Серия «Математика»
2017. Т. 20. С. 61—74

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.926, 517.977.1
MSC 34A09, 93B07
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.20.61

Наблюдаемость в классе функций Чебышева систем дифференциально-алгебраических уравнений*

П. С. Петренко
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН

Аннотация. Рассматриваются линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, не разрешенные относительно производной искомой вектор-функции и тождественно вырожденные в области определения. Такие системы называются системами дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ). Мерой неразрешенности ДАУ относительно производных служит целочисленная величина, называемая индексом. Допускается произвольно высокий индекс, не превышающий порядок рассматриваемой системы. Анализ проводится в предположении существования структурной формы с разделенными дифференциальной и алгебраической подсистемами. Эта структурная форма эквивалентна искомой системе в смысле решений, а оператор, преобразующий исходную систему ДАУ к этой структурной форме, обладает левым обратным оператором. Построение структурной формы носит конструктивный характер и не использует замену переменных, при этом автоматически решается проблема согласования начальных условий. Этот подход использует понятие r-продолженной системы, где r — индекс неразрешенности. Необходимым и достаточным условием существования структурной формы является наличие в матрице, описывающей r-продолженную систему неособенного минора порядка $n(r+1)$, где n — размерность рассматриваемой системы ДАУ. Исследуется наблюдаемость системы ДАУ по заданному скалярному выходу. Задача наблюдаемости состоит в нахождении вектора состояния системы на основании неполных данных о его компонентах, заданных с помощью выходной функции. В качестве класса функций разрешающих операций, т. е. решающих задачу наблюдаемости, кроме кусочно-непрерывных рассматривается класс обобщенных функций Чебышева. Получено достаточное условие R-наблюдаемости (наблюдаемости в пределах множества достижимости) линейных нестационарных систем ДАУ в классе многочленов Чебышева. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрен пример.

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00101) и Комплексной программы фундаментальных научных исследований СО РАН № II.2.

Ключевые слова: наблюдаемость, дифференциально-алгебраические уравнения, функции Чебышева.

1. Введение

Рассматривается система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = 0, \quad t \in I = [0, +\infty), \tag{1.1}$$

с наблюдаемым скалярным выходом

$$y(t) = d^{\top}(t)x(t). \tag{1.2}$$

Здесь $A(t), B(t)$ — заданные $(n \times n)$-матрицы; $x(t)$ — искомая, а $d(t)$ — заданная n-мерные вектор-функции; $\top$ — символ транспонирования. Предполагается, что $\det A(t) \equiv 0$. Системы вида (1.1) называются системами дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ). Под мерой неразрешенности ДАУ (1.1) относительно производной искомой вектор-функции понимается целочисленная величина $r : 0 \leq r \leq n$, называемая индексом [13; 11, с. 16].

В теории ДАУ используются различные понятия наблюдаемости. Задача наблюдаемости (см., напр., [17]) впервые рассматривалась для стационарных систем ДАУ (см. [2; 19]). В книге [15] для линейных ДАУ с постоянными коэффициентами и регулярным матричным пучком вводятся важнейшие понятия R-наблюдаемости (наблюдаемости в пределах множества достижимости) и импульсной наблюдаемости. В работе [18] для нелинейных систем ДАУ получены условия локальной R-наблюдаемости. В работе [10] получены условия R-наблюдаемости и доказан аналог критерия Калмана для линейных нестационарных систем ДАУ произвольно высокого индекса неразрешенности. Различные типы наблюдаемости линейных ДАУ рассматривались, в частности, в [17; 14; 16]. При этом во всех приведенных работах исследуется наблюдаемость в классе кусочно-непрерывных функций.

В работе [4, с. 203] исследуется наблюдаемость в классе функций Чебышева систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), разрешенных относительно производной (в нормальной форме).

В данной работе исследуется наблюдаемость системы (1.1) по выходу (1.2). Задача наблюдаемости состоит в нахождении вектора состояния $x(t)$ на основании неполных данных о его компонентах, которые определяются соотношением (1.2). Анализ показывает, что класс кусочно-непрерывных функций чрезмерно широк и что решение задачи наблюдаемости может быть достигнуто в существенно более узком множестве непрерывных функций, зависящих от некоторого конечномерного параметра. К числу таких множеств относятся системы функций Чебышева. Тем самым в качестве класса функций разрешающих операций, т. е. решающих задачу наблюдаемости, кроме кусочно-непрерывных функций будем рассматривать класс обобщенных функций Чебышева.

Анализ проводится в предположении существования структурной формы с разделенными «дифференциальной» и «алгебраической» подсистемами, которая эквивалентна исходной системе в смысле решений [9; 10].

2. Эквивалентная структурная форма

Для системы (1.1) определим матрицы размеров $nr \times nr$, $n(r+1) \times n(r+1)$ и $n(r+1) \times n(r+2)$ соответственно

$$
\mathrm{D}_{r,z}(t) = \\
= \begin{pmatrix} C_1^1 A(t) & O & \dots & O \\ C_2^1 A'(t) + C_2^2 B(t) & C_2^2 A(t) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^1 A^{(r-1)}(t) + C_r^2 B^{(r-2)}(t) & C_r^2 A^{(r-2)}(t) + C_r^3 B^{(r-3)}(t) & \dots & C_r^r A(t) \end{pmatrix},
$$

$$
\mathrm{D}_{r,y}(t) = \begin{pmatrix} C_0^0 A(t) & O \\ \begin{pmatrix} C_1^0 A'(t) + C_1^1 B(t) \\ \vdots \\ C_r^0 A^{(r)}(t) + C_r^1 B^{(r-1)}(t) \end{pmatrix} & \mathrm{D}_{r,z} \end{pmatrix}, \ \mathrm{D}_{r,x}(t) = \begin{pmatrix} \bar{B}_r & \mathrm{D}_{r,y} \end{pmatrix}.
$$

[1] Здесь и далее $C_i^j = \dfrac{i!}{j!(i-j)!}$ — биномиальные коэффициенты, $\bar{B}_r = \operatorname{colon}\big(B(t), B'(t), \dots, B^{(r)}(t)\big)$, O — нулевая матрица соответствующего размера.

Предположим, что для некоторого r $(0 \le r \le n)$ выполняется условие $\operatorname{rank} \mathrm{D}_{r,z}(t) = \rho = \mathrm{const} \ \ \forall t \in I$, и в матрице $\mathrm{D}_{r,x}(t)$ имеется неособенный для всех t минор $n(r+1)$-го порядка, включающий в себя ρ столбцов матрицы $\mathrm{D}_{r,z}$ и n первых столбцов матрицы $\mathrm{D}_{r,y}$. Такой минор назовем *разрешающим*.

Допустим, что известно, какие именно столбцы матрицы $\mathrm{D}_{r,x}(t)$ входят в разрешающий минор. Вычеркнем $n-d$ столбцов матрицы $\bar{B}_r$, которые не входят в упомянутый минор, где $d = nr - \rho$. После соответ-

[1] Эти обозначения введены, в частности, в [12; 8].

ствующей перестановки столбцов из $\mathrm{D}_{r,x}(t)$ получим матрицу

$$\Lambda_r(t) = \mathrm{D}_{r,x}(t)\ \operatorname{diag}\left(Q^{-1}\begin{pmatrix} O \\ E_d \end{pmatrix},\ Q^{-1}, \ldots, Q^{-1}\right)^2,$$

где E_d — единичная матрица порядка d, Q — $(n \times n)$-матрица перестановок[3].

Матрица Q^{-1} строится следующим образом. Обозначим $i_1, i_2, \ldots, i_d$ и $i_{d+1}, i_{d+2}, \ldots, i_n$ номера столбцов матрицы $\bar{B}_r$, которые соответственно входят и не входят в разрешающий минор. Будучи умноженной слева на $\bar{B}_r$, матрица Q^{-1} переставляет в матрице $\bar{B}_r$ каждый (i_{d+k})-й столбец $(k = \overline{1, n-d})$ на k-е место, а каждый (i_j)-й столбец $(j = \overline{1, d})$ на место с номером $n-d+j$. Матрица Q^{-1} обратима и состоит из нулей и n единиц, причем единице равны элементы с индексами (i_{d+k}, k) и $(i_j, n-d+j)$.

Теорема 1. *Пусть*
1) $A(t), B(t), U(t), u(t) \in \mathbf{C}^{2r+1}(I)$*;*
2) $\operatorname{rank}\mathrm{D}_{r,z}(t) = \rho = \mathrm{const}\ \ \forall t \in I$*;*
3) в матрице $\mathrm{D}_{r,x}(t)$ *имеется разрешающий минор;*
4) $\operatorname{rank}\mathrm{D}_{r+1,y}(t) = \operatorname{rank}\mathrm{D}_{r,y}(t) + n\ \ \forall t \in I$.

Тогда существует оператор

$$\mathcal{R} = R_0(t) + R_1(t)\frac{d}{dt} + \ldots + R_r(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^r \tag{2.1}$$

с непрерывными на I *коэффициентами* $R_j(t)$ $(j = \overline{0, r})$*, преобразующий ДАУ (1.1) к эквивалентной структурной форме*

$$x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) = 0, \tag{2.2}$$

$$x_2(t) + J_2(t)x_1(t) = 0, \quad t \in I, \tag{2.3}$$

где $\operatorname{colon}(x_1(t), x_2(t)) = Qx(t)$[4]*,*

$$\begin{pmatrix} J_2(t) & E_d \\ J_1(t) & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0(t) & R_1(t) & \ldots & R_r(t) \end{pmatrix} \bar{B}_r Q^{-1}, \tag{2.4}$$

причем все решения ДАУ (1.1) являются решениями системы (2.2), (2.3) и наоборот.

---

[2] Запись $\operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_s)$ обозначает квазидиагональную матрицу, на главной диагонали которой расположены блоки, перечисленные в скобках, остальные элементы — нулевые.

[3] О матрицах перестановок строк и столбцов см. в книге [5, с. 127–128].

[4] $\operatorname{colon}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Матрицы $R_j(t)$ находятся единственным образом по формуле

$$(R_0(t)\ \ R_1(t)\ \ \dots\ \ R_r(t)) = (E_n\ \ O\ \ \dots\ \ O)\ \Lambda_r^\top(t)\ \left(\Lambda_r(t)\Lambda_r^\top(t)\right)^{-1}.$$

Замечание 1. Несложно убедиться, что при ограничении $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^{r+i}(I)$ ($i = 1, 2, \dots$), коэффициенты оператора (2.1), а также элементы матриц $J_1(t), J_2(t)$ из системы (2.2), (2.3) принадлежат классу $\mathbf{C}^i(I)$.

Теорема 1 позволяет получить критерий существования и единственности решения задачи Коши системы (1.1). Пусть определены начальные условия

$$x(t_0) = z_0, \tag{2.6}$$

где $z_0 \in \mathbf{R}^n$ — заданный вектор, $t_0 \in I$.

Следствие 1. *Пусть выполнены все предположения Теоремы 1. Для того чтобы задача (1.1), (2.6) была разрешима при $t \geq t_0$ необходимо и достаточно выполнения равенства*

$$x_{2,0} + J_2(t_0)x_{1,0} = 0, \tag{2.7}$$

где $\operatorname{colon}(x_{1,0},\ x_{2,0}) = Qz_0$. *При этом, если решение задачи (1.1), (2.6) существует, то оно единственно.*

Начальные условия (2.6), удовлетворяющие соотношению (2.7), будем называть *согласованными* с системой (1.1).

Доказательства результатов этого раздела приведены в [9].

3. Наблюдаемость

Определение 1. *Система вещественных скалярных функций*

$$f_1(t),\ f_2(t), \dots, f_k(t), \tag{3.1}$$

определенных и непрерывных на отрезке $[a, b] \subset I$, называется системой Чебышева (или T-системой) порядка $k-1$ на этом отрезке, если любая линейная комбинация

$$p(t) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_j(t) = \alpha^\top f(t) \tag{3.2}$$

имеет не более $k-1$ корня на $[a, b]$. Здесь $\alpha = \operatorname{colon}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbf{R}^k$, $f(t) = \operatorname{colon}(f_1(t), \dots, f_k(t))$.

Следовательно, всякая система функций Чебышева линейно независима, однако не каждое множество непрерывных линейно независимых функций являются T-системой. Очевидно, что функции (3.1) образуют T-систему тогда и только тогда, когда определитель

$$\begin{vmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \dots & f_k(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & \dots & f_k(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(t_k) & f_2(t_k) & \dots & f_k(t_k) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля при любом наборе чисел t_j, удовлетворяющих условию $a \le t_1 \le t_2 \ldots \le t_k \le b$.

Если все функции $f_j(t)$ T-системы (3.1) умножить на непрерывную отличную от нуля для каждого $t \in [a,b]$ функцию $\phi(t)$, то снова получится T-система. Пусть $\chi(s)$ — непрерывная строго возрастающая на $[\alpha,\beta]$ функция, удовлетворяющая равенствам $\chi(\alpha) = a$, $\chi(\beta) = b$; тогда замена $t = \chi(s)$ преобразует T-систему (3.1) также в T-систему $f_1(\chi(s), \ldots, f_k(\chi(s))$ на этом же отрезке.

Если (3.1) есть система функций Чебышева порядка $n-1$, то для заданных различных точек $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}$ на $[a,b]$ существует многочлен (3.2), имеющий величины t_j своими корнями; кроме того, найдется один и только один многочлен $p(t)$, принимающий в фиксированных $k-1$ точках множества $[a,b]$ наперед указанные значения, не равные одновременно нулю.

Детальное изложение теории функций Чебышева с примерами можно найти в книгах [1; 6].

В условиях Теоремы 1 выходную функцию (1.2) перепишем в виде

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = d_1^\top(t)x_1(t) + d_2^\top(t)x_2(t), \tag{3.3}$$

где $(d_1^\top(t) \;\; d_2^\top(t)) = d^\top(t)Q^{-1}$, Q — матрица перестановок из (2.4).

Полная наблюдаемость системы (2.2) по выходу

$$y_1(t) = d_1^\top(t)x_1(t) \tag{3.4}$$

на отрезке $[t_0, t_1]$ означает [4, с. 188], что отображение $x_1(t) \to y_1(t)$ есть биекция пространства $\mathbf{R}^{n-d}$ на $Y_{[t_0,t_1]}$ ($Y_{[t_0,t_1]}$ — множество функций $y_1(t),\ t \in [t_0,t_1]$). Далее, говоря о T-системах и наблюдаемости, будем полагать, что отрезок $[t_0,t_1] \subseteq [a,b]$.

Для того чтобы сформулировать понятие полной наблюдаемости в классе многочленов Чебышева, следуя [7, с. 291], определим линейное отображение $y_1(t) \to \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} r(t)y_1(t)dt$, где $r(t)$ — некоторая непрерывная на $[t_0,t_1]$ функция. Пусть t пробегает отрезок $[t_0,t_1]$, а $x_1(t_0)$ — пространство $\mathbf{R}^{n-d}$, тогда $y_1(t, x_1(t_0)) = s^\top x_1(t_0)$ составляет множество

$Y_{[t_0,t_1]}$, где $s \in \mathbf{R}^{n-d}$ — любой ненулевой вектор. Тем самым функция $r(t)$ задает операцию на пространстве $Y_{[t_0,t_1]}$, вычисляющую по выходной функции $y_1(t, x_1(t_0))$ проекцию начального вектора $x_1(t_0)$ на направление s, если выполняется соотношение

$$\int_{t_0}^{t_1} r(t) y_1(t, x_1(t_0)) dt = s^\top x_1(t_0). \tag{3.5}$$

Определение 2. *[4, с. 214]. Система (2.2) вполне (полностью) наблюдаема по выходу (3.4) в классе функций Чебышева порядка $n-d-1$ на отрезке $[t_0, t_1]$, если для любого ненулевого $s \in \mathbf{R}^{n-d}$ найдется такая функция (3.2), что при $r(t) = p(t)$ $(k = n - d)$ справедливо соотношение (3.5) для любого начального условия $x_1(t_0) \in \mathbf{R}^{n-d}$.*

Приведем известный результат о наблюдаемости системы вида (2.2), (3.4) [4, с. 215]. Для этого для системы (2.2), (3.4) определим матрицу наблюдаемости

$$\mathcal{P}(t) = \mathrm{colon}(P_0(t),\ P_1(t), \ldots,\ P_{n-d-1}(t)),$$

где $P_0(t) = d_1^\top(t)$, $P_i(t) = -P_{i-1}(t) J_1(t) + P'_{i-1}(t)$, $i = \overline{1, n-d-1}$.

Теорема 2. *Пусть:*
1) $d_1(t) \in \mathbf{C}^{n-d-1}(I)$, $J_1(t) \in \mathbf{C}^{n-d-2}(I)$;
2) $\exists\, t_0 \in I : \operatorname{rank} \mathcal{P}(t_0) = n - d$.

Тогда существует момент времени $t_1 \in I$ $(t_1 > t_0)$ такой, что система (2.2) вполне наблюдаема по выходу (3.4) на отрезке $[t_0, t_1] \subset I$ в классе многочленов (3.2), формируемых с помощью функций Чебышева порядка $n - d - 1$.

Полная наблюдаемость в классе многочленов (3.2) для систем ДАУ в данной формулировке не имеет место ввиду того, что начальные данные (2.6) могут быть не согласованы, т. е. не будет выполняться соотношение (2.7). Если предположить, что соотношение (2.7) выполнено, мы придем к понятию наблюдаемости в пределах множества достижимости или R-наблюдаемости в классе функций Чебышева. Тогда можно сформулировать следующее.

Определение 3. *Система (1.1) R-наблюдаема по выходу (1.2) в классе функций Чебышева порядка $n - d - 1$ на отрезке $[t_0, t_1]$, если для любого ненулевого $l \in \mathbf{R}^n$ найдется такая функция (3.2), что при $r(t) = p(t)$ $(k = n - d)$ справедливо соотношение*

$$\int_{t_0}^{t_1} r(t) y(t, x(t_0)) dt = l^\top x(t_0) \tag{3.6}$$

для любого согласованного начального условия $x(t_0) \in \mathbf{R}^n$.

Определим аналог матрицы $\mathcal{P}(t)$

$$\overline{\mathcal{P}}(t) = \mathrm{colon}(\overline{P}_0(t),\ \overline{P}_1(t), \ldots,\ \overline{P}_{n-d-1}(t)),$$

где $\overline{P}_0(t) = d_1^\top(t) - d_2^\top(t)J_2(t_0)$, $P_i(t) = -P_{i-1}(t)J_1(t) + P'_{i-1}(t)$, $i = \overline{1, n-d-1}$.

Теорема 3. *Пусть*
1) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^{3r+n-d}(I)$, $d(t) \in \mathbf{C}^{n-d-1}(I)$*;*
2) выполнены предположения 2)–4) Теоремы 1;
3) $\exists\, t_0 \in I : \operatorname{rank} \overline{\mathcal{P}}(t_0) = n - d$.

Тогда существует момент времени $t_1 \in I$ $(t_1 > t_0)$ *такой, что система ДАУ (1.1) R-наблюдаема по выходу (1.2) на отрезке* $[t_0, t_1] \subset I$ *в классе многочленов (3.2), формируемых с помощью функций Чебышева порядка* $n - d - 1$ *на этом отрезке.*

Доказательство. Перепишем левую часть соотношения (3.6) с учетом (3.3)

$$\int_{t_0}^{t_1} p(t) y(t, x(t_0)) dt = \int_{t_0}^{t_1} p(t) \left[y_1(t, x_1(t_0)) + y_2(t, x_2(t_0))\right] dt. \tag{3.7}$$

Пусть определены согласованные в точке $t = t_0$ начальные условия вида (2.6). Тогда соотношение (3.7) с учетом (2.3) можно переписать как

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} p(t) \left[y_1(t, x_1(t_0)) + y_2(t, x_2(t_0))\right] dt = \\ &\qquad = \int_{t_0}^{t_1} p(t) \left[d_1^\top(t) - d_2^\top(t) J_2(t_0)\right] x_1(t_0) dt. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Правую часть равенства (3.6) запишем в виде

$$\begin{aligned} l^\top x(t_0) = l^\top Q^{-1} \mathrm{colon}(x_1(t_0), x_2(t_0)) = l_1^\top x_1(t_0) - l_2^\top J_2(t_0) x_1(t_0) = \\ = (l_1^\top - l_2^\top J_2(t_0)) x_1(t_0). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Тогда, из (3.8), (3.9) получим

$$\int_{t_0}^{t_1} p(t) \left[d_1^\top(t) - d_2^\top(t) J_2(t_0)\right] x_1(t_0) dt = (l_1^\top - l_2^\top J_2(t_0)) x_1(t_0). \tag{3.10}$$

Очевидно, что с помощью выражения $l_1^\top - l_2^\top J_2(t_0)$ за счет векторов l_1 и l_2 можно представить любой вектор из $\mathbf{R}^{n-d}$. Следовательно, из Теоремы 2 с учетом условия 3) следует, что существует функция (3.2) такая, что выполняется соотношение (3.10), а значит и

$$\int_{t_0}^{t_1} p(t) y(t, x(t_0)) dt = l^\top x(t_0)$$

для любого согласованного начального условия $x(t_0)$. Согласно Определению 3, это означает что система ДАУ (1.1), (1.2) R-наблюдаема в классе функций Чебышева порядка $n-d-1$ на отрезке $[t_0, t_1]$.

$\square$

4. Пример

Рассмотрим систему ДАУ

$$\begin{pmatrix} 1+\cos t & 1-\cos t & 1 \\ -\sin t\cos t & 1-\sin t & -\sin t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} -\cos t-\sin t & 1+\sin t+\cos^2 t & 0 \\ 1+\sin^2 t & -\cos t & 0 \\ \cos t & 1 & 1 \end{pmatrix} x(t) = 0, \tag{4.1}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & t \end{pmatrix} x(t), \tag{4.2}$$

где $t \in I$, $x(t) : I \to \mathbf{R}^3$ — искомая функция. Пусть определены начальные условия $x(0) = a_0$, $a_0 \in \mathbf{R}^3$.

Исследуем ДАУ (4.1) на R-наблюдаемость в классе функций Чебышева некоторого порядка. Для этого проверим выполнение предположений Теоремы 3.

Условие 1), очевидно, выполняется. Для проверки условия 2) построим матрицы

$$\mathrm{D}_{1,x} = \begin{pmatrix} \overline{B}_1 & \mathrm{D}_{1,y} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{D}_{2,y} = \begin{pmatrix} \mathrm{D}_{1,y} & & O \\ K_1 & K_2 & K_3 \end{pmatrix},$$

где

$$\overline{B}_1 = \begin{pmatrix} -\cos t-\sin t & 1+\sin t+\cos^2 t & 0 \\ 1+\sin^2 t & -\cos t & 0 \\ \cos t & 1 & 1 \\ \sin t-\cos t & \cos t-\sin(2t) & 0 \\ \sin(2t) & \sin t & 0 \\ -\sin t & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{D}_{1,y} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1+\cos t & 1-\cos t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos t\sin t & 1-\sin t & -\sin t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos t-2\sin t & 2\sin t+\cos^2 t+1 & 0 & 1+\cos t & 1-\cos t & 1 \\ 3\sin^2 t & -2\cos t & -\cos t & -\cos t\sin t & 1-\sin t & -\sin t \\ \cos t & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 2\sin t-3\cos t & 3\cos t-2\sin(2t) & 0 \\ 4\sin(2t) & 3\sin t & \sin t \\ -2\sin t & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} -\cos t - 2\sin t & 2\sin t + \cos^2 t + 1 & 0 \\ 3\sin^2 t & -2\cos t & -\cos t \\ \cos t & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 1+\cos t & 1-\cos t & 1 \\ -\cos t \sin t & 1-\sin t & -\sin t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $\operatorname{rank} \mathrm{D}_{1,z} = \rho = 2 \quad \forall t \in I$. Разрешающий минор включает в себя $\rho = 2$ столбцов матрицы $\mathrm{D}_{1,z}$, $n = 3$ первых столбцов матрицы $\mathrm{D}_{1,y}$ и 3-й столбец матрицы $\mathrm{D}_{1,x}$. Нетрудно убедиться, что выполняется и условие $\operatorname{rank} \mathrm{D}_{2,y} = \operatorname{rank} \mathrm{D}_{1,y} + n = 8$.

Таким образом, выполнены условия 1) и 2) Теоремы 3, при которых система (4.1) обладает эквивалентной в смысле решений формой. Найдем коэффициенты преобразующего оператора (2.1)

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & \cos t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos t \sin t - 1 \\ 0 & 0 & \sin t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt}.$$

Согласно формуле (2.5) получим

$$\begin{pmatrix} J_2(t) & E_1 \\ J_1(t) & O \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} \cos t & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1+\sin t & 0 \\ 1 & -\cos t & 0 \end{array} \right).$$

Следовательно, эквивалентная форма для ДАУ (4.1) будет иметь вид

$$x_1'(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1+\sin t \\ 1 & -\cos t \end{pmatrix} x_1(t) = 0, \tag{4.3}$$

$$x_2(t) + (\cos t \;\; 1)\, x_1(t) = 0, \tag{4.4}$$

а выходная функция (4.2) перепишется как

$$y(t) = (e^t \;\; 0)\, x_1(t) + t\, x_2(t),$$

где $x_1(t) \in \mathbf{R}^2, \;\; x_2(t) \in \mathbf{R}^1$.

Для проверки условия 3) Теоремы 3 построим матрицу $\overline{\mathcal{P}}(t)$

$$\overline{\mathcal{P}}(t) = \begin{pmatrix} \overline{P}_0(t) \\ \overline{P}_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t - t\cos t_0 & -1 \\ t + e^t - \cos t_0 & t\cos t \sin t - e^t(\sin t + 1) - 1 \end{pmatrix}.$$

Возьмем точку $t = 0$. Нетрудно убедиться, что $\operatorname{rank} \overline{\mathcal{P}}(0) = n - d = 2$. Таким образом выполнены все условия Теоремы 3, и существует точка $t_1 = \sigma > 0$ такая, что система (4.1) является R-наблюдаемой по выходу (4.2) в классе функций Чебышева порядка 1 на отрезке $[0, \sigma]$.

Аналогично, можно проверить любую точку $t = \delta \in I$, и, если выполнится условие $\operatorname{rank} \overline{\mathcal{P}}(\delta) = 2$, то найдется точка $\delta_1 > \delta$ такая, что ДАУ (4.1), (4.2) будет R-наблюдаемой на отрезке $[\delta, \delta_1]$ в классе функций Чебышева порядка 1.

5. Заключение

Следует сказать, что другие подходы к исследованию внутренней структуры ДАУ либо не конструктивны, либо не дают возможности исследовать качественные свойства таких систем.

В частности, подход, основанный на построении так называемой расщепленной структурной формы и связанного с ней «полурегуляризирующего оператора» [3] носит чисто теоретический характер. На настоящий момент не существует конструктивных алгоритмов их построения. К тому же при переходе к этой структурной форме используется замена переменной, что в нестационарном случае сильно осложняет исследование таких свойств ДАУ как устойчивость или стабилизируемость.

Подход, связанный с преобразованием системы к виду, разрешенному относительно производной [3], представляется конструктивным, но при таком преобразовании полученная система будет иметь решения, не являющиеся решениями исходных ДАУ, что сильно осложняет изучение качественных свойств.

В заключение отметим, что выбор в качестве разрешающих операций для задачи наблюдения конечномерного семейства функций (3.2) имеет не только теоретический интерес, но и существенно облегчает способ нахождения функции разрешающей операции, поскольку при известной фундаментальной матрице вычисление функции $r(t)$ (см. формулу (3.5)) осуществляется путем решения системы линейных алгебраических уравнений.

Список литературы

1. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной / С. Н. Бернштейн. – М. : Л. : ОНТИ, 1937. – Ч. 1.
2. Бояринцев Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Е. Бояринцев. – Новосибирск : Наука, 1980. – 224 с.
3. Булатов М. В. Об одном численном методе решения дифференциально-алгебраических уравнений / М. В. Булатов, В. Ф. Чистяков // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2002. – № 42(4). – С. 459–470.

4. Гайшун И. В. Введение в теорию линейных нестационарных систем / И. В. Гайшун. – Минск : Изд-во Ин-та математики НАН Беларуси, 1999.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988. – 576 с.
6. Карлин С. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике / С. Карлин, В. Стадден. – М. : Наука, 1976. – 568 с.
7. Красовский Н. Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский. – М. : Наука, 1968. – 476 с.
8. Чистяков В. Ф. О расширении линейных систем, не разрешенных относительно производных / В. Ф. Чистяков. – Иркутск, 1986. – (Препринт / ИрВЦ СО АН СССР ; № 5).
9. Щеглова А. А. Существование решения начальной задачи для вырожденной линейной гибридной системы с переменными коэффициентами / А. А. Щеглова // Изв. вузов. Математика. – 2010. – № 9. – С. 57–70.
10. Щеглова А. А. R-наблюдаемость и R-управляемость линейных алгебро-дифференциальных систем / А. А. Щеглова, П. С. Петренко // Изв. вузов. Математика. – 2012. – № 3. – С. 73–91.
11. Brenan K. E. Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations / K. E. Brenan, S. L. Campbell, L. R. Petzold. – SIAM, 1996.
12. Campbell S. L. Non-BDF methods for the solution of linear time varying implicit differential equations / S. L. Campbell // Proc. Amer. Contr. Conf. San Diego, Calif. 5-6 June, 1984. – Vol. 3. – P. 1315-1318.
13. Campbell S. L. Solvability of general differential algebraic equations / S. L. Campbell, E. Griepentrog // SIAM J. Sci. Stat. Comp. – 1995. – N 16. – P. 257–270.
14. Campbell S. L. Duality, observability, and controllability for linear time-varying descriptor systems / S. L. Campbell, N. K. Nichols, W. J. Terrell // Circ, Syst. and Sign. Process. – 1991. – Vol. 10. – P. 455–470.
15. Dai L. Singular control system / L. Dai // Lecture notes in control and information sciences. – Springer-Verlag. – Vol. 118. – 1989.
16. Ilchmann A. A behavioural approach to linear time-varying systems. II. Descriptor systems / A. Ilchmann, V. Mehrmann // SIAM Journal on Control and Optimization. – 2005. – Vol. 44. – P. 1748–1765.
17. Mehrmann V. Descriptor systems: a general mathematical framework for modelling, simulation and control / V. Mehrmann, T. Stykel // Automatisierungstechnik. – 2006. – Vol. 8. – P. 405–415.
18. Petrenko P. S. Local R-observability of differential-algebraic equations / P. S. Petrenko // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2016. – N 9(3). – P. 353–363.
19. Yip E. L. Solvability, controllability and observability of continuous descriptor systemsm / E. L. Yip, R. F. Sincovec // IEEE Trans. Autom. Control. – 1981. – AC-26. – P. 702–707.

Петренко Павел Сергеевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН им. В. М. Матросова, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134 тел.: (3952) 453107 (e-mail: petrenko_p@mail.ru)

P. S. Petrenko

Известия Иркутского государственного университета.
2017. Т. 20. Серия «Математика». С. 61–74

Observability of Linear Differential-algebraic Equations in the Class of Chebyshev Functions

Abstract. We consider linear time-varying systems of first order ordinary differential equations unresolved with respect to the derivative of the unknown function and identically degenerate in the domain. Such systems are called differential-algebraic equations (DAE). The unsolvability measure with respect to the derivatives for some DAE is an integer that is called the index of the DAE. We admit an arbitrarily high unsolvability index not more than the order of the system. The analysis is carried out under the assumption of existence of a structural form with separated differential and algebraic subsystems. This structural form is equivalent to the input system in the sense of solution, and the operator transforming the DAE into the structural form possesses the left inverse operator. The finding of the structural form is constructive and do not use a change of variables. In addition the problem of consistency of the initial data is solved automatically. The approach uses the concept of r-derivative array equations, where r is the unsolvability index. The existence of a nonsingular minor of order n(r + 1) in the matrix describing derivative array equations is necessary and sufficient for existence of this structural form (n is the dimension of DAE under consideration). We investigate observability of DAE by a given scalar output. The problem of observability consists in finding the state vector of the system on the basis of incomplete data on its components determined by the output function. As a class of functions of resolving operations, that is, solving the observability problem, in addition to piecewise continuous ones, we consider the class of generalized Chebyshev functions. It is obtained a sufficient condition of R-observability (observability in the reachable set) of linear non-stationary systems of DAE in the class of Chebyshev polynomials. We consider the example illustrating the obtained results.

Keywords: observability, differential-algebraic equations, Chebyshev functions.

References

1. Bernshteyn S.N. *Ekstremal'nyye svoystva polinomov i nailuchsheye priblizheniye nepreryvnykh funktsiy odnoy veshchestvennoy peremennoy* [Extremal properties of polynomials and the best approximation of continuous functions of a single real variable]. Part 1. M., L., ONTI, 1937. 204 p.
2. Boyarintsev Ju.E. *Regulyarnyye i singulyarnyye sistemy lineynykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Regular and Singular Systems of Linear Ordinary Differential Equations]. Novosibirsk, Nauka Publ., Siberian Branch, 1980. 222 p.
3. Bulatov M.V., Chistyakov V.F. A numerical method for solving differential-algebraic equations. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2002, vol. 42, no 4, pp. 439–449.
4. Gaishun I.V. *Vvedenie v teoriyu lineynyih nestatsionarnyih sistem* [Introduction to the theory of linear nonstationary systems]. Minsk, Nats. AN Belarusi, In-t Matematiki, 1999. 409 p.
5. Gantmacher F.R. *Teoriya matrits* [The theory of matrices]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 548 p.
6. Karlin S., Stadden V. *Chebyshevskie sistemy i ikh primeneniye v analize i statistike* [Chebyshev systems and their applications in analysis and statistics]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 568 p.
7. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Motion Control Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 476 p.

8. Chistyakov V.F. On the extension of linear systems not solved with respect to derivatives. Preprint no 5. Irkutsk, IVC AN SSSR, 1986.
9. Shcheglova A.A. The solvability of the initial problem for a degenerate linear hybrid system with variable coefficients. *Russian Mathematics*, 2010, vol. 54, no 9, pp. 49-61. https://doi.org/10.3103/S1066369X10090057
10. Shcheglova A.A., Petrenko P.S. The R-observability and R-controllability of linear differential-algebraic systems. *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, no 3, pp. 66-82. https://doi.org/10.3103/S1066369X12030097
11. Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations. SIAM, 1996. 251 p.
12. Campbell S.L. Non-BDF methods for the solution of linear time varying implicit differential equations. *Proc. Amer. Contr. Conf.* San Diego, Calif. 5-6 June, 1984, vol. 3, pp. 1315-1318.
13. Campbell S.L., Griepentrog E. Solvability of general differential algebraic equations. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 1995, no 16, pp. 257-270.
14. Campbell S.L., Nichols N.K., Terrell W.J. Duality, observability, and controllability for linear time-varying descriptor systems. *Circ, Syst. and Sign. Process.*, 1991, vol. 10, pp. 455-470. https://doi.org/10.1007/BF01194883
15. Dai L. Singular control system. *Lecture notes in control and information sciences*, Springer-Verlag, 1989, vol. 118.
16. Ilchmann A., Mehrmann V. A behavioural approach to linear time-varying systems. II. Descriptor systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2005. vol. 44, pp. 1748-1765. https://doi.org/10.1137/040609021
17. Mehrmann V., Stykel T. Descriptor systems: a general mathematical framework for modelling, simulation and control. *Automatisierungstechnik*, 2006, vol. 8, pp. 405-415.
18. Petrenko P.S. Local R-observability of differential-algebraic equations. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2016, vol. 9, no 3, pp. 353-363.
19. Yip E. L., SINCOVEC R.F. Solvability, controllability and observability of continuous descriptor systems *IEEE Trans. Autom. Control.*, 1981, AC-26, pp. 702-707. https://doi.org/10.1109/TAC.1981.1102699

Petrenko Pavel Sergeevich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033,
(e-mail: `petrenko_p@mail.ru`)