.3}$$

где $p(t)$ решение сопряженной задачи 2.4,2.5 при $u = u(t)$.

4. Схема метода

Остановимся подробнее на алгоритме, использующем необходимое условие оптимальности в форме 3.3.

Введем в рассмотрение скалярную функцию

$$\omega(p(t), u(t), \dot{u}(t), t) = \langle h_u(p(t), u(t), t), \dot{u}(t)\rangle.$$

Пусть задано начальное приближение из класса допустимых функций $u^0 = u^0(t)$. Опишем k-ю итерацию метода, т.е. переход от $u^k(t)$ к $u^{k+1}(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Для управления $u^k(t)$ вычисляются $p^k = p^k(t)$, $\psi^k = \psi^k(s,t)$ решения сопряженной системы гиперболических уравнений, строится $\omega_k(t) = \omega(p^k(t), u^k(t), \dot{u}^k(t), t)$. Если $\omega_k(t) = 0$, $t \in T$, то управление u^k удовлетворяет необходимому условию оптимальности, и алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае определим гладкую функцию $\delta_k(t)$ по правилу:

$$\delta_k(t) = \frac{(t-t_0)(t_1-t)\omega_k}{(t_1-t_0)\max\limits_{t\in T}|\omega_k|}. \tag{4.1}$$

Построим однопараметрическое семейство управлений
$u^k_\varepsilon(t) = u^k(t+\varepsilon\delta_k(t))$ и решим задачу одномерной минимизации

$$\varepsilon_k: \;\; J(u^k_\varepsilon) \to min, \;\; \varepsilon \in [0,1].$$

Следующее приближение находится по формуле

$$u^{k+1} = u^k_{\varepsilon_k}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Утверждение о сходимости метода сформулировано в [1].

5. Численный эксперимент

Рассмотрим работу описанного выше метода на тестовом примере. В квадрате $[0,1]\times[0,1]$ рассмотрим задачу оптимального управления

$$\begin{gathered} x_{1t} + x_{1s} = x_2 - 2y_1, \;\; x_1(s,0) = s, \;\; x_1(0,t) = 0, \\ x_{2t} = y_2, \;\; x_2(s,0) = s^2+1, \\ \dot y_1 = -u, \;\; y_1(0) = 1, \\ \dot y_2 = u y_1, \;\; y_2(0) = 1, \end{gathered}$$

Множество допустимых управлений — гладкие функции, удовлетворяющие ограничениям типа включения $u(t) \in [0;4], \quad t \in [0;1]$.
Целевой функционал имеет вид

$$J(u) = \int\limits_0^1 [(x_1(s,1) - \theta_1^*(s))^2 + (x_2(s,1) - \theta_2^*(s))^2]\, ds \to \min_{u\in U},$$

где функции $\theta_1^*(s), \quad \theta_2^*(s)$ подсчитаны на управлении $u^*(t) = 2+t$.

В качестве начального управления была выбрана функция
$u^0(t) = \cos(8t) + 3\sin(t/1.26) + 1$. Значение функционала $J(u^0) = 1.499$.

Решение выполнялось описанным выше методом. На рис. 1, 2 представлены результаты расчетов: значение целевого функционала на выходе процедуры $J(u^k(t)) = 0.000565$, при этом $\max\limits_{t\in T}|\omega_k(t)| = 0,039558$, методом проведено 123 итерации, причина остановки метода — неулучшение значение функционала ($J^k - J^{k-1} > 10^{-6}$).

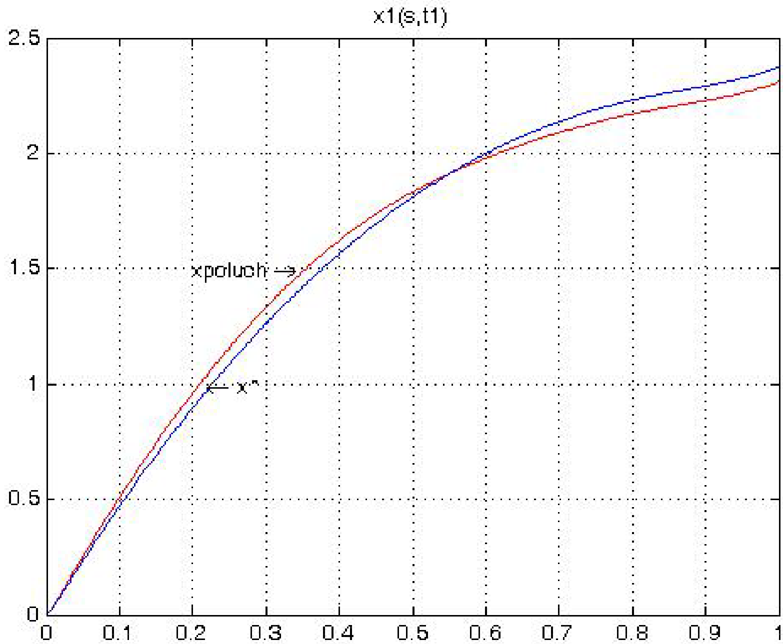

Рис. 1.

Проведенный численный эксперимент показал, что предложенный метод улучшения гладких управляющих воздействий может эффективно применяться для решения данного класса задач.

Список литературы

1. Аргучинцев А. В. Оптимальное управление гиперболическими системами / А. В. Аргучинцев. – М. : Физматлит, 2007. – 165 с.
2. Аргучинцев А. В. Оптимизация одного класса гиперболических систем с гладкими управлениями / А. В. Аргучинцев, В. П. Поплевко // Изв. вузов. Математика. – 2009. – № 7. – С. 71-76.
3. Демиденко Н. Д. Моделирование и оптимизация систем с распределенными параметрами / Н. Д. Демиденко, В. И. Потапов, Ю. И. Шокин. – Новосибирск : Наука, 1983. – 271 с.
4. Рождественский Б. Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. – М. : Наука, 1978. – 686 с.

Аргучинцев Александр Валерьевич, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)243453 (e-mail: `arguch@math.isu.ru`)

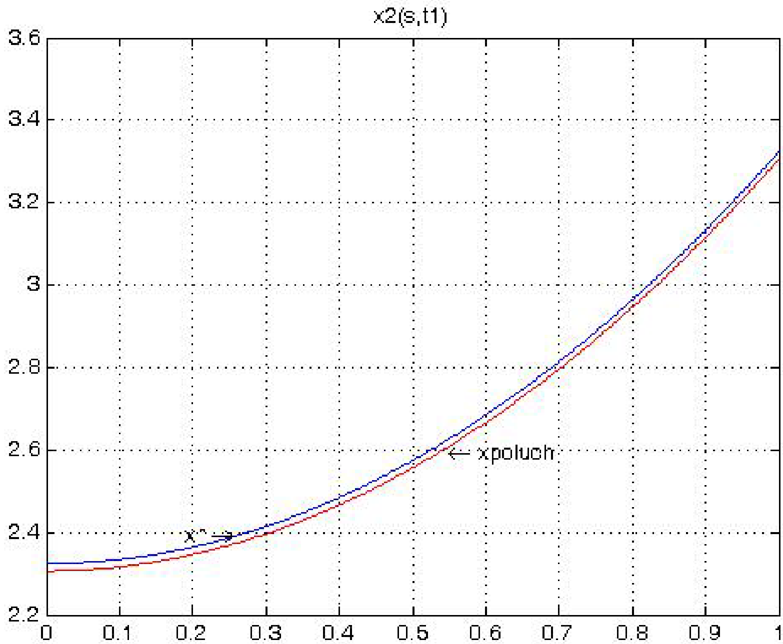

Рис. 2.

Поплевко Василиса Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)201307 (e-mail: `vasilisa@math.isu.ru`)

A. V. Arguchintsev, V. P. Poplevko

On a Control Problem by Lumped-Parameter at the Right-Hand Side of the Semi-Linear Hyperbolic System

Abstract. At the article an optimal control problem by a first order system of semi-linear hyperbolic equations in the class of smooth control function is studied. A function at the right-hand side of the system is determined by a control system of ordinary differential equations. The initial-boundary value problem equivalent the system of integral equations on the characteristics of the hyperbolic system [4] (generalized solution). Control functions are satisfied the pointwise constraints. Such problems arise in modeling of chemical technology processes [3]. We obtain necessary optimality conditions of variational type by using the procedure [1] in the class of admissible smooth controls for the first order semi-linear hyperbolic systems [2]. An optimal control methods based on the maximum principle of Pontryagin do not use for such problems. These methods are focused on classes of discontinuous control functions. The proposed approach is based on the use of special variations which provide smooth control function and satisfaction the pointwise constraints. The condition of optimality is proved, and a scheme of iterative methods is proposed. The numerical experiment is carried out. Numerical results are presented by graphics of solutions. The numerical experiments show that the proposed method of improving the smooth control functions can be effectively used to solve this class of problems.

Keywords: hyperbolic systems, optimal control, necessary condition of optimality, smooth control.

References

1. Arguchintsev A.V. Optimal control by hyperbolic systems (in Russian). Moscow, Fizmatlit, 2007. 165 p.
2. Arguchintsev A.V., Poplevko V.P. Optimization by a class of hyperbolic system with smooth controls (in Russian). *Izvestiya Vuzov. Matematika*, 2009, no 7, pp. 71–76.
3. Demidenko N.D., Potapov V.I., Shokin U.I. Modeling and optimization of systems with distributed parameter (in Russian). Novosibirsk, Nauka, 1983. 271 p.
4. Rozhdestvenskiy B.L., Yanenko N.N. System of quasi-linear equations and their applications to gas dynamics (in Russian). Moscow, Nauka, 1978. 686 p.

Arguchintsev Alexander Valer'evich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, tel.: (3952)243453 (e-mail: arguch@math.isu.ru)

Poplevko Vasilisa Pavlovna, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, tel.: (3952)201307 (e-mail: vasilisa@math.isu.ru)