Серия «Математика»
2017. Т. 20. С. 45—60

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.946
MSC 3B
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.20.45

О первых интегралах и точных решениях одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений со степенными нелинейностями*

А. А. Косов
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН

Э. И. Семенов
Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН

С. П. Голышева
Иркутский государственный аграрный университет им. А. А. Ежевского

Аннотация. Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений со степенными нелинейностями. Системы такого вида возникают в качестве систем сравнения в задачах анализа устойчивости по нелинейному приближению и при применении метода редукции к системам с переключениями. Такого же вида уравнения встречаются также при построении методом редукции точных решений систем реакции-диффузии, моделируемых системами уравнений в частных производных параболического типа со степенными нелинейностями, характеризующими реагирование компонент смеси. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений со степенными нелинейностями используются в математической биологии как модели взаимодействующих биологических видов. Получены условия на параметры системы, при выполнении которых она имеет явные точные решения, представимые степенными либо экспоненциальными функциями времени. Найдены условия существования первых интегралов системы, задаваемых комбинациями степенных и логарифмических функций от фазовых переменных. Приводится целый ряд примеров, иллюстрирующих полученные результаты.

Ключевые слова: нелинейная система ОДУ, задача Коши, точные решения, первый интеграл, редукция.

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-08-06680) и Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-8081.2016.9).

1. Введение и постановка задачи

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) со степенными нелинейностями

$$\dot{x}_k = S_k x_k^{\lambda_k} + x_k^{\mu_k} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}\, x_j^{\nu_j}, \quad x_k = x_k(t), \quad \dot{x}_k = \frac{dx_k}{dt}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{1.1}$$

Здесь коэффициенты S_k, α_{kj} являются вещественными числами, а показатели степеней λ_k, μ_k, ν_k считаются рациональными числами с нечетными знаменателями, если система (1.1) рассматривается в полном фазовом пространстве $\mathbf{x} = \mathrm{col}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и произвольными вещественными числами, если система (1.1) рассматривается в неотрицательном ортанте $\mathbb{R}^n_+$. Системы вида (1.1) возникают в качестве систем сравнения в задачах анализа устойчивости по нелинейному приближению [1] и при применении метода редукции к системам с переключениями [6]. Уравнения вида (1.1) появляются также при построении методом редукции аналогично [2; 3] точных решений систем реакции-диффузии, моделируемых системами уравнений в частных производных параболического типа со степенными нелинейностями, характеризующими реагирование компонент смеси. Поэтому изучение системы (1.1) и выявление качественных свойств ее решений имеет значение для более широкого класса дифференциальных уравнений и может быть распространено на существенно более общие и сложные системы, редуцируемые к (1.1).

Система ОДУ вида (1.1) имеет и самостоятельное значение, поскольку встречается в математической биологии как модель взаимодействующих биологических видов, составляющих биоценоз или искусственно культивируемых человеком в сельскохозяйственном производстве [4; 5]. При такой интерпретации системы (1.1) коэффициенты S_k обычно трактуются как коэффициенты воспроизводства (например, рождаемости жертв в отсутствии хищников) когда они положительны или как коэффициенты вымирания (например, смертности хищников при полном отсутствии жертв), когда они отрицательны. Коэффициенты же α_{kj} характеризуют трофические цепи, показывая, например, эффективность различных кормов для продуктивности сельскохозяйственных животных, либо влияние обилия определенного типа жертв на скорость размножения хищников в естественном биоценозе. Показатели степени λ_k, μ_k, ν_k при этом могут отражать скорости и типы взаимодействия в трофических цепочках. В простейших экологических моделях все показатели считаются обычно равными единице, при этом система (1.1) все равно остается нелинейной.

Начиная с первых простейших двумерных экологических моделей Лотки – Вольтерры изучение свойств решений нацеливалось на построение первых интегралов и нахождение периодических решений, траектории которых в двумерном случае совпадают с линиями уровня первого интеграла. Первая модель Лотки и строилась с целью объяснить периодические колебания уловов рыбы в Адриатическом море [4]. Основная цель данной статьи — получение точных решений и построение первых интегралов нелинейной многомерной системы (1.1), в которой не все показатели степеней являются единичными. Получены условия на параметры системы (1.1), при выполнении которых она имеет явные точные решения, представимые степенными либо экспоненциальными функциями времени. Найдены условия существования первых интегралов системы (1.1), задаваемых комбинациями степенных и логарифмических функций от фазовых переменных. Приводится целый ряд примеров, иллюстрирующих полученные результаты.

2. Точные решения системы (1.1)

Исследование автономной системы ОДУ (1.1) начнем с построения некоторых ее частных решений. Докажем, что справедливы утверждения.

Утверждение 1. *Если параметры системы* (1.1) *таковы, что выполняются условия:*
1) $\lambda_k < 1$ *для всех* $k = \overline{1,n}$*;*
2) $\dfrac{\nu_k}{1-\lambda_k} = p = \mathrm{const}$ *для всех* $k = \overline{1,n}$*;*
3) вектор $\mathbf{h} = \mathrm{col}\Big((1-\lambda_1)^p\, S_1^p, \dots, (1-\lambda_n)^p\, S_n^p\Big)$ *является решением системы линейных алгебраических уравнений* (СЛАУ) $A\mathbf{h} = 0$*, где матрица* A *имеет вид*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix}, \qquad (2.1)$$

то система (1.1) *имеет точное решение*

$$x_k(t) = \Big[(1-\lambda_k)\, S_k\, (t-t_0)\Big]^{\frac{1}{1-\lambda_k}},$$

$k = \overline{1,n}$*, удовлетворяющее начальным условиям* $x_k(t_0) = 0$, $k = \overline{1,n}$.

Доказательство. С учетом условия 2 перепишем систему (1.1) в следующем виде:

$$x_k^{-\mu_k}\left(\dot{x}_k - S_k x_k^{\lambda}\right) = \sum_{j\neq k} \alpha_{kj}\, x_j^{p(1-\lambda_k)}, \quad k = \overline{1,n}, \quad n > 2. \qquad (2.2)$$

При выполнении условия 1 ОДУ стоящие в круглых скобках, с начальными условиями $x_k(t_0)=0$, имеют частные решения $x_k(t)=[\varphi(t)]^{\frac{1}{1-\lambda_k}}$, где $\varphi(t)=(1-\lambda_k)\,S_k\,(t-t_0)$. На указанных частных решениях левая часть (2.2) обращается в нуль и равенства (2.2) примут вид

$$0=(t-t_0)^p\cdot\sum_{j\neq k}\alpha_{kj}\,(1-\lambda_k)^p\,S_j^p,\quad p=\frac{\nu_k}{1-\lambda_k},\quad k=\overline{1,n},$$

которые эквивалентны СЛАУ $A\mathbf{h}=0$, где вектор $\mathbf{h}$ определен в условии 3, а матрица A задается формулой (2.1). Утверждение доказано. □

Замечание 1. Если сверх того условие 2 выполняется для $p=1$, то система (1.1) имеет семейство точных решений $x_k(t)=\left[x_{k0}^{1-\lambda_1}+(1-\lambda_k)\,S_k\,(t-t_0)\right]^{\frac{1}{1-\lambda_k}}$, $k=\overline{1,n}$, удовлетворяющее начальным условиям $x_k(t_0)=x_{k0}$, $k=\overline{1,n}$, которые следует брать так, чтобы вектор $\mathbf{h}_0=\mathrm{col}\left(x_{10}^{1-\lambda_1},\ldots,x_{n0}^{1-\lambda_n}\right)$ был решением следующей СЛАУ: $A\mathbf{h}_0=0$, где матрица A задается формулой (2.1).

Замечание 2. При выполнении условия 2 в усиленном виде с $p=1$ и условия 3, первое условие на λ_k становится ненужным.

Утверждение 2. *Пусть в системе* (1.1) *для всех* $k=\overline{1,n}$ *выполнены следующие условия:* $\lambda_k=\lambda$, $\lambda\neq 1$, $\nu_k=\nu$, $\mu_k=\mu$, $\lambda=\mu+\nu$ *и начальные условия имеют вид* $x_k(0)=x_{k0}$. *Кроме того, параметры* S_k, α_{kj} *и начальные данные* x_{k0} *удовлетворяют системе нелинейных алгебраических уравнений*

$$\gamma x_{k0}=S_kx_{k0}^{\lambda}+x_{k0}^{\mu}\sum_{j\neq k}\alpha_{kj}x_{j0}^{\nu}. \tag{2.3}$$

Тогда система (1.1) *имеет частные решения* $x_k(t)=x_{k0}(1+t)^{\gamma}$, *где* $\gamma=\dfrac{1}{1-\lambda}$.

В справедливости этого утверждения можно убедиться непосредственной подстановкой функций $x_k(t)=x_{k0}(1+t)^{\gamma}$ в систему (1.1).

Утверждение 3. *Пусть в системе* (1.1) *для всех* $k=\overline{1,n}$, $n>2$ *выполнены следующие условия:* $\lambda_k=1$, $\nu_k=\nu$, $S_k=S$. *Кроме того, параметры* α_{kj} *и начальные данные* $x_k(0)=x_{k0}>0$ *удовлетворяют следующей* СЛАУ*:* $A\mathbf{g}=0$, *где вектор* $\mathbf{g}=\mathrm{col}\left((x_{10})^{\nu},(x_{20})^{\nu},\ldots,(x_{n0})^{\nu}\right)$, *а матрица* A *имеет вид* (2.1). *Тогда система* (1.1) *имеет частные решения* $x_k(t)=x_{k0}\exp{(St)}$.

Доказательство. С учетом условий утверждения $\lambda_k = 1$, $\nu_k = \nu$, $S_k = S$ для всех $k = \overline{1,n}$, $n > 2$ перепишем систему (1.1) в следующем виде:

$$x_k^{-\mu_k} \left(\dot{x}_k - S x_k\right) = \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}\, x_j^{\nu}, \quad k = \overline{1,n}, \quad n > 2. \tag{2.4}$$

ОДУ, стоящие в круглых скобках, с начальными условиями $x_k(0) = x_{k0} > 0$ имеют частные решения $x_k(t) = x_{k0} \exp\left(St\right)$. Следовательно, на указанных частных решениях левая часть (2.4) обращается в нуль и равенства (2.4) примут вид

$$0 = e^{\nu St} \cdot \sum_{j \neq k} \alpha_{kj} \left(x_{j0}\right)^{\nu}, \quad k = \overline{1,n}, \quad n > 2,$$

которые эквивалентны СЛАУ $A\mathbf{g} = 0$, где вектор $\mathbf{g}$ определен в условиях утверждения, а матрица A задается формулой (2.1). Утверждение доказано. □

Утверждение 4. *Пусть в системе* (1.1) *для всех* $k = \overline{1,n}$ *выполнены следующие условия:* $\lambda_k = 1$, $\mu_k = \mu$, $\nu_k = \nu$, $\mu + \nu = 1$ *и начальные условия имеют вид* $x_k(0) = x_{k0}$. *Кроме того, параметры* S_k, α_{kj} *и начальные данные* x_{k0} *удовлетворяют системе нелинейных алгебраических уравнений*

$$\left(\gamma - S_k\right) x_{k0} = x_{k0}^{\mu} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj} x_{j0}^{\nu}. \tag{2.5}$$

Тогда система (1.1) *имеет частные решения* $x_k(t) = x_{k0} e^{\gamma t}$, *где* $\gamma \neq 0$ *— произвольная постоянная.*

В справедливости этого утверждения можно убедиться непосредственной подстановкой функций $x_k(t) = x_{k0} e^{\gamma t}$ в систему (1.1).

3. Первые интегралы системы (1.1)

Покажем, что автономная система ОДУ (1.1) при определенных соотношениях на параметры допускает первые интегралы.

Утверждение 5. *Пусть параметры системы* (1.1) *удовлетворяют условиям:*
1. $\lambda_k = 1$, $k = \overline{m+1, n}$, $m < n$;
2. $\nu_k = \mu_k - 1$, $k = \overline{m+1, n}$;
3. $\nu_k = \mu_k - \lambda_k$, $k = \overline{1, m}$
и следующая система алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k S_k = 0, \quad A_k \alpha_{kj} + A_j \alpha_{jk} = 0, \quad k = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1, k-1} \tag{3.1}$$

имеет нетривиальное решение $(A_1, \ldots, A_n)$. *Тогда система* (1.1) *имеет первый интеграл*

$$J = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{1-\lambda_k} x_k^{1-\lambda_k} + \sum_{k=m+1}^{n} A_k \ln x_k. \tag{3.2}$$

Доказательство. Производная от выражения (3.2) в силу системы (1.1) имеет вид

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{k=1}^{m} A_k x_k^{-\lambda_k} \left[S_k x_k^{\lambda_k} + x_k^{\mu_k} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}\, x_j^{\nu_j} \right] +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{n} A_k x_k^{-1} \left[S_k x_k^{\lambda_k} + x_k^{\mu_k} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}\, x_j^{\nu_j} \right].$$

С учетом условий 1–3 последнее равенство перепишется как

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{k=1}^{m} A_k S_k + \sum_{k=1}^{m} A_k x_k^{\mu_k-\lambda_k} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}\, x_j^{\mu_j-\lambda_j} +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{n} A_k S_k + \sum_{k=m+1}^{n} A_k x_k^{\mu_k-1} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}\, x_j^{\mu_j-\lambda_j}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k S_k + \sum_{k=1}^{m} A_k x_k^{\mu_k-\lambda_k} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}\, x_j^{\mu_j-\lambda_j} +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{n} A_k x_k^{\mu_k-\lambda_k} \sum_{j \neq k} \alpha_{kj}\, x_j^{\mu_j-\lambda_j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k S_k + \sum_{k=\overline{1,n},\, j=\overline{1,k-1}} (A_k \alpha_{kj} + A_j \alpha_{jk})\, x_k^{\mu_k-\lambda_k} x_j^{\mu_j-\lambda_j}.$$

Таким образом, если постоянные A_k, $k = \overline{1,n}$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений (3.1), то $\dfrac{dJ}{dt} = 0$. Что и требовалось доказать. □

Замечание 3. Утверждение 5 останется справедливым и для случаев, когда $\lambda_k \neq 1$ для всех $k = \overline{1,n}$ и $\lambda_k = 1$ для всех $k = \overline{1,n}$. В первом случае выражение для первого интеграла (3.2) не будет содержать логарифмические члены, а во-втором — степенные.

Замечание 4. Система (3.1) есть линейная однородная система $N = \dfrac{n(n-1)}{2} + 1$ уравнений относительно $n < N$ неизвестных $(A_1, \dots, A_n)$. Для существования нетривиальных решений необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы r был меньше n. При $r = n - 1$ выражение (3.2) дает лишь единственный первый интеграл, коэффициенты которого A_k, $k = \overline{1,n}$ определены с точностью до произвольного отличного от нуля множителя. При $r < n - 1$ выражение (3.2) дает семейство первых интегралов, коэффициенты которого A_k, $k = \overline{1,n}$ зависят от $n - r \geq 2$ произвольных параметров.

Пример 1. Пусть $n = 3$ и выполнены условия $\lambda_k \neq 1$ для всех $k = \overline{1,3}$. В этом случае следующая автономная система ОДУ:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= S_1 x_1^{\lambda_1} + \alpha_{12} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2 - \lambda_2} + \alpha_{13} x_1^{\mu_1} x_3^{\mu_3 - \lambda_3}, \\ \dot{x}_2 &= S_2 x_2^{\lambda_2} + \alpha_{21} x_1^{\mu_1 - \lambda_1} x_2^{\mu_2} + \alpha_{23} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3 - \lambda_3}, \\ \dot{x}_3 &= S_3 x_3^{\lambda_3} + \alpha_{31} x_1^{\mu_1 - \lambda_1} x_3^{\mu_3} + \alpha_{32} x_2^{\mu_2 - \lambda_2} x_3^{\mu_3}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

по утверждению 5 имеет первый интеграл вида $J = \sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{A_k}{1-\lambda_k}\, x_k^{1-\lambda_k}$. При этом неизвестные A_1, A_2, A_3 удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} A_1 S_1 + A_2 S_2 + A_3 S_3 = 0, \quad A_1 \alpha_{12} + A_2 \alpha_{21} = 0, \\ A_1 \alpha_{13} + A_3 \alpha_{31} = 0, \quad A_2 \alpha_{23} + A_3 \alpha_{32} = 0. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Ранг матрицы этой системы равен 3. Поэтому для существования нетривиальных решений потребуем, например, равенство нулю всех миноров третьего порядка, что приводит к следующим соотношениям на параметры системы:

$$\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{32}\alpha_{21} = 0, \quad \alpha_{23}\alpha_{31} S_1 + \alpha_{13}\alpha_{32} S_2 - \alpha_{13}\alpha_{23} S_3 = 0. \tag{3.5}$$

При выполнении этих равенств ранг матрицы системы (3.4) будет равен 2 и следовательно она имеет нетривиальное решение: $A_1 = -\dfrac{\alpha_{31}}{\alpha_{13}}\, a$, $A_2 = -\dfrac{\alpha_{32}}{\alpha_{23}}\, a$, $A_3 = a$, где $a \neq 0$ — произвольная постоянная. Таким образом, система (3.3), параметры которой удовлетворяют равенствам (3.5) имеет следующий первый интеграл:

$$J_1 = \frac{\alpha_{31}}{(1-\lambda_1)\,\alpha_{13}}\, x_1^{1-\lambda_1} + \frac{\alpha_{32}}{(1-\lambda_2)\,\alpha_{23}}\, x_2^{1-\lambda_2} - \frac{1}{1-\lambda_3}\, x_3^{1-\lambda_3} = \mathrm{const}.$$

Пример 2. Рассмотрим систему (1.1) для $n = 2$, которая в этом случае примет вид

$$\dot{x}_1 = S_1 x_1^{\lambda_1} + \alpha_{12} x_1^{\mu_1} x_2^{\nu_2}, \quad \dot{x}_2 = S_2 x_2^{\lambda_2} + \alpha_{21} x_2^{\mu_2} x_1^{\nu_1}. \qquad (3.6)$$

Применяя утверждение 5, покажем, что существуют 4 различных варианта условий на параметры S_i, λ_i, μ_i, ν_i, $(i = 1, 2)$, α_{12}, α_{21}, при которых система (3.6) имеет первые интегралы.

1. Пусть параметры системы (3.6) удовлетворяют следующим условиям:

$$\lambda_1 \neq 1, \quad \lambda_2 \neq 1, \quad \nu_1 = \mu_1 - \lambda_1, \quad \nu_2 = \mu_2 - \lambda_2, \quad \alpha_{21} S_1 - \alpha_{12} S_2 = 0,$$

тогда система (3.6) имеет первый интеграл

$$J_1 = (1 - \lambda_2)\, \alpha_{21} x_1^{1-\lambda_1} - (1 - \lambda_1)\, \alpha_{12} x_2^{1-\lambda_2} \equiv \mathcal{C}_1,$$

где $\mathcal{C}_1$ — произвольная вещественная постоянная.

2. Пусть параметры системы (3.6) удовлетворяют следующим условиям:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \nu_1 = \mu_1 - 1, \quad \nu_2 = \mu_2 - 1, \quad \alpha_{21} S_1 - \alpha_{12} S_2 = 0,$$

тогда система (3.6) имеет первый интеграл

$$J_2 = \alpha_{21} \ln x_1 - \alpha_{12} \ln x_2 \equiv \mathcal{C}_2,$$

где $\mathcal{C}_2$ — произвольная вещественная постоянная.

3. Пусть параметры системы (3.6) удовлетворяют следующим условиям:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 \neq 1, \quad \nu_1 = \mu_1 - 1, \quad \nu_2 = \mu_2 - \lambda_2, \quad \alpha_{21} S_1 - \alpha_{12} S_2 = 0,$$

тогда система (3.6) имеет первый интеграл

$$J_3 = (1 - \lambda_2)\, \alpha_{21} \ln x_1 - \alpha_{12} x_2^{1-\lambda_2} \equiv \mathcal{C}_3,$$

где $\mathcal{C}_3$ — произвольная вещественная постоянная.

4. Пусть параметры системы (3.6) удовлетворяют следующим условиям:

$$\lambda_1 \neq 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \nu_1 = \mu_1 - \lambda_1, \quad \nu_2 = \mu_2 - 1, \quad \alpha_{21} S_1 - \alpha_{12} S_2 = 0,$$

тогда система (3.6) имеет первый интеграл

$$J_4 = \alpha_{21} x_1^{1-\lambda_1} - (1 - \lambda_1)\, \alpha_{12} \ln x_2 \equiv \mathcal{C}_4,$$

где $\mathcal{C}_4$ — произвольная вещественная постоянная.

Кроме первого интеграла (3.2) автономная система (1.1) обладает и другими первыми интегралами. Так нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений.

Утверждение 6. *Пусть* $n = 2$ *и выполнены равенства* $\lambda_i = 1$, $\nu_i = \mu_i - 1$, $(i = 1, 2)$. *Кроме того, пусть параметры системы удовлетворяют условию* $\det A = 0$, *где* $A = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ \alpha_{12} & \alpha_{21} \end{bmatrix}$ *— вещественная матрица. Тогда соответствующая система имеет первый интеграл* $J = x_1^{h_1} x_2^{h_2}$, *где* h_1, h_2 *есть компоненты вектора* $\mathbf{h} = \mathrm{col}\,(h_1, h_2)$ *являющегося нетривиальным решением уравнения* $A\mathbf{h} = 0$.

Утверждение 7. *Пусть* $n = 3$ *и выполнены равенства* $\lambda_i = 1$, $\nu_i = \mu_i - 1$, $(i = \overline{1, 3})$. *Кроме того, параметры системы удовлетворяют условиям*

$$(\mu_1 - 1)\, S_1 + (\mu_2 - 1)\, S_2 = 0, \quad (\mu_1 - 1)\, S_1 + (\mu_3 - 1)\, S_3 = 0,$$

$$(\mu_2 - 1)\, S_2 + (\mu_3 - 1)\, S_3 = 0,$$

$$(\mu_1 - 1)\, \alpha_{12} + (\mu_2 - 1)\, \alpha_{21} = 0, \quad (\mu_1 - 1)\, \alpha_{13} + (\mu_3 - 1)\, \alpha_{31} = 0,$$

$$(\mu_2 - 1)\, \alpha_{23} + (\mu_3 - 1)\, \alpha_{32} = 0,$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{23} & 0 & \alpha_{21} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{31} \end{bmatrix} = 0.$$

Тогда соответствующая система имеет первый интеграл

$$J = b_1 x_1^{\mu_1 - 1} x_2^{\mu_2 - 1} + b_2 x_1^{\mu_1 - 1} x_3^{\mu_3 - 1} + b_3 x_2^{\mu_2 - 1} x_3^{\mu_3 - 1},$$

где b_1, b_2, b_3 *есть компоненты вектора* $\mathbf{b} = \mathrm{col}\,(b_1, b_2, b_3)$, *являющегося нетривиальным решением уравнения* $A\mathbf{b} = 0$.

Утверждение 8. *Пусть* $n = 4$ *и выполнены равенства* $\lambda_i = 1$, $\nu_i = \mu_i - 1$, $(i = \overline{1, 4})$. *Кроме того, параметры системы удовлетворяют условиям*

$$(\mu_1 - 1)\, S_1 + (\mu_2 - 1)\, S_2 = 0, \quad (\mu_1 - 1)\, S_1 + (\mu_3 - 1)\, S_3 = 0,$$

$$(\mu_1 - 1)\, S_1 + (\mu_4 - 1)\, S_4 = 0, \quad (\mu_2 - 1)\, S_2 + (\mu_3 - 1)\, S_3 = 0,$$

$$(\mu_2 - 1)\, S_2 + (\mu_4 - 1)\, S_4 = 0, \quad (\mu_3 - 1)\, S_3 + (\mu_4 - 1)\, S_4 = 0,$$

$$(\mu_1 - 1)\, \alpha_{12} + (\mu_2 - 1)\, \alpha_{21} = 0, \quad (\mu_1 - 1)\, \alpha_{13} + (\mu_3 - 1)\, \alpha_{31} = 0,$$

$$(\mu_1 - 1)\, \alpha_{14} + (\mu_4 - 1)\, \alpha_{41} = 0, \quad (\mu_2 - 1)\, \alpha_{23} + (\mu_3 - 1)\, \alpha_{32} = 0,$$

$$(\mu_2 - 1)\, \alpha_{24} + (\mu_4 - 1)\, \alpha_{42} = 0, \quad (\mu_3 - 1)\, \alpha_{34} + (\mu_4 - 1)\, \alpha_{43} = 0,$$

$$A_{12}\alpha_{13} + A_{13}\alpha_{12} = 0, \quad A_{12}\alpha_{14} + A_{14}\alpha_{12} = 0, \quad A_{13}\alpha_{14} + A_{14}\alpha_{13} = 0,$$

$$A_{12}\alpha_{23} + A_{23}\alpha_{21} = 0, \quad A_{12}\alpha_{24} + A_{24}\alpha_{21} = 0, \quad A_{23}\alpha_{24} + A_{24}\alpha_{23} = 0,$$

$$A_{13}\alpha_{32} + A_{23}\alpha_{31} = 0, \quad A_{13}\alpha_{34} + A_{34}\alpha_{31} = 0, \quad A_{23}\alpha_{34} + A_{34}\alpha_{32} = 0,$$

$$A_{14}\alpha_{42} + A_{24}\alpha_{41} = 0, \quad A_{14}\alpha_{43} + A_{34}\alpha_{41} = 0, \quad A_{24}\alpha_{43} + A_{34}\alpha_{42} = 0.$$

Тогда соответствующая система имеет первый интеграл

$$J = A_{12}x_1^{\mu_1-1}x_2^{\mu_2-1} + A_{13}x_1^{\mu_1-1}x_3^{\mu_3-1} + A_{14}x_1^{\mu_1-1}x_4^{\mu_4-1} + A_{23}x_2^{\mu_2-1}x_3^{\mu_3-1} +$$

$$A_{24}x_2^{\mu_2-1}x_4^{\mu_4-1} + A_{34}x_3^{\mu_3-1}x_4^{\mu_4-1}.$$

Пример 3. Для случая 1 из примера 2 система (3.6) запишется в следующем виде:

$$\dot{x}_1 = S_1 x_1^{\lambda_1} + \alpha_{12}x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2-\lambda_2}, \quad \dot{x}_2 = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}}\,S_1 x_2^{\lambda_2} + \alpha_{21}x_2^{\mu_2}x_1^{\mu_1-\lambda_1}. \tag{3.7}$$

Эта система имеет первый интеграл J_1. С учетом значения интеграла J_1 уравнения системы (3.7) разделяются. Так уравнение для функции $x_2(t)$ примет следующий вид:

$$\dot{x}_2 = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}} S_1 x_2^{\lambda_2} + \alpha_{21}x_2^{\mu_2}\left[\left(\frac{1-\lambda_1}{1-\lambda_2}\right)\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}}\,x_2^{1-\lambda_2} + \mathcal{C}_1\right]^{\frac{\mu_1-\lambda_1}{1-\lambda_1}},$$

которое сводится с квадратуре $\Phi\left(x_2, x_{20}\right) = \alpha_{21}\left(t - t_0\right)$, где

$$\Phi\left(x_2, x_{20}\right) = \int\limits_{x_{20}}^{x_2} \frac{d\xi}{\frac{S_1}{\alpha_{12}}\xi^{\lambda_2} + \xi^{\mu_2}\left[\left(\frac{1-\lambda_1}{1-\lambda_2}\right)\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}}\,\xi^{1-\lambda_2} + \mathcal{C}_1\right]^{\frac{\mu_1-\lambda_1}{1-\lambda_1}}}. \tag{3.8}$$

Интеграл (3.8) в элементарных функциях вычисляется только при определенных значениях параметров $\lambda_i \neq 1$, μ_i $(i = 1, 2)$, S_1, α_{12}, α_{21} и постоянной $\mathcal{C}_1$. Например, при $\mu_1 = 1$ подынтегральное выражение значительно упростится и интеграл (3.8) запишется как

$$\Phi\left(x_2, x_{20}\right) = \int\limits_{x_{20}}^{x_2} \frac{d\xi}{a\xi^{\lambda_2} + b\xi^{\mu_2-\lambda_2+1} + \mathcal{C}_1\xi^{\mu_2}}, \tag{3.9}$$

где $a = \dfrac{S_1}{\alpha_{12}}$, $b = \left(\dfrac{1-\lambda_1}{1-\lambda_2}\right)\dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}}$.

Покажем, что с использованием первого интеграла J_1 легко построить решение задачи Коши для системы (3.7).

Пример 4. Интеграл (3.9) при $\mu_2 = 1$ запишется как

$$\int\limits_{x_{20}}^{x_2} \frac{d\xi}{a\xi^{\lambda_2} + b\xi^{2-\lambda_2} + \mathcal{C}_1\xi}. \tag{3.10}$$

Он легко вычисляется в элементарных функциях, при этом возможны следующие случаи:
1. $\lambda_2 \neq 1$ и $4ab - \mathcal{C}_1^2 > 0$. В этом случае получим, что задача Коши для системы ОДУ:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= S_1 x_1^{\lambda_1} + \alpha_{12} x_1 x_2^{1-\lambda_2}, \quad x_1(t_0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2 &= \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}} S_1 x_2^{\lambda_2} + \alpha_{21} x_2 x_1^{1-\lambda_1}, \quad x_2(t_0) = x_{20}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

где $\lambda_1 \neq 1$, $\lambda_2 \neq 1$, $S_1 \neq 0$, $\alpha_{12} \neq 0$, $\alpha_{21} \neq 0$ — произвольные вещественные параметры, имеет общее решение

$$x_1(t) = \left[\frac{C}{2} + \frac{\sqrt{q}}{2}\operatorname{tg}\Omega\right]^{\frac{1}{1-\lambda_1}}, \quad x_2(t) = \left[\frac{\sqrt{q}}{2b}\operatorname{tg}\Omega - \frac{C}{2b}\right]^{\frac{1}{1-\lambda_2}}.$$

Здесь для удобства введены следующие обозначения:

$$\Omega = \frac{1}{2}(1-\lambda_2)\sqrt{q}\,\alpha_{21}(t-t_0) + \operatorname{arctg}\left(\frac{2b\,x_{20}^{1-\lambda_2} + C}{\sqrt{q}}\right),$$

$$C = x_{10}^{1-\lambda_1} - b x_{20}^{1-\lambda_2}, \quad a = \frac{S_1}{\alpha_{12}}, \quad b = \frac{1-\lambda_1}{1-\lambda_2}\cdot\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}}, \quad q = 4ab - C^2.$$

Отметим, что условие $4ab - \mathcal{C}_1^2 > 0$ при котором вычислялся интеграл (3.10) накладывает ограничение на параметры и выбор начальных данных задачи Коши (3.11) в виде следующего неравенства:

$$\frac{4(1-\lambda_1)}{1-\lambda_2}\cdot\frac{S_1}{\alpha_{21}} - \left(x_{10}^{1-\lambda_1} - b x_{20}^{1-\lambda_2}\right)^2 > 0.$$

2. $\lambda_2 \neq 1$ и $\mathcal{C}_1^2 - 4ab > 0$. В этом случае задача Коши для системы ОДУ (3.11) имеет общее решение

$$x_1(t) = \left(C - b\cdot\frac{Q\left(x_{20} + Px_{20}^{\lambda_2}\right)e^T - P\left(x_{20} + Qx_{20}^{\lambda_2}\right)}{\left(x_{20} + Px_{20}^{\lambda_2}\right)e^T - \left(x_{20} + Qx_{20}^{\lambda_2}\right)}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_1}},$$

$$x_2(t) = \left(-\frac{Q\left(x_{20} + Px_{20}^{\lambda_2}\right)e^T - P\left(x_{20} + Qx_{20}^{\lambda_2}\right)}{\left(x_{20} + Px_{20}^{\lambda_2}\right)e^T - \left(x_{20} + Qx_{20}^{\lambda_2}\right)}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_2}}.$$

Здесь для удобства введены следующие обозначения:

$$T = (1-\lambda_2)\sqrt{q}\,\alpha_{21}\,(t-t_0)\,, \quad P = \frac{C-\sqrt{q}}{2b}, \quad Q = \frac{C+\sqrt{q}}{2b},$$

$$C = x_{10}^{1-\lambda_1} - b x_{20}^{1-\lambda_2}, \quad a = \frac{S_1}{\alpha_{12}}, \quad b = \frac{1-\lambda_1}{1-\lambda_2}\cdot\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}}, \quad q = C^2 - 4ab.$$

Отметим, что условие $4ab - \mathcal{C}_1^2 > 0$ при котором вычислялся интеграл (3.10) накладывает ограничение на параметры и выбор начальных данных задачи Коши (3.11) в виде следующего неравенства:

$$\left(x_{10}^{1-\lambda_1} - b x_{20}^{1-\lambda_2}\right)^2 - \frac{4\,(1-\lambda_1)}{1-\lambda_2}\cdot\frac{S_1}{\alpha_{21}} > 0.$$

Пусть $\mu_k = 1$ и $\nu_k = 1-\lambda_k$ для всех $k=\overline{1,n}$. Тогда по утверждению 5 следующая система ОДУ:

$$\dot{x}_k = S_k x_k^{\lambda_k} + x_k \sum_{j\neq k} \alpha_{kj}\, x_j^{1-\lambda_j}, \tag{3.12}$$

имеет первый интеграл $J = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{A_k}{1-\lambda_k}\, x_k^{1-\lambda_k} = C$, где C — постоянная. Из соотношения первого интеграла выразим неизвестную x_n, которая будет выражаться формулой

$$x_n = \left[C - \frac{1-\lambda_n}{A_n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{A_k}{1-\lambda_k}\, x_k^{1-\lambda_k}\right]^{\frac{1}{1-\lambda_n}}. \tag{3.13}$$

Подставим эту функцию в первые $n-1$ уравнений системы (3.12), которая после некоторой перегруппировки слагаемых примет следующий вид:

$$\dot{x}_k = S_k x_k^{\lambda_k} - \alpha_{kn}\cdot\frac{1-\lambda_n}{1-\lambda_k}\cdot\frac{A_k}{A_n}\, x^{2-\lambda_k} + \alpha_{kn} C x_k +$$

$$x_k \cdot \sum_{j\neq k,\, k=\overline{1,n-1},\, j=\overline{1,k-1}} \left(\alpha_{kj} - \alpha_{kn}\cdot\frac{1-\lambda_n}{1-\lambda_j}\cdot\frac{A_j}{A_n}\right) x_j^{1-\lambda_j}, \quad k=\overline{1,n-1}.$$

Можно заметить, что если потребовать равенство нулю всех выражений стоящих в круглых скобках под знаком суммы, то выписанная система распадается на $n-1$ уравнение, относительно неизвестных x_k, $k=\overline{1,n-1}$. Таким образом, можно сформулировать следующий результат:

Утверждение 9. *Если параметры* S_k, α_{kj} *и неизвестные* A_k, $k = \overline{1,n}$ *удовлетворяют* $\dfrac{1}{2}n(n-1)+1$ *алгебраическим уравнениям* (3.1) *и* $(n-2)(n-1)$ *соотношениям*

$$\alpha_{kj} - \alpha_{kn}\cdot\frac{1-\lambda_n}{1-\lambda_j}\cdot\frac{A_j}{A_n} = 0, \quad k=\overline{1,n-1}, \quad j=\overline{1,k-1}, \tag{3.14}$$

то система (3.12) *распадается на* $n-1$ *уравнение с разделяющимися переменными*

$$\dot{x}_k = S_k x_k^{\lambda_k} - \alpha_{kn}\cdot\frac{1-\lambda_n}{1-\lambda_k}\cdot\frac{A_k}{A_n}\,x^{2-\lambda_k} + \alpha_{kn}Cx_k, \quad k=\overline{1,n-1}, \tag{3.15}$$

при этом x_n *определяется формулой* (3.13).

Пример 5. Пусть $n=3$. В примере 1 было показано, что при выполнении условий (3.5) неизвестные A_k, $k=\overline{1,3}$ определяются формулами $A_1 = -\dfrac{\alpha_{31}}{\alpha_{13}}\,a$, $A_2 = -\dfrac{\alpha_{32}}{\alpha_{23}}\,a$, $A_3 = a$, где $a \neq 0$ — произвольная постоянная. По утверждению 9, чтобы соответствующая этому случаю система (3.12) сводилась к двум независимым уравнениям на функции $x_1(t)$, $x_2(t)$ мы должны потребовать выполнение дополнительных соотношений следующего вида:

$$\alpha_{12} - \frac{1-\lambda_3}{1-\lambda_2}\cdot\frac{A_2}{A_3}\cdot\alpha_{13} = 0, \quad \alpha_{21} - \frac{1-\lambda_3}{1-\lambda_1}\cdot\frac{A_1}{A_3}\cdot\alpha_{23} = 0,$$

Подставляя сюда найденные выше значения A_1, A_2, A_3, получим, что параметры α_{kj}, $k \neq j$, $k=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,k-1}$ помимо условий (3.5) должны удовлетворять равенствам

$$\alpha_{12} + \frac{1-\lambda_3}{1-\lambda_2}\cdot\frac{\alpha_{13}\alpha_{32}}{\alpha_{23}} = 0, \quad \alpha_{21} + \frac{1-\lambda_3}{1-\lambda_1}\cdot\frac{\alpha_{23}\alpha_{31}}{\alpha_{13}} = 0. \tag{3.16}$$

Таким образом, заключаем, что система ОДУ

$$\dot{x}_1 = S_1 x_1^{\lambda_1} + x_1\left(\alpha_{12}x_2^{1-\lambda_2} + \alpha_{13}x_3^{1-\lambda_3}\right),$$

$$\dot{x}_2 = S_2 x_2^{\lambda_2} + x_2\left(\alpha_{21}x_1^{1-\lambda_1} + \alpha_{23}x_3^{1-\lambda_3}\right),$$

$$\dot{x}_3 = S_3 x_1^{\lambda_3} + x_3\left(\alpha_{31}x_1^{1-\lambda_1} + \alpha_{32}x_2^{1-\lambda_2}\right),$$

параметры которой удовлетворяют условиям (3.5), (3.16) сводится к двум независимым уравнениям

$$\dot{x}_1 = S_1 x_1^{\lambda_1} + \frac{1-\lambda_3}{1-\lambda_1}\cdot\alpha_{31}x_1^{2-\lambda_1} + \alpha_{13}Cx_1,$$

$$\dot{x}_2 = S_2 x_2^{\lambda_2} + \frac{1-\lambda_3}{1-\lambda_2} \cdot \alpha_{32} x_2^{2-\lambda_2} + \alpha_{23} C x_2,$$

а функция $x_3(t)$ определяется по формуле

$$x_3(t) = \left[C + \frac{1-\lambda_3}{1-\lambda_1} \cdot \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{13}} x_1(t)^{1-\lambda_1} + \frac{1-\lambda_3}{1-\lambda_2} \cdot \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{23}} x_2(t)^{1-\lambda_2} \right]^{\frac{1}{1-\lambda_3}}.$$

Отсюда, с учетом начальных условий $x_1(t_0) = x_{10}$, $x_2(t_0) = x_{20}$, $x_3(t_0) = x_{30}$ находим

$$C = x_{30}^{1-\lambda_3} - \frac{1-\lambda_3}{1-\lambda_1} \cdot \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{13}} x_{10}^{1-\lambda_1} + \frac{1-\lambda_3}{1-\lambda_2} \cdot \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{23}} x_{20}^{1-\lambda_2}. \tag{3.17}$$

Уравнения на функции $x_1(t)$, $x_2(t)$ сводятся к квадратурам

$$\int\limits_{x_{i0}}^{x_i} \frac{d\xi}{S_i \xi^{\lambda_i} + b_i \xi^{2-\lambda_i} + \mathcal{C}_i \xi} = (t - t_0), \quad x_{i0} = x_i(t_0), \quad i = 1, 2, \tag{3.18}$$

где введены обозначения

$$b_1 = \frac{1-\lambda_3}{1-\lambda_1} \cdot \alpha_{31}, \quad b_2 = \frac{1-\lambda_3}{1-\lambda_2} \cdot \alpha_{32}, \quad \mathcal{C}_1 = \alpha_{13} C, \quad \mathcal{C}_2 = \alpha_{23} C.$$

Здесь постоянная C определяется формулой (3.17). Пусть $q_i = 4S_i b_i - \mathcal{C}_i^2 > 0$, тогда из формулы (3.18) находим

$$x_i(t) = \left[\frac{\sqrt{q_i}}{2b_i} \operatorname{tg} \Omega_i - \frac{\mathcal{C}_i}{2b_i} \right]^{\frac{1}{1-\lambda_i}}, \quad i = 1, 2,$$

где

$$\Omega_i = \frac{(1-\lambda_i)\sqrt{q_i}}{2} (t - t_0) + \operatorname{arctg} \left(\frac{2b_i x_{i0}^{1-\lambda_i} + \mathcal{C}_i}{\sqrt{q_i}} \right), \quad i = 1, 2.$$

Пусть $p_i = \mathcal{C}_i^2 - 4S_i b_i > 0$, тогда из формулы (3.18) получим

$$x_i(t) = \left[-\frac{Q_i \left(x_{i0} + P_i x_{i0}^{\lambda_i} \right) e^{T_i} - P_i \left(x_{i0} + Q_i x_{i0}^{\lambda_1} \right)}{\left(x_{i0} + P_i x_{i0}^{\lambda_i} \right) e^{T_i} - \left(x_{i0} + Q_i x_{i0}^{\lambda_i} \right)} \right]^{\frac{1}{1-\lambda_i}}, \quad i = 1, 2,$$

где

$$T_i = (1-\lambda_i)\sqrt{p_i}\,(t - t_0), \quad P_1 = \frac{\mathcal{C}_i - \sqrt{p_i}}{2b_i}, \quad Q_i = \frac{\mathcal{C}_i + \sqrt{p_i}}{2b_i}.$$

Пусть $4S_i b_i - \mathcal{C}_i^2 = 0$, тогда из формулы (3.18) имеем

$$x_i(t) = \left[\frac{1}{\tau_i} - \frac{S_i}{2b_i} \right]^{\frac{1}{1-\lambda_i}}, \ \tau_i = \frac{2b_i}{2b_i x_{i0}^{1-\lambda_i} + S_i} - (1-\lambda_i)\, b_i\, (t - t_0), \quad i = 1, 2.$$

Список литературы

1. Косов А. А. Об устойчивости сложных систем по нелинейному приближению / А. А. Косов // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 10. – С. 1432–1434.
2. Рудых Г. А. Построение точных решений многомерного квазилинейного уравнения теплопроводности / Г. А. Рудых, Э. И. Семенов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1993. – Т.33, № 8. – С. 1228–1239.
3. Рудых Г. А. Точные неотрицательные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии / Г. А. Рудых, Э. И. Семенов // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т.39, № 5. – С. 1131–11140.
4. Свирежев Ю. М. Устойчивость биологических сообществ / Ю. М. Свирежев, Д. О. Логофет. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
5. Murray J. D. Mathematical biology. I. An Introduction / J. D. Murray. – Springer, 2002. – 552 p.
6. Vassilyev S. N. Stability Analysis of Nonlinear Switched Systems via Reduction Method / S. N. Vassilyev, A. A. Kosov, A. I. Malikov // Proceedings of the 18th IFAC World Congress (Milano, Italy, August 28–September 2, 2011). Milano, 2011. – P. 5718–5723.

Косов Александр Аркадьевич, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952) 427100 (e-mail: kosov_idstu@mail.ru)

Семенов Эдуард Иванович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952) 453099
(e-mail: edwseiz@gmail.com)

Голышева Светлана Павловна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики, Иркутский государственный аграрный университет им. А. А. Ежевского, 664038, Иркутская обл., Иркутский р-он, пос. Молодежный
(e-mail: golyshevasp@rambler.ru)

A. A. Kosov, E. I. Semenov, S. P. Golyscheva

First Integrals and Exact Solutions of a System of Ordinary Differential Equations with Power Nonlinearity

Abstract. The system of ordinary differential equations with degree nonlinearities is considered. Systems of such kind arise as comparison systems at stability analysis by means non-linear approximation and at application of reduction method to switched systems. This same kind the equations meet also at construction by reduction method of exact solutions the systems of reaction diffusion modeled by sets of equations in partial derivatives of parabolic type with the degree nonlinearities characterizing reactions of components of mixture. Systems of ordinary differential equations with degree nonlinearities are used in mathematical biology as models of the interacting biological species. We obtain the conditions on parameters of system under which it has explicit exact solutions representable by combination of degree or exponential functions of time. The existence conditions of presented by combinations of degree and logarithmic functions with respect to state variables the first integrals of system are obtained. A number of examples is given, illustrating the received results.

Keywords: nonlinear ODE system, Cauchy problem, exact solutions, first integral, reduction.

References

1. Kosov A.A. On the stability of complex systems by the nonlinear approximation. *Differential Equations*, 1997, vol. 33, no 10, pp. 1440-1442.
2. Rudykh G.A., Semenov E.I. Construction of exact solutions of the multidimensional quasilinear heat equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1993, vol. 33, no 8, pp. 1087–1097.
3. Rudykh G.A., Semenov E.I. Exact nonnegative solutions to the multidimensional nonlinear diffusion equation. *Siberian Mathematical Journal*, 1998, vol. 39, Issue 5, pp. 977-985. https://doi.org/10.1007/BF02672920
4. Svirezhev Y.M. *Ustoychivost' biologicheskikh soobscshestv* [The stability of biological communities]. M., Nauka Publ., 1978. 352 p. (in Russian)
5. Murray J.D. Mathematical biology. I. An Introduction. Springer, 2002. 552 p.
6. Vassilyev S.N. Stability Analysis of Nonlinear Switched Systems via Reduction Method. *Proceedings of the 18th IFAC World Congress, Milano, Italy, August 28 – September 2, 2011*. Milano, 2011, pp. 5718-5723. https://doi.org/10.3182/20110828-6-IT-1002.01936

Kosov Alexander Arkadievich, Leading Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Post Box 292, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, tel.: (3952) 427100
(e-mail: kosov_idstu@mail.ru)

Semenov Edward Ivanovich, Senior Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Post Box 292, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, tel.: (3952) 453099
(e-mail: edwseiz@gmail.com)

Golysheva Svetlana Pavlovna, Candidate of Science (Pedagogy), Assistant Professor, Department of Mathematics, A. A. Ezhevsky Irkutsk State Agrarian University, (e-mail: golyshevasp@rambler.ru)