Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 4. С. 94—100

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 512.552.12:512.541

О радикале Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевой периодической группы

В. М. Мисяков
Томский государственный университет

Аннотация. Исследуется действие элементов из радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевой периодической группы на самой группе.

Ключевые слова: абелева группа; кольцо эндоморфизмов; радикал Джекобсона.

В монографии [1] сформулирована проблема 17: «Вычислить радикал кольца эндоморфизмов p-группы (сепарабельной p-группы)». Здесь под радикалом кольца эндоморфизмов p-группы (сепарабельной p-группы) понимается радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов данной группы, а под его вычислением подразумевается описание его элементов в терминах их действия на группе. В работах [10], [9], [5] и [6] описываются элементы из радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов в терминах их действия на периодически полных p-группах, на ω_1-сепарабельных p-группах, на тотально проективных p-группах и на достаточно проективных p-группах соответственно. Обзор этих результатов можно найти, например, в [1]. В данной статье эта задача рассматривается для сепарабельной p-группы и делимой периодической группы. Для сепарабельной p-группы, в частности, получено некоторое решение проблемы 17 [1].

Все группы, рассматриваемые здесь, являются абелевыми. Все понятия, которые не поясняются, являются стандартными, их можно найти, например, в монографиях [1], [2] или [3].

Введем некоторые обозначения: $E(A)$ — кольцо эндоморфизмов группы A; $Aut(A)$ — группа автоморфизмов группы A; $J(E(A))$ — радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов группы A; $o(a)$ — порядок элемента a; $T_p(A)$ — p-компонента периодической части группы A; $A[n] = \{a \in A \mid na = 0\}$ — подмножество элементов группы A; $P(A)$ — множество всех простых чисел p таких, что $T_p(A) \neq 0$; $h_p(a)$, $h_p^*(a)$ — высота и обобщённая p-высота элемента a.

Напомним некоторые понятия. Произвольная группа A называется сепарабельной, если любую её конечную подсистему $\{a_1, \ldots, a_n\}$ можно вложить в прямое слагаемое S группы A, являющееся прямой суммой групп ранга 1.

Далее, для всякого порядкового числа σ под подгруппой $p^\sigma G[p]$ группы G подразумевается подгруппа $p^\sigma G \cap G[p]$.

Следующее свойство некоторых подгрупп будем использовать в дальнейшем.

Замечание 1. Для всякого натурального числа m, порядкового числа σ и простого числа p подгруппы mG, $G[m]$, $p^\sigma G$ и $p^\sigma G[p]$ являются вполне характеристическими в группе G.

Ниже показывается, что лемма 13.1 [10], доказанная Пирсом для сепарабельных p-групп, будет справедлива и в более общем случае.

Предложение 1. *Пусть G — редуцированная p-группа и $\alpha \in E(G)$. Для того, чтобы $\alpha \in Aut(G)$ необходимо и достаточно выполнение равенств $\ker\alpha \bigcap G[p] = 0$ и $\alpha(p^\sigma G[p]) = p^\sigma G[p]$ для любого порядкового числа σ.*

Доказательство. Поскольку необходимость очевидна, то докажем достаточность. Если $\alpha(x) = 0$ и $o(x) = p^k$, то $o(p^{k-1}x) = p$ и $\alpha(p^{k-1}x) = p^{k-1}(\alpha(x)) = 0$. Таким образом, $p^{k-1}x \in \ker\alpha \bigcap G[p] = 0$, что противоречит порядку элемента x. Следовательно, $\ker\alpha = 0$. Покажем, что α — сюръективное отображение. Рассмотрим произвольное $y \in G$, где $o(y) = p^k,\ k \in N$. Доказательство проведём индукцией по k. Пусть $k = 1$ и $h_p^*(y) = \sigma$, тогда из равенства $\alpha(p^\sigma G[p]) = p^\sigma G[p]$ следует существование $x \in p^\sigma G[p]$ такого, что $\alpha(x) = y$. Пусть для любого $l \in N$ такого, что $1 \le l \le k-1$, утверждение справедливо. Пусть $l = k$ и рассмотрим элемент $p^{k-1}y$, принадлежащий $p^\sigma G[p]$ для некоторого порядкового числа $\sigma \ge k-1$. Тогда из равенства $\alpha(p^\sigma G[p]) = p^\sigma G[p]$ следует существование $x_1 \in p^\sigma G[p]$ такого, что $\alpha(x_1) = p^{k-1}y$. Так как $\sigma \ge k-1$, то $p^\sigma G[p] \subseteq p^\sigma G \subseteq p^{k-1}G$. Поэтому, существует $x \in G$ такой, что $x_1 = p^{k-1}x$. Тогда $p^{k-1}y = \alpha(x_1) = \alpha p^{k-1}x$ и $p^{k-1}(y - \alpha x) = 0$. Следовательно, $o(y - \alpha x) \le p^{k-1}$, и, по предположению индукции, существует $z \in G$ такой, что $y - \alpha x = \alpha z$, то есть $y = \alpha(x + z) \in \operatorname{im}\alpha$. Таким образом, $\operatorname{im}\alpha = G$ и $\alpha \in Aut(G)$. $\square$

Далее под радикалом Джекобсона $J(E(G))$ кольца эндоморфизмов $E(G)$ будем понимать следующую его характеризацию: $J(E(G)) = \{\alpha \in E(G) \mid \forall\, \beta \in E(G),\ (1 - \alpha\beta) \in Aut(G)\}$ [10, гл. 4, теорема 15.3].

Пирс в [10] для редуцированной p-группы G без элементов бесконечной p-высоты (то есть для сепарабельной p-группы) вводит идеал $H(G) = \{\alpha \in E(G) \mid \forall\, x \in G[p],\, h_p(x) < \infty \Rightarrow h_p(x) < h_p(\alpha x)\}$. Здесь

$h_p(x) < \infty$ означает, что $h_p(x) = k$ для некоторого неотрицательного целого числа k.

Пусть G — редуцированная p-группа. Введём по аналогии с идеалом $H(G)$ идеал $H^*(G) = \{\alpha \in E(G) \mid \forall\, 0 \neq x \in G[p] \Rightarrow h_p^*(x) < h_p^*(\alpha x)\}$.

В следующем утверждении рассматривается более общий случай, чем в [1, предложение 20.2].

Лемма 1. *Пусть G — редуцированная p-группа, тогда $J(E(G)) \subseteq H^*(G)$.*

Доказательство. Допустим противное, то есть пусть существуют $\alpha \in J(E(G))$ и $0 \neq x \in G[p]$ такие, что $h_p^*(x) = h_p^*(\alpha(x)) = \sigma$. Если σ — конечное порядковое число, то, как вытекает из доказательства предложения 20.2 [1], получаем противоречие с выбором элемента x. Пусть σ — бесконечное порядковое число. Представим группу G в виде: $G =< b > \bigoplus B$. Пусть $a \in < b >$, $h_p^*(a) = k$ и $o(a) = p$. Тогда $h_p^*(\alpha(x)+a) = h_p^*(x+a) = k$ и $o(\alpha(x) + a) = o(x + a) = p$. Следовательно, существуют разложения $G =< c > \bigoplus C =< d > \bigoplus D$, где $\alpha(x) + a \in < c >$ и $x + a \in < d >$. Проводя аналогичные рассуждения как выше, находим эндоморфизм $\varphi \in E(G)$ такой, что $\varphi :< c > \to < d >$, причём $\varphi(\alpha(x) + a) = x + a$ и $\varphi C = 0$. Тогда $(1-\varphi\alpha)(x) = \varphi(a)-a$. Представим элемент a в виде следующих разложений: $a = nc+u = md+v$, где $nc \in < c >$, $u \in C$, $md \in < d >$ и $v \in D$. Следовательно, имеем $(1 - \varphi\alpha)(x) = \varphi(nc + u) - (md + v) = (\varphi(nc) - md) + (-v)$, где $\varphi(nc) - md \in < c >$ и $(-v) \in D$. Так как $\varphi(nc) - md \in < c >$, то $h_p^*(\varphi(nc) - md) = s$ — конечное порядковое число. Тогда $h_p^*((1-\varphi\alpha)(x)) = \min\{h_p^*(\varphi(nc)-md),\, h_p^*(-v)\} \leq s$. Таким образом, эндоморфизм $(1 - \varphi\alpha)$ группы G понизил высоту элемента x, что приводит к противоречию. □

Приведём лемму 14.5 [10], доказанную Пирсом.

Лемма 14.5. *Пусть G — сепарабельная p-группа. Равенство $J(E(G)) = H(G)$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие $(*)$:*

$(*)$ *если $x \in G[p]$, $\alpha \in H(G)$ и $y_n = x + \alpha(x) + \ldots + \alpha^{n-1}(x)$, то существует $y \in G$ такой, что $h_p(y - y_n) \to \infty$ при $n \to \infty$.*

Последовательность $\{y_n\}_{n\in N}$, введённая Пирсом в данной лемме, как будет показано ниже, играет существенную роль при описании элементов из радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов сепарабельной p-группы.

Пусть G — сепарабельная p-группа и $S_p(G) = \{\alpha \in E(G) \mid \forall x \in G[p],\ \forall \beta \in E(G)$ и $y_n = x + (\alpha\beta)(x) + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1}(x),\ n \in N$, последовательность $\{y_n\}_{n\in N}$ сходится$\}$. Сходимость последовательности $\{y_n\}_{n\in N}$ рассматривается здесь в p-адической топологии группы G.

Напомним, что последовательность $\{g_i\}_{i\in N}$ элементов группы G сходится к пределу $g \in G$ в p-адической топологии группы G, если для любого $n \in N$ существует $k \in N$ такое, что $g - g_i \in p^n G$ как только $i \geq k$.

Докажем один из основных результатов данной работы.

Теорема. *Радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов сепарабельной p-группы G имеет вид $J(E(G)) = S_p(G) \cap H(G)$.*

Доказательство. Покажем, что $J(E(G)) \subseteq S_p(G) \cap H(G)$. Поскольку $J(E(G)) \subseteq H(G)$ (см. лемма 1), то осталось показать, что $J(E(G)) \subseteq S_p(G)$. Рассмотрим произвольное $\alpha \in J(E(G))$, тогда $(1 - \alpha\beta) \in Aut(G)$ для любого $\beta \in E(G)$. Следовательно, для любого $x \in G[p]$ найдётся $y \in G[p]$ такой, что $(1-\alpha\beta)(y) = x$. Пусть $y_n = x + (\alpha\beta)(x) + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1}(x)$ для любого $n \in N$, тогда $y_n = x + (\alpha\beta)(x) + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1}(x) = (1 + \alpha\beta + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1})(x) = (1 + \alpha\beta + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1})(1 - \alpha\beta)(y) = (1 - (\alpha\beta)^n)(y)$. Покажем, что $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Рассмотрим произвольное $n \in N$ и $k = n + 1$ покажем, что $y - y_i \in p^n G$ для любого $i \geq k$. Действительно, $y - y_i = (\alpha\beta)^i(y)$. Так как $\alpha\beta \in H(G)$, то $h_p((\alpha\beta)^i(y)) \geq i \geq k > n$. Следовательно, $y - y_i = (\alpha\beta)^i(y) \in p^n G$, то есть $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Докажем справедливость обратного включения. Пусть $\alpha \in S_p(G) \cap H(G)$. Согласно определению радикала Джекобсона кольца $E(G)$ и предложению 1 достаточно показать, что для любого $\beta \in E(G)$ выполняется: 1) $\ker(1 - \alpha\beta) \bigcap G[p] = 0$; 2) $(1 - \alpha\beta)p^n G[p] = p^n G[p]$ для любого $n \in N$. Покажем, что выполняется условие 1). Допустим противное, т. е. пусть существует $0 \neq x \in \ker(1 - \alpha\beta) \bigcap G[p]$. Тогда $(1 - \alpha\beta)(x) = 0$ и, следовательно, $h_p((\alpha\beta)(x)) = h_p(x)$. Последнее равенство противоречит тому, что $\alpha\beta \in H(G)$.

Проверим выполнение равенства 2). Пусть $x \in p^k G[p]$. Так как $\alpha \in S_p(G)$, то последовательность $\{y_n\}_{n\in N}$ сходится, где $y_n = x + (\alpha\beta)(x) + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1}(x)$. Так как $x \in p^k G[p]$ и $p^k G[p]$ — вполне характеристическая подгруппа, то $y_n \in p^k G[p]$ для любого $n \in N$. Пусть $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, тогда существует $t \in N$ такое, что $y - y_n \in p^k G[p]$ как только $n \geq t$. Следовательно, $y \in p^k G[p]$. Тогда имеем $h_p((1 - (\alpha\beta))(y) - x) = h_p(((1 - (\alpha\beta))(y_n) - x) + (1 - (\alpha\beta))(y - y_n)) = h_p(-(\alpha\beta)^n(x) + (1 - (\alpha\beta))(y - y_n)) \geq \min\{h_p((\alpha\beta)^n(x)), h_p(y - y_n)\}$. Здесь учитывалось то, что $y - y_n \in p^k G[p]$ (то есть $y - y_n \in G[p]$) и $\alpha\beta \in H(G)$, тогда $h_p(1 - (\alpha\beta))(y - y_n)) \geq \min\{h_p(y - y_n), (\alpha\beta)(y - y_n)\} = h_p(y - y_n)$. Так как $h_p((\alpha\beta)^n(x))$ и $h_p(y - y_n)$ стремятся к ∞ при $n \to \infty$, то $h_p((1 - (\alpha\beta))(y) - x) = \infty$. Следовательно, $(1 - (\alpha\beta))(y) - x = 0$ поскольку G — сепарабельная p-группа. Таким образом, $x = (1 - \alpha\beta)y$ и справедливо равенство $(1 - \alpha\beta)p^k G[p] = p^k G[p]$ для любых $k \in N$ и $\beta \in E(G)$. Следовательно, $(1 - \alpha\beta) \in Aut(G)$ для любого $\beta \in E(G)$, то есть $\alpha \in J(E(G))$. □

Из теоремы следует, что радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов сепарабельной p-группы G в точности совпадает с множеством всех элементов $\alpha \in H(G)$, для которых выполняется следующее условие: для любых $x \in G[p]$ и $\beta \in E(G)$ последовательность $\{y_n\}_{n\in N}$ сходится в группе G, где $y_n = x + (\alpha\beta)(x) + \ldots + (\alpha\beta)^{n-1}(x)$. Это условие будем называть условием Пирса. Заметим также, что существуют сепарабельные p-группы G, в которых множество всех элементов $\alpha \in H(G)$, удовлетворяющих условию Пирса, не совпадает с $H(G)$. Например, если G — неограниченная группа, являющаяся прямой суммой циклических p-групп [1, следствие 20.6], то есть в этом случае имеем $(S_p(G) \bigcap H(G)) \subsetneqq H(G)$.

Следующее утверждение показывает, что лемма 14.5 [10] является следствием теоремы.

Следствие 1. *Для сепарабельной p-группы G следующие условия эквивалентны:*
1) $J(E(G)) = H(G)$;
2) если $x \in G[p]$, $\alpha \in H(G)$ и $y_n = x + \alpha(x) + \ldots + \alpha^{n-1}(x)$, то существует $y \in G$ такой, что $h(y - y_n) \to \infty$ при $n \to \infty$;
3) $H(G) \subseteq S_p(G)$.

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) непосредственно следует из [10, лемма 14.5]. Эквивалентность условий 1) и 3) вытекает из теоремы. □

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству предложения 1, но для полноты изложения приведём его.

Лемма 2. *Пусть G — делимая p-группа и $\alpha \in E(G)$. Для того, чтобы $\alpha \in Aut(G)$ необходимо и достаточно выполнения равенств* $\ker\alpha \bigcap G[p] = 0$ *и* $\alpha(G[p]) = G[p]$.

Доказательство. Необходимость. Первое равенство получим из определения автоморфизма группы G. Включение $\alpha(G[p]) \subseteq G[p]$ следует из замечания 1. Пусть $x \in G[p]$. Так как $\alpha \in Aut(G)$, то $x = \alpha(\alpha^{-1}x)$. Поскольку $\alpha^{-1}x \in G[p]$ (см. замечание 1), то $x \in \alpha(G[p])$.

Докажем достаточность. Если $\alpha(x) = 0$ и $o(x) = p^k$, то $o(p^{k-1}x) = p$ и $\alpha(p^{k-1}x) = 0$. Тогда $p^{k-1}x \in \ker\alpha \bigcap G[p] = 0$, что противоречит порядку элемента x. Следовательно, $\ker\alpha = 0$. Покажем, что α — сюръективное отображение. Рассмотрим произвольное $y \in G$, где $o(y) = p^k$, $k \in N$. Доказательство проведём индукцией по k. Пусть $k = 1$, тогда из равенства $\alpha(G[p]) = G[p]$ следует существование $x \in G[p]$ такого, что $\alpha(x) = y$. Пусть для любого $l \in N$ такого, что $1 \leq l \leq k-1$, утверждение справедливо. Пусть $l = k$ и рассмотрим элемент $p^{k-1}y$, принадлежащий $G[p]$. Тогда из равенства $\alpha(G[p]) = G[p]$ следует существование $x_1 \in G[p]$ такого, что $\alpha(x_1) = p^{k-1}y$. Так как G — делимая p-группа, то

$G = p^{k-1}G$. Следовательно, существует $x \in G$ такой, что $x_1 = p^{k-1}x$. Тогда $p^{k-1}y = \alpha(x_1) = \alpha p^{k-1}x$ и $p^{k-1}(y - \alpha x) = 0$. Следовательно, $o(y - \alpha x) \leq p^{k-1}$, и, по предположению индукции, существует $z \in G$ такой, что $y - \alpha x = \alpha z$, то есть $y = \alpha(x + z) \in \operatorname{im}\alpha$. Таким образом, $\operatorname{im}\alpha = G$ и $\alpha \in Aut(G)$. □

Замечание 2. Если G — делимая p-группа, то $J(E(G)) = pE(G)$ [7, лемма 2.2].

Пусть G — делимая p-группа. Рассмотрим идеал в кольце эндоморфизмов этой группы $L_p(G) = \{\alpha \in E(G) \mid G[p] \subseteq \ker\alpha\}$.

Предложение 2. *Пусть G — делимая p-группа, тогда $J(E(G)) = L_p(G)$.*

Доказательство. Покажем, что $J(E(G)) \subseteq L_p(G)$. Пусть $\alpha \in J(E(G))$ и допустим противное, то есть пусть $\alpha \notin L_p(G)$. Последнее означает, что существует $0 \neq x \in G[p] \setminus \ker\alpha$. Тогда $\alpha(x) = (p\alpha_1)(x) = \alpha_1(px) = 0$ и, следовательно, $x \in \ker\alpha$, что противоречит выбору элемента x.

Покажем, что $J(E(G)) \supseteq L_p(G)$. Для этого необходимо доказать, что $(1 - \alpha\beta) \in Aut(G)$ для произвольных $\alpha \in L_p(G)$ и $\beta \in E(G)$. Согласно лемме 2 покажем 1): $\ker(1 - \alpha\beta) \bigcap G[p] = 0$. Рассмотрим произвольный элемент $x \in \ker(1-\alpha\beta) \bigcap G[p]$, тогда $(1-\alpha\beta)(x) = 0$. Следовательно, $x = (\alpha\beta)(x) = \alpha(\beta(x)) = 0$, поскольку $\beta(x) \in G[p] \subseteq \ker\alpha$. Покажем 2): $(1 - \alpha\beta)(G[p]) = G[p]$. Поскольку $(1-\alpha\beta)(G[p]) \subseteq G[p]$, то для произвольного $y \in G[p]$ имеем $(1 - \alpha\beta)(y) = y - \alpha(\beta(y)) = y$ (так как $\beta(y) \in G[p] \subseteq \ker\alpha$). □

Заметим также, что некоторое описание радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов делимой p-группы бесконечного ранга можно найти в работе [8].

Замечание 3. Пусть $G = \bigoplus\limits_{p \in P(G)} T_p(G)$ — периодическая группа. Тогда $E(G) = \prod\limits_{p \in P(G)} E(T_p(G))$ и $J(E(G)) = \prod\limits_{p \in P(G)} J(E(T_p(G)))$.

Доказательство. Следует из [3, §106, упр. 4(а)] и [4, часть 4, §15, упр. 4]. □

Следствие 2. *Пусть G — делимая периодическая группа, тогда*

$$J(E(G)) = \prod_{p \in P(G)} L_p(T_p(G)).$$

Доказательство. Следует из замечания 3 и предложения 2. □

Список литературы

1. Крылов П. А. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов / П. А. Крылов, А. В. Михалёв, А. А. Туганбаев. – Томск : ТГУ, 2002. – 464 с.
2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс. – М. : Мир, 1974. – Т. 1. – 336 с.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс. – М. : Мир, 1977. – Т. 2. – 415 с.
4. Anderson F. W. Rings and categories of modules / F. W. Anderson, K. R. Fuller. – N. Y. : Springer-Verlag, 1992. – P. 380.
5. Hausen J. The Jacobson radical of some endomorphism rings / J. Hausen // Lecture Notes in Math. – 1977. – Vol. 616. – P. 332–336.
6. Hausen J. Ideals and radicals of some endomorphism rings / J. Hausen, J. A. Johnson // Pacific J. Math. – 1978. – Vol. 74, N 2. – P. 365–372.
7. Hausen J. Determining Abelian p-groups by the Jacobson radical of their endomorphism rings / J. Hausen, J. A. Johnson // J. Algebra. – 1995. – Vol. 174. – P. 217–224.
8. Haimo F. Endomorphism radicals which characterize some divisible groups / F. Haimo // Ann. Unev. Sci. Budapest. Eotvos Sect. Math. – 1967. – Vol. 10. – P. 25–29.
9. Liebert W. The Jacobson radical of some endomorphism rings / W. Liebert // J.Reine Angew. Math. – 1973. – N 262/263. – P. 166–170.
10. Pierce R. S. Homomorphisms of primary Abelian groups / R. S. Pierce // Topics in Abelian groups (New Mexico State Univ. 1962). Scott. Foresman. Chicago. IL. – 1963. – P. 215–310.

V. M. Misyakov

On the Jacobson radical of the endomorphism ring of a torsion abelian groups

Abstract. Action of elements of the Jacobson radical of the endomorphism ring of an abelian torsion group on the group itself is investigated.

Keywords: abelian group; endomorphism ring; Jacobson radical

Мисяков Виктор Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент, Томский государственный университет, 634050, Томск, пр. Ленина, 36 тел.: (3822)460369 (mvm@mail.tsu.ru)

Misyakov Viktor, Tomsk State University, 36 Lenin Prospekt, Tomsk, 634050 associate professor, Phone: (3822)460369 (mvm@mail.tsu.ru)