Серия «Математика»
2017. Т. 20. С. 3—16

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.642.5
MSC 65R20
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.20.3

Приложения и методы численного решения одного класса интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования*

М. Н. Ботороева
Иркутский государственный университет

М. В. Булатов
Институт динамики систем и теории управления СО РАН им. В. М. Матросова

Аннотация. В статье рассмотрены взаимосвязанные алгебраические уравнения и линейные интегральные уравнения Вольтерра I и II рода с переменными пределами интегрирования, где нижний предел интегрирования строго меньше верхнего для любых значений независимой переменной. Если объединить эти уравнения, то получим систему интегральных уравнений Вольтерра с переменными пределами интегрирования с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. Такие системы уравнений принято называть интегро-алгебраическими уравнениями с переменными пределами интегрирования. В данной работе без доказательства приведены достаточные условия существования единственного решения интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования в классе непрерывных функций. Для численного решения интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования предложено семейство многошаговых методов, основанных на явных квадратурных формулах Адамса для интегрального слагаемого и на экстраполяционных формулах для главной части. Приведены результаты расчетов модельных примеров, которые иллюстрируют эффективность построенных методов. В качестве приложения рассмотрена модель долгосрочного развития электроэнергетической системы, состоящей из трех типов не атомных (базисные станции на угле, базисные станции на нефти, маневренные станции на газе) и трех типов атомных электростанций (с реакторами на тепловых нейтронах на уране, с реакторами на быстрых нейтронах на плутонии и с реакторами на тепловых нейтронах на плутонии). Модель представлена в виде интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования. В статье проведен анализ

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 16-51-540002, 15-01-03228, 16-31-00219.

описанной модели долгосрочного развития электроэнергетической системы, т. е. согласование входных данных и выполнение условий существования единственного непрерывного решения в терминах матричных пучков.

Ключевые слова: интегро-алгебраические уравнения, переменные пределы интегрирования, модель развития электроэнергетических систем, многошаговые методы.

1. Введение

В середине семидесятых годов В. М. Глушковым [8] была предложена динамическая макроэкономическая модель, описанная системой интегральных уравнений с переменными пределами интегрирования. Она оказалась лучше классической модели, основанной на системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Новый подход позволил без особых осложнений описывать реальные макроэкономические системы негладкими функциями. Кроме того, специфика интегральных уравнений (относительно дифференциальных) учитывать непрерывную последовательность предшествующих состояний дала возможность учесть динамику сворачивания и полного отказа от использования устаревших производственных мощностей. Выявленные преимущества интегральных моделей способствовали как развитию математического аппарата, так и применению их к прикладным задачам различных научных областей (см., например, [9; 2; 10; 8]).

Взаимосвязанные интегральные уравнения Вольтерра I и II рода можно записать в виде системы интегральных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. Такие системы принято называть интегро-алгебраическими уравнениями (ИАУ). В данной работе рассмотрены ИАУ с переменными пределами интегрирования. Приведена модель долгосрочной перспективы развития электроэнергетических систем [1]. Предложены многошаговые методы решения ИАУ, результаты применения которых иллюстрируются на модельных примерах.

2. Постановка задачи и определения используемых понятий

Рассмотрим ИАУ с переменными пределами интегрирования

$$A(t)x(t) + \int\limits_{t-c}^{t} K(t,s)x(s)ds = f(t),\ t \in [0,T], \tag{2.1}$$

где $A(t)$ и $K(t,s)$ — квадратные матрицы размерности n, ядро $K(t,s)$ определено в заштрихованной области — рис. 1, $f(t)$ и $x(t)$ — известная и искомая n-мерные вектор-функции соответственно, c — известная положительная постоянная величина. Для данной системы задана стартовая вектор-функция

$$x(t) = x^0(t), \quad t \in [-c, 0). \tag{2.2}$$

В данной работе рассмотрен случай, когда матрица $A(t)$ — тождественно вырожденная

$$\det A(t) \equiv 0. \tag{2.3}$$

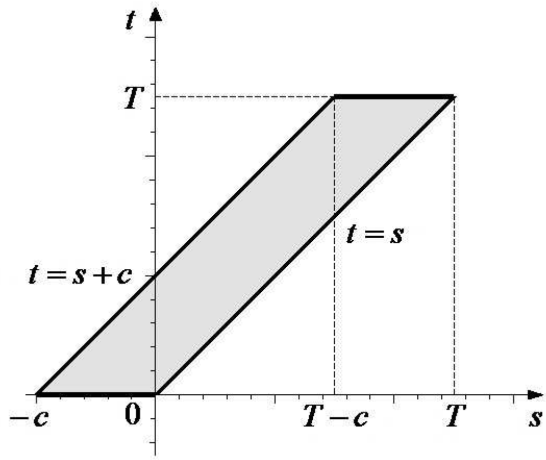

Рис. 1. Область определения ядра $K(t,s)$ уравнения (2.1) заштрихована

Предполагается, что входные данные $A(t)$, $K(t,s)$, $f(t)$ обладают необходимой степенью гладкости. Под решением задачи будем понимать любую непрерывную вектор-функцию $x(t)$, обращающую (2.1) в тождество и непрерывно стыкующуюся со стартовой вектор-функцией (2.2) в начальной точке $t = 0$.

Для изложения дальнейшего материала будут необходимы некоторые определения.

Определение 1. [7] *Матрица, обозначаемая в дальнейшем как A^-, называется полуобратной к матрице A, если она удовлетворяет уравнению*

$$AA^-A = A.$$

Обозначая $W = E - AA^-$, где E — единичная матрица, последнее уравнение запишем в виде

$$WA = 0.$$

Определение 2. [12]. *Пучок квадратных матриц $\lambda A(t) + B(t)$, где λ — скалярный параметр (в общем случае комплексный), удовлетворяет* *критерию «ранг – степень» на* $[0,T]$*, если*

$$max(rankA(t)) = k \quad \forall t \in [0,T];$$

$$\det(\lambda A(t)+B(t)) = \lambda^k a_0(t)+\lambda^{k-1}a_1(t)+...+a_k(t), \quad a_0(t) \neq 0 \ \ \forall t \in [0,T].$$

В терминах данных определений приведем достаточные условия существования и единственности задачи (2.1), (2.2) с условием (2.3).

Теорема 1. [6] *Пусть для задачи (2.1), (2.2) с условием (2.3) выполнены условия:*

1) элементы матриц $A(t)$*,* $K(t,s)$ *и вектор-функции* $f(t)$ *являются непрерывно-дифференцируемыми функциями в своих областях определения;*

2) пучок $\lambda A(t)+K(t,t)$ *удовлетворяет критерию «ранг – степень»;*

3)

$$W(0)f'(0) = \\ = W(0)\left[K(0,0)x^0(-0) - K(0,-c)x^0(-c) + A'(0)x^0(-0)\right] + \\ + W(0)\int\limits_{-c}^{0} K'_t(0,s)x^0(s)ds,$$

где $W(0) = E - A(0)A^-(0)$*;*

4) $A(0)x^0(-0) = f(0) - \int\limits_{-c}^{0} K(0,s)x^0(s)ds.$

Тогда задача (2.1), (2.2) с условием (2.3) имеет непрерывное решение и это решение единственное.

Отметим, если $x(t)$ — искомая функция и $A(t) \equiv 0$, то условия данной теоремы совпадают с условием теоремы из [1, с. 79].

В следующем параграфе приведен пример системы ИАУ, которая моделирует долгосрочные прогнозы работы электроэнергетических систем. По отдельности все эти уравнения выписаны в [1, с. 118]

3. Математическая модель долгосрочного развития электроэнергетических систем

Как уже отмечалась ранее, интегральные уравнения с переменными пределами интегрирования широко используются для моделирования развивающихся систем в различных областях, в том числе и в энергетике. В [1; 2; 10], подробно описано построение модели ввода различных генерирующих мощностей электроэнергетических систем (ЭЭС) из трех типов неатомных и трех типов атомных электростанций на достаточно длительный период, которая учитывает ограничения на топливо и капвложения, сроки жизни электростанций и замену устаревших технологий новыми.

Пусть $\varphi_i(t) \geq 0$ — вводимая в момент времени t мощность электростанций i–го типа, $i = \overline{1,6}$; $t \in [0, T]$, 0 и T — начало и конец прогнозируемого периода соответственно.

Для каждого типа станций известны следующие технико-экономические характеристики:

1. $m_i(t)$ (руб./МВт) — удельные капвложения в момент времени t;

2. $b_i(t)$ (кг у.т./МВт·ч) — удельный расход топлива в момент времени t;

3. c_i — срок жизни электростанции (будем предполагать, что для каждого типа электростанции это одна и та же постоянная величина $c_i = c$, т. е. все станции были запущены одновременно);

4. $\beta_i(t-s)$ — скорость создания новых мощностей в момент времени t в расчете на единицу мощности, введенной ранее в момент времени s.

На предыстории $t \in [-c, 0)$ известны функции

$$\varphi_i(t) = \varphi_i^0(t), \quad i = \overline{1,6}. \tag{3.1}$$

Задана динамика потребления необходимых ресурсов: $F(t)$ — динамика электропотребления; $M(t)$ — динамика капвложений на развитие ЭЭС; $B(t)$ (кг у.т.) — суммарный расход ограниченного топлива для не атомных станций; $B_u(t)$ — динамика использования природного урана $t \in [0, T]$.

Также считаются известными значения некоторых параметров:
$\gamma(t)$ — доля маневренных мощностей от суммы всех введенных к моменту t;
$q_i \neq 0, i = \overline{4,6}$ (кг у.т./кВт) — удельная критическая загрузка ядерным топливом, необходимая для первоначального запуска АЭС соответствующего типа;
$\alpha_i, i = \overline{4,6}$ — удельная выгрузка вторичного ядерного топлива из АЭС соответствующего типа;
μ и ν — доли вторичного ядерного топлива, поступающего из АЭС типов 4 и 5, 6 соответственно, идущие на склад плутония после химической переработки.

Упрощенная схема ядерного топливного цикла приведена в [1, с. 119].

Предполагаем, что все электростанции используются на полную мощность в течение всего срока жизни и время задержки поступления на склад плутония, наработанного АЭС пренебрежительно мало по сравнению со сроком жизни электростанций.

С учетом обозначений, модель ввода различных генерирующих мощностей ЭЭС можно представить в виде (2.1), где

$$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_1(t) & m_2(t) & m_3(t) & m_4(t) & m_5(t) & m_6(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_5 & q_6 \end{pmatrix},$$

$$K(t,s)=\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ 0 & 0 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu\alpha_4\beta_4 & (b_5(t)-\nu\alpha_5)\beta_5 & (b_6(t)-\nu\alpha_6)\beta_6 \end{pmatrix},$$

$\eta_i = b_i(t)\beta_i(t-s), \quad \beta_i=\beta_i(t-s), \quad i=\overline{1,6},$

$x(t)=\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \varphi_3(t) & \varphi_4(t) & \varphi_5(t) & \varphi_6(t) \end{pmatrix}^T,$

$f(t)=\begin{pmatrix} F(t) & \gamma(t)F(t) & M(t) & B(t) & B_u(t) & 0 \end{pmatrix}^T$, функции (3.1) являются стартовыми. Таким образом, задача (2.1), (2.2) с вышеприведенными входными данными будет иметь единственное непрерывное решение при выполнении условий теоремы (1). Будем предполагать, что функции $m_i(t)$, $F(t)$, $\gamma(t)$, $M(t)$, $B(t)$, $B_u(t)$, $\beta_i(t-s)$, $b_i(t)$ непрерывно дифференцируемы на $t\in[0,T]$. Проверим выполнение второго условия теоремы (1).

Учитывая смысл величин q_4, q_5 и q_6, матрица $A(t)$ имеет, как минимум, две ненулевые строки при любых значениях функций $m_i, i=\overline{1,6}$. Ранг матрицы $A(t)$ не превышает трех, и равен трем только при выполнении одного из условий:

1. $m_1(t)+m_2(t)+m_3(t)\neq 0 \ \forall t\in[0,T]$;
2. $m_5(t)q_6-m_6(t)q_5\neq 0 \ \forall t\in[0,T]$.

Для выполнения критерия «ранг – степень» следует определить условия, при которых степень характеристического многочлена пучка матриц $det(\lambda A(t)+K(t,t))=\lambda^3a_0(t)+\lambda^2a_1(t)+\lambda a_2(t)+a_3(t)$ также будет равна трем, то есть $a_0(t)\neq 0 \ \ \forall t\in[0,T]$.

Значение коэффициента

$$a_0(t)=\beta_3(0)q_4\begin{vmatrix} \beta_1(0) & \beta_2(0) & \beta_5(0) & \beta_6(0) \\ m_1(t) & m_2(t) & m_5(t) & m_6(t) \\ b_1(t)\beta_1(0) & b_2(t)\beta_2(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_5 & q_6 \end{vmatrix}, \tag{3.2}$$

не обратится в ноль, если $\beta_3(0)\neq 0 \ \ \forall t\in[0,T]$, и определитель в (3.2) не равен нулю при всех значениях $t\in[0,T]$.

Далее опишем построение многошаговых методов решения задачи (2.1), основанных на квадратурной формуле Адамса и на экстраполяционных формулах. Отметим, что такие методы были предложены для решения ИАУ с постоянным нижним пределом в [3]. Там же была обоснована устойчивость таких методов при $k \leq 5$.

4. Численные методы решения интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования

Хорошо известно, что многие неявные многошаговые методы порождают неустойчивый процесс при численном решении интегральных уравнений Вольтерра I рода. В частности, это относится к методам, основанным на неявных квадратурных формулах Адамса.

Алгоритмы, основанные на явных квадратурных формулах Адамса, для таких уравнений ведут себя устойчиво и сходятся к точному решению со скоростью $O(h^{k+1}), k \leq 5$, где $k-$ число шагов. Однако в силу вырожденности матрицы $A(t)$ (2.3) их применять нельзя.

В данном разделе приведем модификацию методов, основанных на явных квадратурных формулах и экстраполяционных формулах для рассмотренных задач.

Начнем с описания численных методов, основанных на явных квадратурных формулах типа Адамса для решения интегральных уравнений Вольтерра I рода с переменными пределами интегрирования вида

$$\int\limits_{t-c}^{t} K(t,s)x(s)ds = f(t),\ t \in [0,T],\ s \in [0,t], \tag{4.1}$$

где $K(t,s)$ и $f(t)$ достаточно гладкие и удовлетворяют условиям разрешимости [1].

Зададим на отрезке интегрирования $[-c;T]$ равномерную сетку $t_\nu = \nu h,\ \ \nu = \overline{-N,[\frac{T-h}{h}]+1},\ h = \frac{c}{N},\ N \geq k-$ натуральное число. Значения $\psi(t_i) = \psi_i$ известны, тогда

$$\int\limits_{t_{i-N+1}}^{t_{i+1}} \psi(s)ds = \int\limits_{t_{i-N+1}}^{t_{i-N+k+2}} \psi(s)ds + \sum_{j=i-N+k+2}^{i} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \psi(s)ds \approx$$

$$\approx \int\limits_{t_{i-N+1}}^{t_{i-N+k+2}} L^0_{k+1}(\psi_{i-N+1},\psi_{i-N+2},...,\psi_{i-N+k+1},s)ds + \tag{4.2}$$

$$+ \sum_{j=i-N+k+2}^{i} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} L^j_{k+1}(\psi_{j-k},\psi_{j-k+1},...,\psi_j,s)ds =$$

$$= h \sum_{l=i-N+1}^{i-N+k+1} \beta_{l-i+N-1}\psi_l + \sum_{j=i-N+k+2}^{i} h \sum_{l=0}^{k} \gamma_l \psi_{j-l} =$$

$$= h \sum_{l=i-N+1}^{i} \omega_{N-k+1,l}\psi_l,$$

где $L_{k+1}^j(\psi_{j-k}, \psi_{j-k+1}, ..., \psi_j, s)$ — интерполяционный полином степени k, проходящий через точки $(\psi_{j-k}, t_{j-k}), (\psi_{j-k+1}, t_{j-k+1}), ..., (\psi_j, t_j)$, $j = i-N+k+2, i-N+k+3, ..., i$.

Коэффициенты $\omega_{N-k+1,l}$ принято называть весами квадратурной формулы. В (4.2) они являются линейными комбинациями коэффициентов β_l и $\gamma_l, l = 0, 1, ...k$. Приведем коэффициенты $\omega_{N-k+1,l}$ [11], [13] для $k = 1, 2, 3$:

$$\omega_{N-k+1,l} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & & & & \\ 3 & 3 & & & \\ 3 & 2 & 3 & & \\ 3 & 2 & 2 & 3 & \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}, \ \omega_{N-k+1,l} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 27 & & & & \\ 9 & 5 & 11 & 23 & & & \\ 9 & 5 & 16 & 7 & 23 & & \\ 9 & 5 & 16 & 12 & 7 & 23 & \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix},$$

$$\omega_{N-k+1,l} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 64 & -32 & 64 & & & & \\ 55 & 5 & 5 & 55 & & & \\ 55 & -4 & 42 & -4 & 55 & & \\ 55 & -4 & 33 & 33 & -4 & 55 & \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}.$$

Для нечетных k коэффициент $\omega_{N-k+1,l} = 0$, поэтому здесь при $k = 1, 3$ первый нулевой столбец опущен.

Отметим, что первый индекс весов $\omega_{N-k+1,l}$ обозначает номер строки представленных матриц и не зависит от i, таким образом, при счете используется лишь одна строка коэффициентов, ее выбор зависит от числа узлов сетки на предыстории $[-c; 0)$.

Введем обозначения $A(t_{i+1}) = A_{i+1}$, $K(t_{i+1,l}) = K_{i+1,l}$, $f(t_{i+1}) = f_{i+1}$, $x(t_l) \approx x_l$, при $l \geq 0$, $x^0(t_l) = x_l$, при $l < 0$.

Тогда, для численного решения (4.1) можно применить $k-$шаговые методы, которые основаны на формуле (4.2)

$$h \sum_{l=i-N+1}^{i} \omega_{N-k+1,l+N-i} K_{i+1,l} x_l = f_{i+1}. \tag{4.3}$$

Учитывая ранее введенные обозначения и равномерную сетку на отрезке интегрирования, общие многошаговые методы имеют вид

$$A_{i+1} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{i+1-j} + h \sum_{l=i-N+1}^{i+1} \omega_{N-k+1,l-i+N} K_{i+1,l} x_l = f_{i+1}, \tag{4.4}$$

$i = 0, 1, ..., \left[\frac{T-h}{h} + 1\right] + 1$, где $\sum\limits_{j=0}^{k} \alpha_j x_{i+1-j}$ — аппроксимация $x(t_{i+1})$, $h \sum\limits_{l=i-N+1}^{i+1} \omega_{N-k+1,l} K_{i+1,l} x_l$ — аппроксимация интегрального слагаемого.

Формулы (4.4) могут быть явными при $\alpha_0 \neq 0$, $\omega_{i+1,l} = 0$ и неявными при $\alpha_0 \neq 0$, $\omega_{i+1,l-i+N} \neq 0$.

Задача (2.1) содержит в себе уравнения (4.1), для которых неявные методы (4.4) приводят к расходящимся процессам, поэтому для решения задачи (2.1) применять неявные методы нельзя. Применение же явных методов, например, рассмотренных выше явных методов Адамса, устойчивых для задачи (4.1), приводит к необходимости решать вырожденные системы линейных алгебраических уравнений

$$A_{i+1} x_{i+1} = f_{i+1} - h \sum_{l=i-N+1}^{i} \omega_{N-k+1,l} K_{i+1,l} x_l,$$

$i = 0, 1, ..., \left[\frac{T-h}{h} + 1\right] + 1$.

Чтобы избежать такого рода трудностей для вычисления интегрального слагаемого в (2.1) будем применять явные методы Адамса, а значение x_{i+1} в выражении $A_{i+1} x_{i+1}$, будем вычислять как значение в точке $t = t_{i+1}$ интерполяционного полинома степени k

$$L^i_{k+1}(x_{i-k}, x_{i-k+1}, ..., x_i, t),$$

проходящего через точки $(x_{i-k}, t_{i-k}), (x_{i-k+1}, t_{i-k+1}), ..., (x_i, t_i)$, т. е.

$$x_{i+1} \approx L^i_{k+1}(x_{i-k}, x_{i-k+1}, ..., x_i, t_{i+1}) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{i-j}.$$

Придерживаясь такого подхода для решения задачи (2.1) получим многошаговые методы

$$A_{i+1} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{i-j} + h \sum_{l=i-N+1}^{i} \omega_{N-k+1,l} K_{i+1,l} x_l = f_{i+1}, \qquad (4.5)$$

$i = 0, 1, ..., \left[\frac{T-h}{h} + 1\right] + 1$.

Выпишем в табл. 1 коэффициенты α_j для $k = 1, 2, 3$.

Таблица 1

k	α_0	α_1	α_2	α_3
1	2	-1	—	—
2	3	-3	1	—
3	4	-6	4	-1

Теорема 2. *Пусть для задачи (2.1) –(2.3) выполнены условия:*

1) элементы матриц $A(t)$, $K(t,s)$ и вектор-функции $f(t)$ являются непрерывно-дифференцируемыми функциями в своих областях определения;

2) пучок $\lambda A(t)+K(t,t)$ удовлетворяет критерию «ранг – степень»;

3) $rank A(0) = rank\left(A(0)|f(0) - \int\limits_{-c}^{0} K(0,s)x^0(s)ds\right)$;

Тогда метод (4.5) при $k \le 5$ сходится к точному решению с порядком $k+1$ то есть справедлива оценка

$$\|x_i - x(t_i)\| = O(h^{k+1}), i = 0,1,..., \left[\frac{T-h}{h}+1\right]+1.$$

Схема доказательства теоремы полностью совпадает с доказательством теоремы в [3].

В заключительном разделе приведем результаты расчета модельных примеров многошаговыми методами (4.5) при различных k.

5. Численные эксперименты

Пример 1. Рассмотрим ИАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^t & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int\limits_{t-1}^{t}\begin{pmatrix} 1+t & e^{t+s} \\ 2t+s & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (2-t)e^{2t-1} + (t-1)e^{2t} + t^4 + 0,5t^3 - 0,5t^2 + 2,75t + 1,75 \\ (t^3+t+1)e^t + 3t^4 - 5t^3 + 4t^2 + 0,5t + 0,2 \end{pmatrix},$$

$t \in [1,4]$, для которого заданы стартовые функции $u^0(t) = t^3+1,\ v^0(t) = t$. Данная задача удовлетворяет условиям существования единственного непрерывного решения. Точное решение: $u(t) = t^3+1,\ v(t) = t$. В табл. 2 и далее используются обозначения err_k погрешности вычисления k шаговых методов (4.5) при $k = 1,2,3$ соответственно.

Таблица 2

h	0.1	0.05	0.025	0.0125
err_1	$0.224 \cdot 10^{-1}$	$0.623 \cdot 10^{-2}$	$0.173 \cdot 10^{-2}$	$0.502 \cdot 10^{-3}$
err_2	$0.210 \cdot 10^{-2}$	$0.311 \cdot 10^{-3}$	$0.448 \cdot 10^{-4}$	$0.664 \cdot 10^{-5}$
err_3	$0.186 \cdot 10^{-3}$	$0.146 \cdot 10^{-4}$	$0.102 \cdot 10^{-5}$	$0.690 \cdot 10^{-7}$

Пример 2. Рассмотрим ИАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int\limits_{t-1}^{t} \begin{pmatrix} e^{t-s} & 0 \\ e^{t-2s} & e^{t+s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^t + te^{-t} \\ (t+1)e^t + t^2 e^{-t} + e - 1 \end{pmatrix}, \ t \in [1, 4],$$

для которого заданы стартовые функции $u^0(t) = e^t, \ v^0(t) = e^{-t}$. Данная задача удовлетворяет условиям существования единственного непрерывного решения. Точное решение: $u(t) = e^t, \ v(t) = e^{-t}$. В табл. 3 представлены погрешности err_1, err_2, err_3 методов (4.5) при $k = 1, 2, 3$ соответственно.

Таблица 3

h	0.1	0.05	0.025	0.0125
err_1	0.249	$0.652 \cdot 10^{-1}$	$0.166 \cdot 10^{-1}$	$0.418 \cdot 10^{-2}$
err_2	$0.235 \cdot 10^{-1}$	$0.317 \cdot 10^{-2}$	$0.414 \cdot 10^{-3}$	$0.530 \cdot 10^{-4}$
err_3	$0.226 \cdot 10^{-2}$	$0.156 \cdot 10^{-3}$	$0.102 \cdot 10^{-4}$	$0.652 \cdot 10^{-6}$

Расчеты модельных примеров показывают, что для задачи (2.1) $k-$шаговые методы (4.5) сходятся с порядком точности $k+1$.

6. Заключение

В данной работе показано, что класс рассматриваемых задач ИАУ с переменными пределами интегрирования (2.1) не является пустым и имеет прикладное значение в энергетики для долгосрочного прогнозирования работы электроэнергетических систем. Для численного решения таких задач предложены многошаговые методы (4.5), основанные на квадратурной формуле Адамса и на экстраполяционных формулах. В работе [3] такие методы были построены для ИАУ с постоянным нижним пределом и показана устойчивость методов при $k \leq 5$ и доказано, что порядок точности равен $k+1$.

В монографии [1, с. 94–99] и [10] описывается эффект потери порядка сходимости квадратурных формул, примененных к решению неклассических уравнений Вольтерра I рода (уравнения (2.1) с $A(t) \equiv 0$). Это связанно с возмущением, вызванным погрешностью аппроксимации интеграла на предыстории.

Там же отмечено [1, с. 94-99], что порядок сходимости может быть восстановлен, если предварительно уравнение (2.1) преобразовать к виду

$$A(t)x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t) - \int_{t-c}^0 K(t,s)x^0(s)ds,$$

где $x^0(t), \quad t \in [-c, 0)$ — стартовая вектор-функция из (2.2).

При реализации методов (4.5) применялась идея использования на предыстории известных заранее значений стартовых вектор-функций (2.2), что позволило избежать потери порядка точности предложеных методов (4.5). Проведенные численные эксперименты показали, что k-шаговые методы (4.5) для ИАУ с переменными пределами интегрирования вида (2.1) сходятся к точному решению с порядком $k+1$.

Список литературы

1. Апарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы / А. С. Апарцин. – Новосибирск : Наука. Сиб. издат. фирма РАН, 1999. – 193 с.
2. Апарцин А. С. Применение моделей В. М. Глушкова для моделирования долгосрочных стратегий развития ЕЭЭС / А. С. Апарцин, А. М. Тришечкин // Тез. докл. Всесоюз. конф. "Курс-4". – Рига, 1986. – С. 17–19.
3. Будникова О. С. Численное решение интегроалгебраических уравнений многошаговыми методами / О. С. Будникова, М. В. Булатов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2012. – Т. 52, № 5. – С. 829–839.
4. Булатов М. В. Методы решения дифференциально-алгебраических и вырожденных интегральных систем : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 05.13.18 / Булатов Михаил Валерьянович ; ИДСТУ СО РАН. – Иркутск, 2002. – 244 с.
5. Булатов М. В. Регуляризация вырожденных систем интегральных уравнений Вольтерра / М. В. Булатов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2002. – Т. 42, № 3. – С. 58–63.
6. Булатов М. В. Об одном классе интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования / М. В. Булатов, М. Н. Мачхина // Журн. Средневолж. мат. о-ва. – 2010. – Т. 12, № 2. – С. 40–45.
7. Ваарман О. Обобщенные обратные отображения / О. Ваарман. – Таллинн : Валгус, 1988. – 120 с.
8. Глушков В. М. Об одном классе динамических макроэкономических моделей / В. М. Глушков // Управляющие системы и машины. – 1977. – № 2. – С. 3–6.
9. Глушков В. М. Моделирование развивающихся систем / В. М. Глушков, В. В. Иванов, В. М. Яненко. – М. : Наука, 1983. – 350 с.
10. Математические задачи энергетики (модели, методы, решения) : науч. отчет / Е. Г. Анциферов, А. С. Апарцин, Л. Т. Ащепков, В. П. Булатов. – Иркутск : СЭИ СО АН СССР, 1987. – 286 с.
11. Тен Мен Ян. Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.07 / Тен Мен Ян ; СЭИ СО АН СССР ; науч. рук. Бояринцев Ю. Е. – Иркутск, 1985. – 155 с.
12. Чистяков В. Ф. О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах / В. Ф. Чистяков // Функции Ляпунова и их приложения. – Новосибирск : Наука, 1987. – С. 231–239.

Известия Иркутского государственного университета.
2017. Т. 20. Серия «Математика». С. 3–16

13. Brunner H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Funktional Differential Equations / H. Brunner. – Cambridge : Cambridge University Press, 2004.

Ботороева Мария Николаевна, Иркутский государственный университет, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)242210 (e-mail: masha888888@mail.ru)

Булатов Михаил Валерьянович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952)427100 (e-mail: mvbul@icc.ru)

M. N. Botoroeva, M. V. Bulatov

Applications and Methods for the Numerical Solution of a Class of Integer-Algebraic Equations with Variable Limits of Integration

Abstract. In the paper, we consider interrelated algebraic equations and Volterra linear integral equations of the first and second kind with variable limits of integration, where the lower limit of integration is strictly less than the upper limit for any values ??of the independent variable. If we combine these equations, we obtain a system of integral Volterra equations with variable limits of integration with an identically degenerate matrix in front of the principal part. Such systems of equations are usually called integro-algebraic equations with variable limits of integration. In this paper, without proof, sufficient conditions are given for the existence of a unique solution of integro-algebraic equations with variable limits of integration in the class of continuous functions. For a numerical solution of integro-algebraic equations with variable integration limits, a family of multistep methods based on explicit Adams quadrature formulas for the integral term and on extrapolation formulas for the principal part is proposed. The results of calculations of model examples that illustrate the effectiveness of the constructed methods are presented. As an appendix, the model of long-term development of the electric power system consisting of three types of non-atomic systems is considered: base stations on coal, base stations for oil, maneuver stations on gas and three types of nuclear power plants: with thermal neutron reactors on uranium, with fast neutron reactors On plutonium and with thermal neutron reactors on plutonium. The model is represented in the form of integro-algebraic equations with variable limits of integration. The article analyzes the described model of the long-term development of the electric power system, that is, the matching of the input data and the fulfillment of the conditions for the existence of a single continuous solution in terms of matrix beams.

Keywords: integro-algebraic equations, variable limits of integration, model of development of electric power systems, multistep methods.

References

1. Anciferov E.G., Aparcin A.S., Ashhepkov L.T., Bulatov V.P. *Matematicheskie zadachi jenergetiki (modeli, metody, reshenija): Nauchnyj otchet* [Mathematical

Problems of Energy (Models, Methods, Solutions) : Scientific Report]. Irkutsk, SEI SB AS USSR, 1987. 286 p.

2. Aparcin A.S. *Neklassicheskie uravnenija Vol'terra I roda: teorija i chislennye metody* [Nonclassical Volterra Equations of the First Kind: Theory and Numerical Methods]. Novosibirsk, Nauka, Sibirskaja izdatel'skaja firma RAS, 1999. 193 p.
3. Aparcin A.S., Trishechkin A.M. Primenenie modelej V.M. Glushkova dlja modelirovanija dolgosrochnyh strategij razvitija EJeJeS Application of V.M. Glushkov Models for Modeling Long-term Strategies for the Development of a Unified Power System. *Tezisy dokladov vsesojuznoj konferencii «Kurs-4»* Abstracts of the Reports of the All-Union Conference «Course-4». Riga, 1986, pp. 17-19.
4. Budnikova O.S. Numerical Solution of Integral-algebraic Equations for Multistep Methods. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2012, vol. 52, no 5, pp. 691-701. (in Russian) https://doi.org/10.1134/S0965542512050041
5. Bulatov M.V. *Metody reshenija differencial'no-algebraicheskih i vyrazhdennyh integral'nyh sistem* Methods for Solving Differential-algebraic and Degenerate Integral Systems, Doctor's Dissertation in Mathematics and Physics. Irkutsk, 2002. 244 p.
6. Bulatov M.V. Regularization of Degenerate Systems of Volterra Integral Equations. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2002, vol. 42, no 3, pp. 315–320 (in Russian)
7. Bulatov M.V., Machkhina M.N. Ob odnom klasse integro-algebraicheskih uravnenij s peremennymi predelami integrirovanija On a Class of Integro-algebraic Equations with Variable Limits of Integration. *Zhurnal srednevolzhskogo matematicheskogo obshhestva* Journal of the Middle Volga Mathematical Society, 2010, vol. 12, no 2, pp. 40-45.
8. Vaarman O. *Obobshhennye obratnye otobrazhenija* Generalized Inverse Mappings. Tallin, Valgus, 1988. 120 p.
9. Glushkov V.M. Ob odnom klasse dinamicheskih makrojekonomicheskih modelej [About One Class of Dynamic Macroeconomic Models]. *Upravljajushhie sistemy i mashiny* Control Systems and Machines, 1977, no 2, pp. 3-6.
10. Glushkov V.M., Ivanov V.V., Janenko V.M. *Modelirovanie razvivajushhihsja sistem* Modeling of Developing Systems. Moscow, Nauka Publ., 1983. 350 p.
11. Ten Men Jan. *Priblizhennoe reshenie linejnyh integral'nyh uravnenij Vol'terra I roda* Approximate Solution of Linear Volterra Integral Equations of the First Kind, Candidate's Dissertation in Mathematics and Physics. Irkutsk, 1985. 155 p.
12. Chistjakov V.F. O singuljarnyh sistemah obyknovennyh differencial'nyh uravnenij i ih integral'nyh analogah On Singular Systems of Ordinary Differential Equations and Their Integral Counterparts. *Funkcii Ljapunova i ih prilozhenija* Lyapunov Functions and Their Applications. Novosibirsk, Nauka Publ., 1987, pp. 231-239.
13. Brunner H. *Collocation Methods for Volterra Integral and Related Funktional Differential Equations*. Cambridge University Press, 2004. https://doi.org/10.1017/CBO9780511543234

Botoroeva Maria Nikolaevna, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003 tel.: (3952)242210 (e-mail: masha888888@mail.ru)

Bulatov Mikhail Valeriyanovich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Post Box 292, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033,
tel.: (3952)427100 (e-mail: mvbul@icc.ru)