Серия «Математика»
2017. Т. 20. С. 17—31

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.968.78
MSC 45J05
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.20.17

О некоторых результатах исследования вырожденных систем интегро-дифференциальных уравнений в школе Ю.Е. Бояринцева *

М. В. Булатов
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

В. Ф. Чистяков
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. Статья посвящается первому декану математического факультета Иркутского государственного университета Владимиру Владимировичу Васильеву в честь 110-летия со дня рождения. В работе рассматриваются постановки задач, возникшие при разработке теории и численных методов решения дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ), в направлениях, развитых или намеченных в работах Ю. Е. Бояринцева. Решение таких задач потребовало расширения первоначальной тематики. В частности, потребовалось изучать системы интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) и интегральные уравнения Вольтерра, с тождественно вырожденной матрицей в области определения при главном члене. Такие системы интегральных уравнений принято сейчас называть интегро-алгебраическими уравнениями (ИАУ). Полученные результаты дали основу для построения эффективных численных методов решения вырожденных ИДУ, ИАУ и ДАУ. В статье основное внимание уделено изучению общего случая линейных систем интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ), с тождественно вырожденной матрицей в области определения перед старшей производной искомой вектор-функции. При определенных условиях изучается возмущение систем ИДУ операторами Фредгольма. Исследуется структура общих решений таких систем. Основными методами исследования является подход, основанный на анализе продолженных систем и свойств матричных многочленов, определенным образом поставленных в соответствие изучаемым ИДУ.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, вырожденные, оператор Вольтерра, оператор Фредгольма, индекс.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 15-01-03228 А, 16-51-540002 Вьет-а.

1. Постановка задачи

В работах В. В. Васильева рассматривались сложные уравнения содержащие суперпозиции интегральных операторов Вольтерра и Фредгольма и дифференциальных операторов высокого порядка (см., например, [3; 4] и приводимую там библиографию). Эти задачи возникли при решении проблем, сформулированных известным математиком и механиком А. И. Некрасовым. В результате плодотворной исследовательской и преподавательской деятельности В. В. Васильев заложил основы школы Иркутского государственного университета в области дифференциальных и интегральных уравнений, включая вырожденные в том или ином смысле задачи. Более подробно биографию и научное наследие В. В. Васильева можно узнать в публикации [6]. Появление другой ветви исследования дифференциальных и интегральных уравнений в Иркутске связано с деятельностью Юрия Еремеевича Бояринцева и Анатолия Соломоновича Апарцина. С начала 70-х гг. прошлого века при анализе сложных электрических, гидравлических цепей и процессов с последействием в приложениях часто встречаются системы, включающие в себя взаимосвязанные обыкновенные дифференциальные уравнений (ОДУ) различных порядков, алгебраические уравнения и интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма. Такие системы можно записать в виде векторных уравнений с вырожденной матрицей при главном члене (см., например, [2; 9; 12]).

В начальный период исследований изучались с целью построения эффективных численных методов для их решения системы дифференциальных уравнений первого порядка (Ю. Е. Бояринцев) и интегральных уравнений Вольтерра первого рода (А. С. Апарцин) вида

$$\Lambda_1 x = \left[A(t)\frac{d}{dt} + B(t)\right] x = \phi,\ Vx := \int_\alpha^t K(t,s)x(s)ds = \phi, \qquad (1.1)$$

где $t \in T = [\alpha, \beta],\ A(t),\ B(t), K(t,s) - (m \times n)$-матрицы, $x \equiv x(t),\ \phi \equiv \phi(t)-$искомая и заданная вектор-функции соответственно, причем выполнено условие

$$\operatorname{rank} A(t) < \min\{m,n\}\ \forall t \in T. \qquad (1.2)$$

Системы $\Lambda_1 x = \phi$, удовлетворяющие условию (1.2), называют в настоящее время дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Оказалось, что при достаточной гладкости входных данных и существовании линейных дифференциальных операторов, сводящих системы (1.1) к системам разрешенным относительно главного члена левый обратный оператор является интегро-дифференциальным оператором с вырожденной матрицей в области определения при старшей производной. Это стало важным стимулом для изучения систем уравнений вида

$$(\Lambda_k + V)x := \sum_{i=0}^{k} A_i(t)x^{(i)}(t) + \int_{\alpha}^{t} K(t,s)x(s)ds = f,\ t \in T, \tag{1.3}$$

где $A_i(t),\ K(t,s) - (n \times n)$-матрицы, $x(t)$ и $f \equiv f(t)$ искомая и известная вектор-функции соответственно, $x^{(j)}(t) = (d/dt)^j x(t),\ x^{(0)}(t) = x(t)$, с начальными данными

$$x^{(j)}(\alpha) = a_j,\ j = \overline{0, k-1}, \tag{1.4}$$

где a_j—заданные вектора из $\mathbf{R}^n$. Ниже мы предполагаем, что входные данные достаточно гладкие и выполнено следующие условие

$$\det A_k(t) = 0\ \forall t \in T. \tag{1.5}$$

Наряду с системой (1.3) рассматривается возмущения ее компактным оператором

$$(\Lambda_k + V + \lambda\Phi)z = f,\ t \in T,\ \Phi z = \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{K}(t,s)z(s)ds, \tag{1.6}$$

где $\mathrm{K}(t,s)$-матрица, λ—скалярный параметр (в общем случае комплексный), $z \equiv z(t)$— искомая вектор-функция. В последнее десятилетие поток работ по данной тематике значительно вырос (см., например, [7; 8; 12; 16] и приводимую там библиографию).

Замечание 1. Для упрощения записи указание зависимости от t в работе будет иногда опускаться, если это не вызывает путаницы. Включения $V(t) \in \mathbf{C}^i(T),\ i \geq 1$, где $V(t)$— матрица или вектор-функция, означают, что все производные всех ее элементов непрерывны до порядка i включительно. Непрерывности соответствуют обозначения: $V(t) \in \mathbf{C}(T)$. Запись $V(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ означает, что все элементы $V(t)$ являются вещественно-аналитическими функциями на T. В статье используется символ: $\mathbf{r}[V(t)] = \max\{\operatorname{rank} V(t),\ t \in T\}$.

Под решением систем (1.3), (1.6) на T мы будем понимать любые вектор-функции $x(t),\ z(t) \in \mathbf{C}^k(T)$, которые обращают уравнения (1.3), (1.6) в тождества на T.

Задачей нашего исследования является получение условий разрешимости систем вида (1.3), (1.6) и выяснение структуры их общих решений.

2. Основные определения и вспомогательные сведения

Введем основные для нас понятия.

Определение 1. *Пространство решений (ПР) системы (1.3) конечномерно на T, если существует $(n \times d)$-матрица $X_d(t) \in \mathbf{C}^k(T)$ с минимально возможным d такая, что любая линейная комбинация $x(t,c) = X_d(t)c$, где вектор c пробегает $\mathbf{R}^d$, удовлетворяет тождеству $(\Lambda_k + V)x(t,c) \equiv 0$ и на T нет решений системы $(\Lambda_k + V)x = 0$ отличных от $x(t,c)$.*

Ядро оператора Λ_k+V конечномерно ($\dim\ker(\Lambda_k+V) < \infty$), если ПР системы (1.3) конечномерно. Число d будем называть размерностью ПР или размерностью ядра оператора.

Если мы предположим, что $k = 1$, $\det\ A_1(t) \neq 0\ \forall t \in T$, то ПР системы $(\Lambda_k+V)x = 0$, $t \in T$ совпадает с множеством функций $x(t,c) = X(t)c$, где $X(t)-$некоторая $(n \times n)$-матрица, $\det\ X(\alpha) \neq 0$, $c \in \mathbf{R}^n$. Следовательно, $d = n$.

Определение 2. *Если существует оператор $\Omega_l = \sum\limits_{j=0}^{l} L_j(t)(d/d)^j$, где $L_j(t)$ – $(n \times n)$-матрицы из $\mathbf{C}(T)$, обладающие свойством*

$$\Omega_l \circ \Lambda_k y = \sum_{i=0}^{q} \tilde{A}_i(t) y^{(i)}(t)\ \forall y(t) \in \mathbf{C}^{l+k}(T),$$

где $\tilde{A}_i(t)$ – $(n \times n)$-некоторые матрицы из $\mathbf{C}(T)$, $\det \tilde{A}_q(t) \neq 0\ \forall t \in T$, то Ω_l называется левым нормализатором (ЛН) для оператора Λ_k.

В частности, ЛН может быть обратным оператором: пусть $\Lambda_1 y = N(dy/dt) + E_n y$, где $N^2 = 0$, E_n-единичная матрица размерности n. Тогда в качестве ЛН можно принять оператор:

$$\Omega_1 = -N(d/dt) + E_n :\ \Omega_1 \circ \Lambda_1 y = y\ \forall y \in \mathbf{C}^2(T).$$

Определение 3. *Пусть для оператора $\tilde{\Lambda}_l := \sum\limits_{j=0}^{l} L_j(t)(d/dt)^j$, где $L_j(t) \in \mathbf{C}(T)-(n\times n)$-матрицы, определен ЛН и он обладает свойством*

$$\tilde{\Lambda}_l \circ (\Lambda_k + V)y = \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} A_{i,l}(t) \\ 0 \end{pmatrix} y^{(i)}(t) + \int_{\alpha}^{t} \begin{pmatrix} K_l(t,s) \\ 0 \end{pmatrix} y(s)ds\ \forall y \in \mathbf{C}^{l+k}(T),$$

где $A_{i,l}(t)$, $K_l(t,s)$ – $(\nu \times n)$-матрицы, $0 < \nu \leq n$, причем матрица $A_{k,l}(t)$ имеет полный ранг для всех $t \in T$ кроме, возможно, конечного числа точек $t_j \in T$, $j = 0,1,2,...,\mu$.

Если $\nu = n$, $\det A_{k,l}(t) \neq 0\ \forall t \in T$, то оператор $\tilde{\Lambda}_l$ будем называть левым регуляризирующим оператором (ЛРО) для оператора $\Lambda_k + V$, а минимально возможное l левым индексом.

Определение 4. *Точки* $t_j \in T$: rank $A_{k,l}(t_j) < \nu$, $j = 0, 1, 2, ..., \mu$ *будем называть особыми точками системы (1.3).*

В особых точках решения ИДУ могут ветвиться или иметь разрывы второго рода (см., например, примеры из работы [1]).

Операторы $\tilde{\Lambda}_l$ можно строить следующим образом. Подействуем оператором $\mathcal{L} = \mathrm{diag}\{0, (d/dt)I_{n-r}\}L(t)$ на ИДУ (1.3), где

$$L(t)A_k(t) = \begin{pmatrix} A_{k,1}(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \ L(t) \in \mathbf{C}^A(T), \ \det L(t) \neq 0 \ \forall t \in T,$$

нулевой блок имеет размерность $([n - r] \times n)$, $r = \mathbf{r}[A_k(t)]$. Получим либо соотношение из определения 3 либо ИДУ порядка k с вырожденной матрицей при главном члене. В этом случае процесс повторяем. Произведение l соответствующих операторов вида $\mathcal{L}$ является одним из искомых оператором $\tilde{\Lambda}_l$. Согласно теореме Долежаля [17] матрицы $L(t)$ существуют на всех шагах процесса.

Пример 1. Пусть задана система $(\Lambda_2 + V)x =$

$$= \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^{(2)} + \begin{pmatrix} \gamma + 1 & 0 \\ t^2 & t \end{pmatrix} x^{(1)} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2t & 1 \end{pmatrix} x + \int_\alpha^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g(t)s & g(t) \end{pmatrix} x(s)ds = f,$$

где γ−вещественный параметр, $g(t)$−некоторая заданная функция. Если $\gamma = 1$, то ПР системы бесконечномерно: любая вектор-функция $(t^j, -t^{j+1})^\top$, $j = 1, 2, \cdots$, является решением ДАУ. При $g(t) = t$ можно принять $\tilde{\Lambda}_2 = F_2\mathbf{d}F_1\mathbf{d}F_0\mathbf{d}E_2$, где

$$\mathbf{d} = \mathrm{diag}\{1, d/dt\}, \ F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \ F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \ F_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}.$$

При другом выборе $g(t)$, например, полагая $g(t) = e^t$, получим процесс с неограниченным числом шагов.

Если $\gamma \neq 1$, то можно принять $\tilde{\Lambda}_2 x = \mathbf{d}F_0\mathbf{d}E_2$. Здесь $A_{2,2}(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ (4 - \gamma - 1)t & 2 \end{pmatrix}$. Точка $t = 0$ является особой, если $0 \in T$. В обратном случае оператор $\tilde{\Lambda}_2$ является ЛРО и индекс ИДУ равен 2. Методом исключения переменных легко показать, что система в этом случае разрешима при любой $f \in \mathbf{C}^2(T)$.

Ниже нам потребуются следующие понятия.

Определение 5. *(см. например,* [2]*). Псевдообратной матрицей к* $(m \times n)$*-матрице* $M(t)$, $t \in T$, *называется* $(n \times m)$*-матрица* $M^+(t)$, *удовлетворяющая для любых* $t \in T$ *уравнениям*

$$M(t)M^+(t)M(t) = M(t), \ M^+(t)M(t)M^+(t) = M^+(t),$$

$$(M^+(t)M(t))^\top = M^+(t)M(t), \ (M(t)M^+(t))^\top = M(t)M^+(t).$$

Псевдообратная матрица определена для любого $t \in T$ и любой $(m \times n)$-матрицы $M(t)$. Псевдообратная матрица единственна. Теория постоянных обобщенных обратных матриц изложена в ряде монографий (см. например, [2]). Если матрица $M(t)$ квадратная и неособенная, то $M^{-1}(t) = M^{+}(t)$. Согласно [9], существует матрица $M^{+}(t) \in \mathbf{C}^q(T)$, если $M \in \mathbf{C}^q(T)$ и rank $M(t) = r = const$ $\forall t \in T$. Если rank $M(t) \neq const, t \in T$, то хотя один элемент матрицы $M^{+}(t)$ имеет разрыв второго рода на $t \in T$. Введем операторы

$$\mathrm{d}_i[M] = \begin{pmatrix} M \\ M^{(1)} \\ \cdots \\ M^{(i)} \end{pmatrix}, \ \mathcal{M}_i[M] = \begin{pmatrix} C_0^0 M & 0 & \cdots & 0 \\ C_1^0 M^{(1)} & C_1^1 M & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_i^0 M^{(i)} & C_i^1 M^{(i-1)} & \cdots & C_i^i M \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где $M \equiv M(t)$ некоторая матрица из $\mathbf{C}^i(T)$, $C_i^j = j!(i-j)!/i!-$ биномиальные коэффициенты. Операторы связывает формула

$$\mathcal{M}_i[M(t)F(t)] = \mathcal{M}_i[M(t)]\mathrm{d}_i[F(t)], \quad (2.2)$$

где $F(t)-$некоторая матрица подходящей размерности из $\mathbf{C}^i(T)$, вытекающая из формулы Лейбница для дифференцирования произведений.

Понятие ЛРО тесно связано с понятием $i-$продолженной системы.

Определение 6. *Совокупность системы (1.3) и ее производных до порядка i включительно:* $\mathrm{d}_i[(\Lambda_k+V)x-f] = 0,\ t \in T$, *где* $\mathrm{d}_i[.]-$*оператор из формул (2.1), называется i-продолженной системой (1.3).*

С использованием формул (2.1) i-продолженную систему можно записать в виде соотношения

$$D_i[\mathbf{A}, K](t)\mathrm{d}_{i+k}[x] + \int\limits_{\alpha}^{t} \mathrm{d}_i[K](t,s)x(s)ds = \mathrm{d}_i[f],$$

где

$$D_i[\mathbf{A}, K] = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} O_j & \mathcal{M}_i[A_j(t)] & \tilde{O}_j \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{i} \mathcal{M}_i[\overline{K}_j(t)]\mathcal{E}_j, \quad (2.3)$$

где матрица $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_k & A_{k-1} & \ldots & A_0 \end{pmatrix}$, матрица $D_i[\mathbf{A}, K]$ имеет размерность $[(i+1)n \times (i+k+1)n]$, нулевые матрицы $O_j, \tilde{O}_j$ имеют размерности $[(i+1)n \times jn]$, $[(i+1)n \times (k-j)n]$, $j = \overline{0,k}$, соответственно, $\overline{K}_j(t) = \partial K^j(t,s)/\partial t^j|_{t=s}$, $\mathcal{E}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{n(i+1-j)} & 0 \end{pmatrix} - (n_i \times n_i)-$матрицы, $n_i = n[i+2]$.

Ниже мы будем использовать разбиение матрицы (2.3) на блоки

$$D_i[\mathbf{A}, K] = \left(\tilde{B}_i(t) \ \ \Gamma_i[\mathbf{A}, K]\right), \quad (2.4)$$

где $\Gamma_i[\mathbf{A}, K]$—блочно-треугольная квадратная матрица с блоками $A_k(t)$ на диагонали.

3. Теоремы существования в аналитическом случае

В разделе сформулированы утверждения о разрешимости систем (1.3), (1.6) и начальных задач (1.3), (1.4).

Теорема 1. *Пусть для системы (1.3) выполнены условия:*
1) $A_i(t) \in \mathbf{C}^A(T),\ i = \overline{0,k},\ K(t,s) \in \mathbf{C}^A(T \times T),\ f(t) \in \mathbf{C}^l(T)$*;*
2) индекс оператора $\Lambda_1 + V$ *равен* $l < \infty$*;*
3) $\operatorname{rank} \Upsilon_{l-1} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix}\Upsilon_{l-1} & \mathrm{d}_{l-1}[f](\alpha)\end{pmatrix},\ \Upsilon_{l-1} = D_{l-1}[\mathbf{A}, K](\alpha).$

Тогда найдутся $(n \times d)$*-матрица* $X_d(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ *и* $(n \times n)$*-матрицы* $K_0(t,s) \in \mathbf{C}^A(T \times T)$, $C_j(t) \in \mathbf{C}^A(T),\ j = \overline{0, l-k}$ *такие, что любая линейная комбинация*

$$x(t,c) = X_d(t)c + \psi(t),\ t \in T, \tag{3.1}$$

$$\psi(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} K_0(t,s)f(s)ds + \sum_{j=0}^{l-k} C_j(t)(d/dt)^j f(t),\ l-k \geq 0,$$

$$\psi(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} K_0(t,s)f(s)ds,\ l-k < 0,$$

где c*—произвольный вектор из* $\mathbf{R}^d$*, является решением на системы (1.3) и на отрезке* T *нет других решений.*

Доказательство. Введем обозначение $\zeta = \begin{pmatrix}x^\top & (x^{(1)})^\top & \dots & (x^{(k-1)})^\top\end{pmatrix}^\top$. Тогда мы можем поставить в соответствие системе (1.3) ИДУ первого порядка

$$\begin{pmatrix} E_\nu & 0 \\ 0 & A_k \end{pmatrix} \zeta^{(1)} + \begin{pmatrix} 0 & -E_\nu \\ A_0 & \tilde{A} \end{pmatrix} \zeta + \int\limits_{\alpha}^{t} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K(t,s) & 0 \end{pmatrix} \zeta(s)ds = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где $t \in T,\ \nu = (k-1)n,\ \tilde{A} = \begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \dots & A_{k-1}\end{pmatrix}$. Для ИДУ (3.2) определен ЛРО вида $\operatorname{diag}\{E_\nu, \tilde{\Lambda}_l\}$. Из [1] следует, что при этом условии существует решение типа Коши ДАУ (3.2) вида

$$\zeta(t,c) = \mathcal{X}_d(t)c + \int\limits_{\alpha}^{t} \mathrm{K}(t,s)f(s)ds + \sum_{j=0}^{l-1} \mathcal{C}_j(t) f^{(j)}(t),\ t \in T, \tag{3.3}$$

где $\mathcal{X}_d(t)-(kn\times d)$-матрица, и $\mathrm{K}(t,s)$, $\mathcal{C}_j(t)-(kn\times n)$-матрицы. В силу связи $(k-2)!x=\int\limits_{\alpha}^{t}(t-s)^{k-2}x^{(k-1)}(s)ds+\sum\limits_{j=0}^{k-1}\tilde{c}_jt^j$, где $k\geq 2$, $\tilde{c}_j-$некоторые постоянные вектора, вида вектор-функции ζ следует равенство (3.1). □

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 для разрешимости системы (1.3) при любом свободном члене* $f(t)\in\mathbf{C}^l(T)$ *необходимо и достаточно выполнения условия* $\operatorname{rank}\Upsilon_{l-1}=nl$.

Теорема 2. *Пусть 1) для системы (1.3) выполнены условия теоремы 1, причем* $\operatorname{rank}\Upsilon_{l-1}=nl$*; 2) в системе (1.6)* $\mathrm{K}(t,s)\in\mathbf{C}^l(T\times T)$.

Тогда система (1.6) разрешима при всех λ *кроме может быть счетного множества значений* $\{\lambda_i,\ i=0,1,2,\cdots\}$ *и ее общее решение при* $\lambda\neq\lambda_i$ *имеет структуру вида*

$$z(t,c)=Z_d(t)c+g(t),\ t\in T, \tag{3.4}$$

где $Z_d(t)=(E_n+\lambda\mathbf{W})X_d(t)$, $g(t)=(E_n+\lambda\mathbf{W})\psi(t)$, $\mathbf{W}-$*некоторый оператор Фредгольма.*

Доказательство. Перепишем систему (1.6) в виде $(\Lambda_k+V)z=-\lambda\Phi z+f$: $\sum\limits_{i=0}^{k}A_i(t)z^{(i)}(t)=w(t),\ t\in T$, где $w(t)=-\lambda\int\limits_{\alpha}^{\beta}\mathrm{K}(t,s)z(s)ds+f(t)$. Используя формулу обращения (3.1), выпишем выражение:

$$z(t,c)=X_d(t)c+\int_{\alpha}^{t}K(t,s)w(s)ds+\sum_{j=0}^{l-k}C_j(t)w^{(j)}(t),\ t\in T. \tag{3.5}$$

В силу того что произведение операторов Вольтерра и Фредгольма является оператором Фредгольма, мы получим систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$z(t)=\lambda\int_{\alpha}^{\beta}W(t,s)z(s)ds+\nu(t), \tag{3.6}$$

где $\int_{\alpha}^{\beta}W(t,s)z(s)ds=$
$=\int_{\alpha}^{t}\left[K(t,s)\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{K}(s,\tau)z(\tau)d\tau\right]ds+\sum\limits_{j=0}^{l-k}\int\limits_{\alpha}^{\beta}C_j(t)[\partial^j\mathrm{K}(t,s)/\partial t^j]z(s)ds$,

$\nu(t)=X_d(t)c+\int_{\alpha}^{t}K(t,s)f(s)ds+\sum\limits_{j=0}^{k-1}C_j(t)f^{(j)}(t)$. Для системы (3.6) кроме некоторого (не более чем счетного множества $\{\lambda_i,\ i=0,1,2,\cdots\}$) известна [5] формула обращения

$$z(t)=(E_n+\lambda\mathbf{W})\nu(t)=\nu(t)+\lambda\int_{\alpha}^{\beta}\tilde{W}(t,s,\lambda)\nu(s)ds, \tag{3.7}$$

где $\tilde{W}(t,s,\lambda)-$резольвентное ядро для уравнения (3.6). Из формулы (3.7) вытекает справедливость утверждения. □

Лемма 1. *Начальная задача (1.3), (1.4) в условиях теоремы 1 имеет решение $x(t) \in \mathbf{C}^k(T)$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*
1) система $Y_{k-1}(\alpha)c = \Psi_{k-1}(\alpha) - \bar{a}$ разрешима относительно c;
2) $\operatorname{rank} \Upsilon_{l-1}(\alpha) = \{\operatorname{rank} \Upsilon_{l-1}(\alpha)|\Phi_{l-1}(\alpha) - \tilde{B}_{l-1}(\alpha)\bar{a}\}$,
и это решение единственно. Здесь
$Y_{k-1}(t) = \mathrm{d}_{k-1}[X_d(t)]$,
$\Psi_{k-1}(t) = \mathrm{d}_{k-1}[\psi(t)],\ \Phi_{l-1}(t) = \mathrm{d}_{l-1}[f(t)],\ \Upsilon_{l-1}(t) = \Gamma_{l-1}[\mathbf{A}(t)]$,
$\bar{a} = (a_1^\top\ a_2^\top\ ...\ a_{k-1}^\top)^\top$.

Приведем алгоритм вычисления индекса и матричных коэффициентов ЛРО.

Лемма 2. *Если, начиная с некоторого $i = l$, справедливы равенства*

$$\operatorname{rank} \Gamma_i[\mathbf{A},K](t) = const,\ \Gamma_i^+[\mathbf{A},K](t)\Gamma_i[\mathbf{A},K](t) = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & Z_{22}(t) \end{pmatrix},\ t \in T,$$

где $Z_{22}(t)-$некоторый блок подходящей размерности, то l равно индексу системы (1.3), причем первые n строк матрицы $\Gamma_l^+[\mathbf{A},K](t)$, разбитые на $(n\times n)$-блоки, можно принять в качестве коэффициентов ЛРО.

Доказательство. Согласно [9], существует матрица $\Gamma_i^+[\mathbf{A},K]$ той же гладкости что и исходная матрица. Разобьем первые n строк матрицы $\Gamma_i^+[\mathbf{A},K]$ на $(n\times n)-$блоки и обозначим их символами $(W_0\ W_1\ \dots\ W_l)$. Если в продолженной системе $D_l[\mathbf{A},K]\mathrm{d}_{l+k}[x] + \int\limits_\alpha^t \mathrm{d}_l[K](t,s)x(s)ds = \mathrm{d}_l[f]$ умножить блочные строки на блоки W_j с соответствующими номерами и сложить их, то получим с учетом разбиения (2.4) строку, состоящую из матриц $\tilde{A}_{j,l}$ в определении 3, где $\tilde{A}_{k,l} = E_n$. □

4. Системы ИДУ с ядрами в виде свертки

В разделе рассматривается система уравнений вида

$$(\Lambda_k + V)x := \sum_{i=0}^{k} \mathrm{A}_i x^{(i)}(t) + \int_\alpha^t K(t-s)x(s)ds = f,\ t \in T, \qquad (4.1)$$

где A_i-матрицы с постоянными элементами, $K(t-s)-$ядро, зависящее от разности аргументов. Любую систему (1.3) заменой $x^{(k)}(t) = u(t)$

можно свести к системе интегральных уравнений вида

$$(\Lambda_0+\mathcal{V})u:=A_k(t)u(t)+\int_\alpha^t \tilde{K}(t,s)u(s)ds=\tilde{f}(t),\ t\in T, \tag{4.2}$$

где

$$\tilde{K}(t,s)u(s)=\sum_{j=0}^{k-1}\varpi_j A_j(t)(t-s)^{k-j}u(s)+K(t,s)\int_\alpha^t \varpi_{m-1}(t-s)^{m-1}u(s)ds,$$

$\tilde{f}(t)=f(t)-\sum\limits_{i=0}^{k-1}\sum\limits_{j=0}^{k-1}\left(\varpi_{i-j}c_{i-j}t^{i-j}+\cdots c_1t+c_0\right)A_i(t),\, c_{k-1},\ c_{k-2},\ \cdots c_0-$ произвольные вектора из $\mathbf{R}^n$, $\varpi_j=1/j!$. Такие уравнения при выполненном условии (1.5) принято называть интегро-алгебраическими уравнениями (ИАУ). Для системы (4.1) уравнение (4.2) представляет ИАУ с ядром свертки

$$(\hat{\Lambda}_0+\hat{\mathcal{V}})x:=\mathrm{A}_kx(t)+\int_\alpha^t \hat{K}(t-s)x(s)ds=\tilde{f}(t),\ t\in T, \tag{4.3}$$

Рассмотрим общий случай ИАУ с ядром типа свертки

$$(\Lambda_0+\mathcal{V})z:=Az(t)+\int_\alpha^t K(t-s)z(s)ds=\psi(t),\ t\in T, \tag{4.4}$$

Здесь матрицы $D_i[\mathbf{A},K],\ \Gamma_i[\mathbf{A},K]$ из формул (2.4) совпадают, причем

$$\Gamma_i[A,K]=\begin{pmatrix} A & 0 & ... & 0\\ K(0) & A & ... & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ K^{(i-1)}(0) & K^{(i-2)}(0) & ... & A\end{pmatrix},$$

и справедливо следующее утверждение, которое представляет компиляцию результатов из работы [15].

Теорема 3. *Пусть для системы (4.4) выполнены условия:*
1) $\psi(t)\in\mathbf{C}^l(T),\ K(\sigma)\in\mathbf{C}^{2l}(T)$*;*
2) существует ЛРО с постоянными коэффициентами порядка l*;*
3) $\mathrm{rank}\Gamma_{l-1}=\mathrm{rank}\left(\Gamma_{l-1},\mathbf{d}_{l-1}[\psi](\alpha)\right)$.
Тогда
1) коэффициенты ЛРО можно вычислять согласно лемме 2;
2) система (4.3) имеет единственное решение вида

$$z(t)=\sum_{j=0}^{l}S_j\psi^{(j)}(t)+\int_\alpha^t K_1(t-s)\psi(s)ds+\sum_{j=0}^{k}W_j(t)\psi^{(j)}(\alpha)\in\mathbf{C}(T)$$

где $S_j,\ W_j(t)$*−некоторые* $(n\times n)$*-матрицы,* $K_1(\sigma)$*−некоторая* $(n\times n)$*-непрерывная матрица;*
3) при аналитическом ядре $K(\sigma)$ *справедлива альтернатива:*

$$\dim\ker(\Lambda_0+V)=0,$$

либо существует оператор $\tilde\Lambda_l$ *из определения 3 и* $\nu\geq 1$.

Из этой теоремы и формулы (4.2)вытекает такое

Следствие 2. *При аналитическом ядре* $K(\sigma)$ *справедлива для ИДУ (4.1) альтернатива:* $\dim\ker(\Lambda_0+V)<\infty$ *либо существует оператор* $\tilde\Lambda_l$ *из определения 3 и* $n-\nu\geq 1$.

5. Матричные многочлены и теоремы существования

Начиная с конца 70-х гг. прошлого века получен ряд признаков разрешимости ДАУ на основе изучения свойств соответствующих им матричных многочленов. Это направление развивается, в частности, ввиду трудностей исследования методом продолженных систем ИДУ с ядрами со слабой особенностью.

Определение 7. *Ненулевой многочлен* $\det[\lambda A(t)+B(t)]$, *где где* $A(t)$, $B(t)$*− квадратные матрицы,* λ*− скалярный параметр (в общем случае комплексный) удовлетворяет критерию «ранг – степень» на* T*, если:*

$$1.\ \mathbf{r}[A(t)]=r;\quad 2.\det[\lambda A(t)+B(t)]=\mathbf{a}_0(t)\lambda^r+\dots,\ \mathbf{a}_0(t)\neq 0\ \forall t\in T.$$

На основе работ [10], [11] сформулируем такое утверждение.

Лемма 3. *Если в системе* $\Lambda_k x=f,\ t\in T$*, матрицы* $A_j(t)\in\mathbf{C}^1(T)$, $j=\overline{0,k}$*, то это ДАУ имеет индекс 1 тогда и только тогда, когда многочлен* $\det[\lambda A_k(t)+A_{k-1}(t)]$ *удовлетворяет критерию «ранг-степень» на* T*. В формуле (3.1) параметр* $d=(k-1)n+r$.

Более того, если матрицы $\tilde A_i(t)\in\mathbf{C}^1(T),\ i=\overline{0,k}$ *и справедливы оценки и равенство*

$$\|A_i(t)-\tilde A_i(t)\|\leq\varepsilon,\ \mathrm{rank}\tilde A_k(t)=\mathrm{rank}A_k(t)=r\ \forall t\in T,\ \varepsilon\in[0,\ \epsilon_0],$$

то, начиная с некоторого ε_0*, многочлен пучка* $\det[\lambda\tilde A_k(t)+\tilde A_{k-1}(t)]$ *удовлетворяет критерию «ранг-степень» на* T *и справедлива оценка* $\|\mathbf{a}_0(t)-\tilde{\mathbf{a}}_0(t)\|_{\mathbf{C}(T)}\leq\kappa\varepsilon,\ \kappa=const>0$.

Здесь $\|A(t)\|$−норма матрицы, согласованная с нормой вектор-функций в метрике $\mathbf{C}(T)$.

Следствие 3. *В условиях леммы 3 система ИДУ*

$$(\Lambda_k + \mathcal{V})x = f,\ t \in T,\ \mathcal{V}x = \int_{\alpha}^{t} (t-s)^{-\gamma} K(t,s)x(s)ds, \tag{5.1}$$

где $K(t,s) \in \mathbf{C}^1(T \times T), f(t) \in \mathbf{C}^1(T),\ 0 < \gamma < 1$, *разрешима и ее общее решение имеет вид (3.1), причем*

$$\psi(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} K_0(t,s)f(s)ds + C_0(t)f(t),\ k=1,\ \psi(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} K_0(t,s)f(s)ds,\ k \geq 2.$$

Из леммы 3 следует, что в этих условиях малые возмущения входных данных ДАУ $\Lambda_k x = f,\ t \in T$, в метрике $\mathbf{C}(T)$ не меняют тип структуры пучка и структуры общего решения ДАУ. В [14] доказана теорема о разрешимости системы $\Lambda_k x = f,\ t \in T$, на основе исследования свойств многопараметрических матричных многочленов. Можно доказать аналог следствия 3 для системы (5.1).

Установим связи между исследованиями на основе продолженных систем и матричных многочленов (см., например, [13]). Пусть выполнены условия теоремы 3. Образуем цепочку равенств

$$[E + (d/dt)S_{i-1}](\Lambda_{0,i-1} + \mathcal{V}_{i-1})y = (\Lambda_{0,i} + \mathcal{V}_i)y,\ y \equiv y(t) \in \mathbf{C}^l(T), \tag{5.2}$$

где в соответствующих операторах $A_i = A_{i-1} + S_{i-1}K_{i-1}(0),\ K_i(\sigma) = K_{i-1}(\sigma) + S_{i-1}K'_{i-1}(\sigma),\ i = 0,1,\cdots,\ S_{i-1} = E_n - A_{i-1}A^{+}_{i-1},\ A_0 = A,\ K_0(\sigma) = K(\sigma)$. Очевидно, что через l шагов мы получим оператор $\Lambda_{0,l} + \mathcal{V}_l$, у которого $\det\ A_l \neq 0$ и согласно формулам (5.2) ЛРО мы можем выбрать в виде произведения $A_l^{-1}\prod_{i=0}^{l-1}[E + (d/dt)S_i]$.

Нам потребуется такое понятие. Поставим в соответствие набору постоянных $(n \times n)$-матриц $M_\mu, M_{\mu-1}, \ldots, M_0,\ \mu \geq 1$, матричный многочлен $\mathrm{M}(\lambda) = \sum_{i=0}^{\mu} \lambda^i M_i$.

Определение 8. *Матричный многочлен* $\mathrm{M}_\mu(\lambda)$ *удовлетворяет доминантному свойству (ДС), если выполнено неравенство*

$$\deg\det\ \mathrm{M}_\mu(\lambda) \geq \mu \cdot \mathrm{rank} M_\mu.$$

Построим по уравнению (4.1) матричный многочлен

$$\mathrm{M}_i(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} \lambda^{j+i}\mathrm{A}_j + \lambda^{(i-1)}K(0) + \cdots + K^{(i-1)}(0).$$

Лемма 4. *ЛРО для системы (4.1), в частности и для системы (4.4), определен тогда и только тогда, когда для некоторого* $i = 0,1,2,\cdots$, *матричный многочлен* $\mathrm{M}_i(\lambda)$ *удовлетворяет ДС.*

ЛРО для системы (4.1) можно построить в виде произведения дифференциальных операторов первого порядка.

Список литературы

1. Банг Н. Д. О некоторых свойствах вырожденных систем линейных интегро-дифференциальных уравнений. I / Н. Д. Банг, В. Ф. Чистяков, Е. В. Чистякова // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2015. – Т. 11. – С. 13–27.
2. Бояринцев Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Е. Бояринцев. – Новосибирск : Наука, 1980.
3. Васильев В. В. К вопросу о решении задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений / В. В. Васильев // Изв. вузов. Математика. – 1961. – № 4. – С. 8–24.
4. Васильев В. В. Об условиях А. И. Некрасова в теории линейных интегро-дифференциальных уравнений одного класса / В. В. Васильев // Изв. вузов. Матем. – 1963. – № 4. – С. 29—38.
5. Краснов М. Л. Интегральные уравнения: введение в теорию / М. Л. Краснов. – М. : Наука, 1975.
6. Сидоров Н. А. К столетию со дня рождения профессора В. В. Васильева / Н. А. Сидоров // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2007. – № 1. – С. 1-3.
7. Фалалеев М. В. Обобщенные решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Тр. ИММ УрО РАН. – 2012. – Т. 18, № 4. – С. 286–297.
8. Федоров В. Е. Исследование вырожденных эволюционных уравнений с памятью методами теории полугрупп операторов / В. Е. Федоров, Л. В. Борель // Сиб. мат. журн. – 2016. – Т. 57, № 4. – С. 899–912.
9. Чистяков В. Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром / В. Ф. Чистяков. – Новосибирск : Наука. Сиб. издат. фирма РАН, 1996.
10. Чистяков В. Ф. Об одной теореме существования решений у сингулярных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / В. Ф. Чистяков // Числен. методы механики сплошной среды. – 1981. – Т. 12, № 6. – С.135-149.
11. Чистяков В. Ф. О связи свойств вырожденных систем и задач вариационного исчисления : препринт №5 ИрВЦ СО АН СССР / В. Ф. Чистяков. – Иркутск, 1989. – 29 с.
12. Brunner H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations / H. Brunner. – N. Y. : Cambridge University Press, 2004.
13. Bulatov M. V. The properties of differential-algebraic systems and their integral analogs : Preprint / M. V. Bulatov, V. F. Chistyakov. – Memorial University of Newfoundland, September, 1997. – 35 p.
14. Bulatov M. V. Application of Matrix Polynomials to the Analysis of Linear Differential-Algebraic Equations / M. V. Bulatov, Ming-Gong Lee // Differential Equations. – 2008. – Vol. 44, N 10. – P. 1353—1360.
15. Chistyakov V. F. On some properties of systems of Volterra integral equations of the fourth kind with kernel of convolution type / V. F. Chistyakov // Math. Notes. – 2006. – Vol. 80, N 1. – P. 109—113.
16. Chistyakova E. V. Regularizing Properties of Difference Schemes for Singular Integral Differential Equations / E. V. Chistyakova // Applied Numerical Mathematics. – 2012. – Vol. 62. – P. 1302–1311.
17. Silverman L. M. Generalizations of theorem of Dolezal / L. M. Silverman, R. S. Bucy // Math. System Theory. – 1970. – N 4. – P. 334–339.

Булатов Михаил Валерьянович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134 тел.: (3952)453018 (e-mail: mvbul@icc.ru)

Чистяков Виктор Филимонович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134 тел.: (3952)453029 (e-mail: chist@icc.ru)

M. V. Bulatov, V. F. Chistyakov

On Some Results of Investigation of Singular Systems of Integro-Differential Equations Obtained by Yu. Ye. Boyarintsev Research Group

Abstract. This paper is dedicated to the 110th anniversary of the dean of the mathematical faculty of Irkutsk State University Vladimir Vladimirovich Vasiliev. We consider statements of problems that arose when developing the theory and numerical methods for solving differential algebraic equations (DAEs) and that were studied and outlined in the works by Yu.Ye. Boyarintsev. The solution of such problems required expansion of the original field of research and incorporated investigations of systems of integral differential equation (IDEs)s as well as systems of Volterra equations with an identically singular matrix at the leading part. Nowadays such systems of integral equations are commonly called integral algebraic equations (IAEs). The results obtained in this area formed the basis for creating efficient numerical methods for IDEs, IAEs, and DAEs. This paper focuses on a general case of linear systems of IDEs with an identically singular matrix multiplying the higher derivative of the desired vector-function. We also study IDEs perturbed by the Fredholm operators and investigate the structure of general solutions to such systems. Our study employs the approach based on the analysis of extended systems and properties of matrix polynomials that in a certain way correspond to the IDEs under scrutiny.

Keywords: integral differential equations, degenerate, Volterra operator, Fredholm operator, index.

References

1. N.D. Bang, V.F. Chistyakov, E.V. Chistyakova. On some properties of systems of singular integral differential equations. I. *Izvestiya Irk. Gos. Univ., Ser. Matematika*, 2015, vol. 11, pp. 13-27.
2. Boyarintsev Yu.Ye. *Regulyarnye i singulyarnye sistemy lineinykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* [Regular and singular systems linear of ordinary differential equations] Novosibirsk, Nauka Publ., 1980. 224 p. (in Russian).
3. Vasil'ev V.V. K voprosu o reshenii zadachi Koshi dlya odnogo klassa linejnyh integro-differencial'nyh uravnenij [On the solution of the Cauchy problem for a class of linear integro-differential equations] . *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1961, no 4, pp. 8–24. (in Russian)
4. Vasil'ev V.V. Ob usloviyah A. I. Nekrasova v teorii linejnyh integro-differencial'nyh uravnenij odnogo klassa [On the conditions of A.I. Nekrasov in the theory of linear

integro-differential equations of a certain class]. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1963, no 4, pp. 29–38. (in Russian)

5. Krasnov M.L. *Integral'nye uravnenija* [The Integral Equations]. Moscow, Nauka, 1975. (in Russian)
6. Sidorov N.A. K stoletiyu so dnya rozhdeniya professora V. V. Vasil'eva [The 100th anniversary of Professor V.V. Vasil'ev] (in Russian). *Izvestiya Irk. Gos. Univ., Ser. Matematika*, 2007, vol. 1, pp. 1-3.
7. Falaleev M.V., Orlov S.S. Obobshchennye resheniya vyrozhdennyh integro-differencial'nyh uravnenij v banahovyh prostranstvah i ih prilozheniya [Degenerate integro-differential operators in Banach spaces and their applications]. Trudy Instituta Matematiki I Mekhaniki, 2012, vol. 18, no 4, pp. 286–297. (in Russian)
8. Fedorov V.E., Borel L.V. Study of degenerate evolution equations with memory by operator semigroup methods. *Siberian Mathematical Journal*, 2016, vol. 57, no 4, pp. 704–714. https://doi.org/10.1134/S0037446616040121
9. Chistyakov V.F. *Algebro-differentsialnii operatori s konechnomernim yadrom* [Algebraic differential operators with a finite-dimensional kernel] . Novosibirsk, Nauka, Siberian Publishing House, 1996. 279 p. (in Russian)
10. Chistyakov V.F. Ob odnoj teoreme sushchestvovaniya reshenij u singulyarnyh linejnyh sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij [An existence theorem for singular linear systems of ordinary differential equations] . *Numerical methods of continuum mechanics*, 1981, vol. 12, no 6, pp. 135-149. (in Russian)
11. V.F. Chistyakov. *O svyazi svojstv vyrozhdennyh sistem i zadach variacionnogo ischisleniya* [On the connection between the singular systems and variational calculus problems]. Preprint N 5. Irkutsk Computing Center, Siberian Branch of Academy of Sciences of the USSR, 1989. 29 p. (in Russian)
12. Chistyakov V.F. On some properties of systems of Volterra integral equations of the fourth kind with kernel of convolution type. *Math. Notes*, 2006, vol. 80, no 1, pp. 109–113. https://doi.org/10.1007/s11006-006-0114-7
13. Brunner H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations. New York, Cambridge University Press, 2004. https://doi.org/10.1017/CBO9780511543234
14. Bulatov M.V., Chistyakov V.F. The properties of differential-algebraic systems and their integral analogs, Preprint, Memorial University of Newfoundland, September 1997.
15. Bulatov M.V., Ming-Gong Lee. Application of Matrix Polynomials to the Analysis of Linear Differential-Algebraic Equations. *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no 10, pp. 1353–1360. https://doi.org/10.1134/S0012266108100017
16. Chistyakova E.V. Regularizing Properties of Difference Schemes for Singular Integral Differential Equations. *Applied Numerical Mathematics*, 2012, vol. 62, pp. 1302-1311. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2012.06.006
17. Silverman L.M., Bucy R.S. Generalizations of theorem of Dolezal. *Math. System Theory*, 1970, no 4, pp.334-339. https://doi.org/10.1007/BF01704077

Bulatov Mikhail Valer'janovijch, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Post Box 292, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033,
tel: (3952)427100 (e-mail: `mvbul@icc.ru`)

Chistyakov Victor Philimonovich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, tel.: 8(3932)453029
(e-mail: `chist@icc.ru`)